# 初中数学 奥林匹克

# 举一反三

## 三年级

主编 秦驰


每天20分钟

**特别提示**

1个王牌例题＋3个由易到难的典型练习

＝融合贯通的举一反三

陕西人民教育出版社

初中数学

奥林匹克

举一反三

1 2 3

国家级奥林匹克数学教练
国家级骨干教师 领衔编写


● 整体策划 孙 玲

● 责任编辑 董文利

ISBN 7-5419-8734-4

9 787541 987342 >

ISBN 7-5419-8734-4/G·7568

定价：10.00元

奥林匹克

# 初中数学

# 举一反三


- 分册主编　张路遥
- 副 主 编　姜书念 薛滨洲 马学斌
- 编　　写　王焕群 张路遥 徐航胜 岳惠萍 尤 廉 朱武周 苗 强 高晓宁 李红霞 雒 萍 张宏伟 刘 英 李 政 薛滨洲 马学斌 姜书念 朱武周 苗 强 秦 驰


陕西人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克初中数学举一反三. 初三 / 马亚军，王焕群编著. —西安：陕西人民教育出版社，2003.5
ISBN 7-5419-8734-4

Ⅰ. 奥…　Ⅱ. ①马…②王…　Ⅲ. 数学课—初中—习题　Ⅳ. G.634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 041056 号

3 奥林匹克 初中数学 举一反三

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 陕西人民教育出版社 |
| 地　　址 | 西安市长安南路 181 号 |
| 经　　销 | 各地新华书店 |
| 印　　刷 | 陕西天坛福利印刷厂 |
| 开　　本 | 880×1230 毫米　1/32 |
| 印　　张 | 9.75 |
| 插　　页 | 1 |
| 字　　数 | 195 千字 |
| 版　　次 | 2003 年 6 月第 1 版<br>2005 年 7 月第 7 次印刷 |
| 印　　数 | 53,001－58,000 |
| 书　　号 | ISBN 7－5419－8734－4/G・7568 |
| 定　　价 | 10.00 元 |

# 编写说明

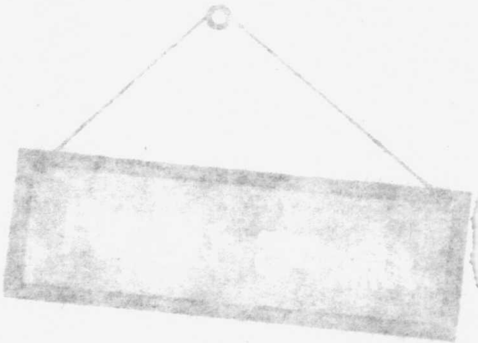
中学数学竞赛活动是中学生课外活动中最具吸引力的活动形式之一。组织中学生参加数学竞赛能够激发学生产生钻研数学的浓厚兴趣，形成勇于实践、敢于创新的良好品质，能够拓宽学生的知识面，提高学生数学素质，发展个性特长。为适应《基础教育课程改革纲要》的要求，我们组织了一批有丰富教学经验的老师编写了这套丛书，希望通过读例解题的形式，帮助中学生系统地掌握中学数学竞赛的基本内容。

本套丛书编写力求体现以下特点：

(1) **一日三练，螺旋上升**。我们将数学教材上的思考题和数学竞赛内容以一周一个小专题，例练结合的形式奉献给大家，每天花时不多(20分钟左右)，但只要持之以恒，便可得到系统的训练，获得“聚沙成塔，集腋成裘”的效果。

(2) **源于基础，难易有序**。编者精选了典型题例加以详细分析，强化了学习方法的指导，练习题与例题做到匹配一致，难易有序，既源于例题，又逐步提高，促使学生深刻理解，牢固掌握。

(3) **注重训练，覆盖面广**。本书着眼于培养学生灵活运用知识的能力，它以思维训练为核心，以浅近的详解、活泼多样的形式，培养学生解决实际问题的能力，力求覆盖面广，趣味性强。

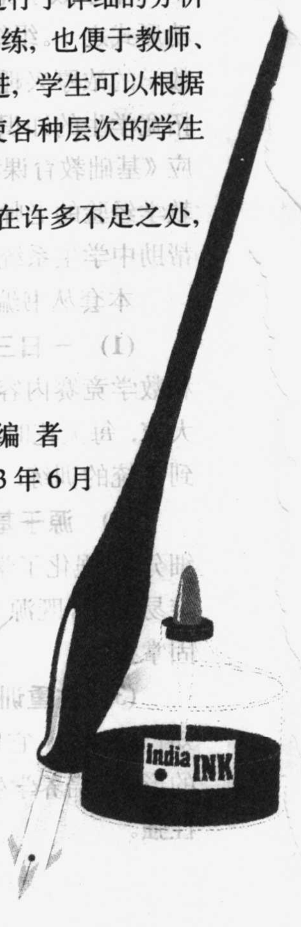


(4) **自主选择，便于自学。**书中对例题进行了详细的分析讲解，练习题也附有答案，既便于学生自学自练，也便于教师、家长检查辅导，配套练习的难度呈阶梯性递进，学生可以根据自己的数学水平选择适合自己能力的练习，使各种层次的学生都能获得成功的快乐。

由于时间紧、任务重，在编写中肯定存在许多不足之处，恳请读者批评指正。

编 者

2003年6月



# 目录

chuzhongshuxue

# 目 录

# 第1周 一元二次方程的解法

**专题简析**

一元二次方程是含有一个未知数，并且未知数的最高次项是二次的整式方程，解一元二次方程常见的方法有直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法. 但也确实存在一些方程，使人看了觉得扑朔迷离，无从下手或者解法太繁，令人生畏，事实上这样的方程一般都有巧妙的解法，本专题就向大家介绍一些特殊的一元二次方程和简单的高次方程的解法.

_____月_____日

**王牌 例题1**

解方程 $x^2-12x=9964$.

**【思路导航】**此题很容易想到用因式分解法，但常数项9964的绝对值较大，约数较多，不易分解；而一次项系数为偶数，可尝试用配方法.

解：$\because x^2-12x+36=9964+36$，

$\therefore (x-6)^2=100^2$，则$x-6=\pm100$，

$\therefore x_1=106$，$x_2=-94$.

## 疯狂操练 1

1. 解方程 $6x^2-12x=2803$.

2. 解方程 $169x^2-39x-2=0$.

3. 解关于$x$的方程 $3x^2-2(a+2b)x+b^2-a^2=0$.

____月____日

## 例题 2

解方程 $2002x^2+2003x+1=0$.

**【思路导航】**若能发现$2002-2003+1=0$，即可得原方程一个根为$x=-1$，则方程可变为：

$(x+1)(2002x+1)=0$，从而方程的解为$x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{2002}$.

## 疯狂操练 2

1. 解方程$12345x^2-12346x+1=0$.

2. 当方程$(m^2+1)x^2-(m+1)x-3=0$的一个根为$x=-1$，则$m$的值为多少？

3. 解关于$x$的方程$(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$.

____月____日

## 例题 3

解方程 $x^4+(x-4)^4=626$.

**【思路导航】**此方程是一个高次方程，若展开$(x-4)^4$，则非但解

决不了问题，还使方程变得更无规律可寻了. 此处可用“平均值换元法”，即设$\frac{x+(x-4)}{2}=y$，即$y=x-2$，则原方程可化为：

$(y+2)^4+(y-2)^4=626$. 此时再展开，合并，化简得方程$y^4+24y^2-297=0$，从而得到一个双二次方程，利用因式分解可得$(y^2-9)(y^2+33)=0$，从而由$y^2=-33$无实数解，得$y^2=9$，即$y=\pm3$. 从而$x-2=\pm3$.

$\therefore x_1=5$，$x_2=-1$.

**疯狂操练 3**

1. 解方程 $(x+1)^4+(x+3)^4-272=0$.
2. 解方程 $(x+2)^4+(x-4)^4=272$.
3. 解方程 $(4x+1)(3x+1)(2x+1)(x+1)=3x^4$.

____月____日

**例题 4**

解方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

**【思路导航】**此方程的四次、三次、二次、一次、常数项各项齐全，仔细观察，发现方程中各项系数关于中间项是对称的. 于是，由方程可知$x\neq0$，则在方程两边同时除以$x^2$得：

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$.

令$x+\frac{1}{x}=y$，则$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$. 即$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

于是方程可变形为$2y^2+3y-20=0$.

从而$(2y-5)(y+4)=0$.

即 $y=\frac{5}{2}$或 $y=-4$.

当 $y=\frac{5}{2}$时，$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

即$2x^2-5x+2=0$.

解之得$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$.

当$y=-4$时，$x+\frac{1}{x}=-4$.

即$x^2+4x+1=0$.

解之得$x=-2\pm\sqrt{3}$.

∴原方程的解为：

$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$，$x_3=-2+\sqrt{3}$，$x_4=-2-\sqrt{3}$.

## 疯狂操练 4

1. 解方程 $2x^4+3x^3-x^2+3x+2=0$.
2. 解方程 $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$.
3. 解方程 $3x^4+14x^3+56x+48=0$.

____月____日

## 王牌 例题 5

解方程 $x^3-2\sqrt{2}x^2+2x-\sqrt{2}+1=0$.

**【思路导航】**这是关于$x$的一元三次方程，但仔细观察其系数，发现出现 2 或$\sqrt{2}$最多，因此此题可“退而求$\sqrt{2}$”，即令$\sqrt{2}=a$，则原方程变形为：

$x^3-2ax^2+a^2x-a+1=0$,

即 $x\cdot a^2-(2x^2+1)a+(x^3+1)=0$.

易知$x\neq 0$，所以上式可看作是关于$a$的二次方程，

因式分解得$[a-(x+1)][ax-(x^2-x+1)]=0$.

得$a=x+1$或$a=\frac{x^2-x+1}{x}$.

则当$a=x+1$时，

有$\sqrt{2}=x+1$,

$\therefore x=\sqrt{2}-1$.

当$a=\frac{x^2-x+1}{x}$时，有$\sqrt{2}=\frac{x^2-x+1}{x}$.

$\therefore x^2-(\sqrt{2}+1)x+1=0$.

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}+1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{2}-1$，$x_2=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$，

$x_3=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

## 疯狂操练 5

**1.** 解方程：$x^3+\sqrt{3}x^2+(2\sqrt{3}-1)x+3-\sqrt{3}=0$.

**2.** 已知$a\geqslant -6$，解关于$x$的方程：

$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$.

**3.** 解关于$x$的方程：

$x^3+(a-2)x^2-(4a+1)x-a^2+a+2=0\quad(a\geqslant -\frac{1}{4})$.

# 第2周 一元二次方程根的判别式

专题简析

一元二次方程根的判别式（$\Delta=b^2-4ac$）是重要的基础知识.它不仅能直接用于判定根的情况，而且在二次三项式，二次不等式，二次函数等知识的运用中有着重要作用.熟练掌握它的各种用法，可提高解题能力和知识的综合运用能力.

____月____日

王牌 例题1

已知方程$x^2-2x-m=0$没有实数根，其中$m$是实数.

试判定方程$x^2+2mx+m(m+1)=0$有无实数根？

【思路导航】因为方程$x^2-2x-m=0$没有实数根，所以

$\Delta_1=(-2)^2-4(-m)<0$，即$m<-1$.

$\because \Delta_2=(2m)^2-4m(m+1)=-4m>0$，

$\therefore$方程$x^2+2mx+m(m+1)=0$有两个不相等的实根.

疯狂操练1

**1.** 如果关于$x$的方程$mx^2-2(m+2)x+m+5=0$没有实根，那么关于$x$的方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$的根的情况如何？

2. 判别方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 的实根个数（这里 $a$, $b$ 为实数）.

3. 已知 $a$, $b$, $c$ 是三角形的三边，试判别方程

$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 有无实根？

____月____日

**王牌 例题 2**

已知三个关于 $x$ 的方程 $x^2-x+m=0$, $(m-1)x^2+2x+1=0$ 和 $(m-2)x^2+2x-1=0$，若其中至少有两个方程有实根，求实数 $m$ 的取值范围.

**【思路导航】** 方程 $x^2-x+m=0$ 的判别式 $\Delta_1=1-4m$,

方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 的判别式 $\Delta_2=4-4(m-1)=4(2-m)$,

方程 $(m-2)x^2+2x-1=0$ 的判别式 $\Delta_3=4+4(m-2)=4(m-1)$.

由"零点区间讨论法"分情况讨论如下：

当 $m\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$\Delta_1\geqslant 0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$;

当 $\frac{1}{4}<m<1$ 时，$\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$;

当 $1\leqslant m\leqslant 2$ 时，$\Delta_1<0$, $\Delta_2\geqslant 0$, $\Delta_3\geqslant 0$;

当 $m>2$ 时，$\Delta_1<0$, $\Delta_2<0$, $\Delta_3>0$.

$\therefore$ 当 $m\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $1\leqslant m\leqslant 2$ 时，至少有两个方程有实根.

**疯狂操练 2**

1. 设 $a$, $b$, $c$ 为互相不等的非零实数，求证：三个方程 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 不可能都有两个相等实数根.

2. 已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根，

$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根，

$x^2+(4-a)x+5-b=0$没有实数根，则$a$，$b$取值范围是（　　）.

A. $2<a<4$，$2<b<5$　　B. $1<a<4$，$2<b<5$

C. $1<a<4$，$1<b<5$　　D. $2<a<4$，$1<b<5$

**3.** 已知$a$，$b$，$c$，$d$为实数，满足$ac=2(b+d)$，

求证：方程$x^2+ax+b=0$和$x^2+cx+d=0$至少有一个实数解.

____月____日

**王牌 例题 3**

当$a$在什么范围内取值时，方程$|x^2-5x|=a$有且只有相异两实数根？

**【思路导航】**（1）当$a>0$时，原方程化为$x^2-5x-a=0$ ① 或$x^2-5x+a=0$ ②，方程①的判别式为$\Delta_1=25+4a$，因$a>0$，则$25+4a>0$，所以方程①必有两个相异的实根. 于是根据题意方程②必无实根，那么方程②的判别式$\Delta_2=25-4a$必小于0. 即$25-4a<0$，得$a>\frac{25}{4}$.

所以，当$a>\frac{25}{4}$时，方程$|x^2-5x|=a$有且只有两个相异的实根.

（2）当$a=0$时，原方程变为$x^2-5x=0$，有两个相异实根$x=0$和$x=5$.

（3）当$a<0$时，方程$|x^2-5x|=a$无实根.

综上所述，符合题意的$a$的范围是$a=0$或$a>\frac{25}{4}$.

**疯狂操练 3**

**1.** 当$a$，$b$为何值时，方程$x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$有实根.

**2.** $m$为何值时，方程$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$有两个不相

等的实数根.

3. 若方程$x^2-2ax+4a-3=0$的两根均大于 1，则实数$a$的取值范围是（　　）.

A. $a \geqslant 1$　　B. $0<a \leqslant 3$　　C. $a \leqslant 3$　　D. $a \geqslant 3$

____月____日

王牌 例题 4

已知实数$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，满足$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)\cdot a_4+a_2^2+a_3^2=0$，求证：$a_2^2=a_1a_3$.

**【思路导航】**把已知等式看成关于$a_4$的方程.

当$a_1^2+a_2^2=0$时，即$a_1=a_2=0$，结果显然成立；

当$a_1^2+a_2^2 \neq 0$时，已知等式是关于$a_4$的一元二次方程，由$a_4$是实数，知此方程有实根，则必有判别式$\Delta \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\therefore \Delta &= [-2a_2(a_1+a_3)]^2-4(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)\\ &= -4(a_2^4-2a_2^2\cdot a_1a_3+a_1^2a_3^2)\\ &= -4(a_2^2-a_1a_3)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

即$(a_2^2-a_1a_3)^2 \leqslant 0$.

又$\because (a_2^2-a_1a_3)^2 \geqslant 0$,

$\therefore a_2^2-a_1a_3=0$.

即$a_2^2=a_1a_3$.

此题再次利用了若$A \geqslant 0$ 且$A \leqslant 0$，则$A=0$来解题，是实现由“不等”到“相等”的有效方法.