LI GONG LEI

考研数学

复习宝典

（理工类）

毕志伟 叶鹰／编

华中科技大学出版社

http://press.hust.edu.cn

考研数学复习宝典（理工类）

毕志伟　叶　鹰　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习宝典(理工类)/毕志伟　叶鹰　编
武汉:华中科技大学出版社,2005年9月
ISBN 7-5609-3444-7

Ⅰ. 考…
Ⅱ. ①毕…　②叶…
Ⅲ. 数学-研究生入学考试-学习参考资料
Ⅳ. O1

考研数学复习宝典(理工类)　毕志伟　叶鹰　编

策划编辑:吴锐涛
责任编辑:吴锐涛　徐正达　封面设计:刘　卉
责任校对:胡金贤　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华大图文设计室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×1092　1/48　印张:7.875
版次:2005年9月第1版　印次:2005年9月第1次印刷
字数:207 000　定价:10.80元
ISBN 7-5609-3444-7/O·360

内 容 提 要

本书依据全国硕士研究生入学统一考试数学大纲编写。对大纲中提到的所有概念、结论等知识点，进行了点拨式的归纳和阐述，尤其是对概念的联系和区别进行了整理；将考试要用到的各类公式，集中归纳在相应的章节；对常见的考试题型给出了实例和应对措施。本册为理工类分册。

本书可作为考研复习阶段的同学作为随身手册使用。也可作为低年级本科生学习高等数学的参考书。

前　言

这是一本为正在刻苦复习的学子们提供的以最新研究生入学考试数学大纲为标准编写的考研数学备考手册。本手册充分考虑到考生的实际情况和临考心态，内容完整而精练，细节丰富而实用，体系科学而简明，查阅快捷而方便。对于正在学习大学数学课程的低年级大学生来说本书也有较大的参考价值。

如果你觉得教科书的内容太多，自己对概念的理解不太到位，定理的使用也有点盲目，公式分散而孤立因而比较难找的话；如果你觉得已经看完的研究生考试复习书还是太厚，题目多而杂，知识的系统性和要领还是不太清楚的话；如果你觉得自己需要整理一下所学的知识，检查复习的完整性，系统地归纳基本公式、常见题型和解题思路方法的话——请使用这本为以上的需求所设计的小册子吧！

本手册每章包括三部分：大纲要求、知识点·点拨、常见题型·应对。

本手册既适合于进入复习阶段总结期的临考冲刺者，也适合于开始复习或准备复习的起跑者。毕竟不走弯路、提高效率是大家的共同目标。

本书由一直在教学一线的资深教师集体策划并编写。近十年来，他们参加了每一年硕士研究生数学

入学考试的评卷和分析工作,担任了华中科技大学数学系的考研辅导教学任务。如果这本凝结了编者多年教学经验的小册子能够提高考生的复习效率的话,那将是编者最期望、最快乐的事情。

编　者

2005年5月

于华中科技大学

目　录

第1篇　微　积　分

第1章　函数、极限、连续 ………………………… (1)

1.1　函数 ………………………………… (1)

1.2　极限 ………………………………… (9)

1.3　连续 ………………………………… (23)

第2章　一元函数微分学 …………………… (28)

2.1　导数与微分 ………………………… (28)

2.2　导数的应用 ………………………… (42)

第3章　一元函数积分学 …………………… (54)

3.1　不定积分 …………………………… (54)

3.2　定积分·广义积分 ………………… (60)

3.3　定积分应用 ………………………… (72)

第4章　向量代数和空间解析几何 ………… (81)

4.1　向量代数 …………………………… (81)

4.2　空间解析几何 ……………………… (87)

第5章　多元函数微分学 …………………… (99)

5.1　多元函数偏导数与全微分 ………… (99)

5.2　多元微分学的应用 ……………… (109)

第6章　多元函数积分学 ………………… (116)

6.1　重积分 …………………………… (116)

6.2　线面积分 ………………………… (126)

6.3　多元函数积分的应用 …………… (139)

第7章 无穷级数 …………………………… (145)
7.1 数项级数 ………………………… (145)
7.2 幂级数 …………………………… (152)
7.3 傅里叶级数 ……………………… (160)
第8章 常微分方程 …………………………… (166)
8.1 一阶微分方程 …………………… (166)
8.2 二阶可降阶微分方程 …………… (170)
8.3 线性微分方程 …………………… (172)

第2篇 线性代数

第9章 行列式 ……………………………… (180)
第10章 矩阵 ……………………………… (198)
10.1 矩阵的基本概念 ……………… (198)
10.2 几种常用矩阵的性质归纳 ……… (208)
10.3 矩阵初等变换与初等矩阵 ……… (211)
10.4 矩阵的秩 ……………………… (214)
第11章 向量 ……………………………… (223)
11.1 线性相关·线性无关 …………… (223)
11.2 向量空间·坐标·基变换 ……… (229)
11.3 内积·正交·标准正交基 ……… (231)
第12章 线性方程组 ………………………… (238)
第13章 矩阵的特征值和特征向量 ……… (247)
13.1 特征值和特征向量 …………… (247)
13.2 矩阵相似对角化 ……………… (250)
第14章 二次型 …………………………… (258)
14.1 二次型的标准形 ……………… (258)

14.2 矩阵的合同 …………………… (260)
14.3 二次型的正定性 ………………… (263)

第3篇 概率论与数理统计

第15章 随机事件和概率 ……………… (272)
15.1 随机事件与样本空间 …………… (272)
15.2 概率的定义、性质及计算 ……… (275)
15.3 条件概率与独立性 ……………… (279)
第16章 随机变量及其概率分布 ……… (290)
16.1 随机变量及其分布函数 ………… (290)
16.2 离散型随机变量 ………………… (292)
16.3 连续型随机变量 ………………… (295)
16.4 随机变量函数的分布 …………… (298)
第17章 多维随机变量及其分布 ……… (305)
17.1 二维随机变量的联合分布 ……… (305)
17.2 边缘分布和条件分布 …………… (308)
17.3 独立性 …………………………… (311)
17.4 二维随机变量函数的分布 ……… (314)
第18章 随机变量的数字特征 ………… (325)
18.1 数学期望、方差及其性质 ……… (325)
18.2 协方差、相关系数和矩 ………… (328)
第19章 大数定律和中心极限定理 …… (337)
19.1 大数定律 ………………………… (337)
19.2 中心极限定理 …………………… (339)
第20章 数理统计的基本概念 ………… (342)
20.1 总体、样本与统计量 …………… (342)

20.2 抽样分布 …………………………… (344)
第21章 参数估计 …………………………… (349)
21.1 点估计方法 …………………………… (349)
21.2 估计量的评选标准 ………………… (351)
21.3 区间估计 …………………………… (353)
第22章 假设检验 …………………………… (362)

第1篇　微　积　分

第1章　函数、极限、连续

1.1　函　数

大纲要求

理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单的应用问题的函数关系. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

知识点·点拨

【常量·变量】在某个考察过程(时间或空间过程)中保持不变的量称为常量，发生变化的量称为变量. 微积分课程中只考虑实数变量.

【变域】在考察过程中，变量所取得的数值的集合(通常是区间)称为变域.

【邻域】包含点x_0的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为x_0的一个邻域，其中$\delta>0$称为该邻域的半径.

【左邻域·右邻域】区间$(\alpha,x_0]$($\alpha<x_0$)称为点x_0的

左邻域;区间$[x_0,\beta)(x_0<\beta)$称为点x_0的右邻域.

【去心邻域】从点x_0的邻域中去掉点x_0后的集合称为点x_0的去心邻域.

【一元函数】设x与y是两个变量,D是一个非空数集,f是一个联系着x与y的对应规则.如果对每个$x\in D$,依据规则f,总有惟一的数值y与之对应,则称y或f为x的函数,记作$y=f(x)$;称D(有时记作D_f)为此函数的定义域,x与y分别为函数的自变量与因变量.

〖点拨1〗与x对应的y必须是存在且惟一的.

〖点拨2〗定义域及对应规则是函数的两要素.

【值域】设函数$y=f(x)$的定义域是D,则以下数集W称为函数的值域:

$$W=\{f(x)\mid x\in D\}.$$

【函数的相等】两个函数f与g相等的充分必要条件是它们的定义域相等,并且对相同的自变量x,函数值也相等,即$f(x)=g(x)$.以下两个函数

$$y=\sin x\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$x=\sin y\quad(-\infty<y<+\infty)$$

是同一个函数.使用什么字母表示不是重要的.

【自然定义域】对使用数学公式及数学运算表示的函数$f(x)$,称使得$f(x)$有意义的全体实数组成的集合为该函数的自然定义域.如果没有指明$f(x)$的定义域,则默认其定义域为自然定义域.

【函数的奇偶性】设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,则称$f(x)$是:(1)奇函数,若$f(-x)=-f(x)$,

$x\in D$;(2)偶函数,若$f(-x)=f(x),x\in D$.

【奇偶函数的性质】在函数作图、积分计算等问题中常用到函数的奇偶性,其主要性质如下.

〖几何特点〗奇函数的曲线$y=f(x)(x\in D_f)$关于原点对称,如果$0\in D_f$,则$f(0)=0$;偶函数的曲线$y=f(x)$关于y轴对称,如果$f(x)$在$x=0$处可导,则$f'(0)=0$.

例　如果奇函数在$(-\infty,0)$上单调增加及下凸,则它在$(0,+\infty)$上单调增加且上凸;如果偶函数在$(-\infty,0)$上单调增加及下凸,则它在$(0,+\infty)$上单调减少且下凸.

〖四则运算〗函数的奇偶性经过四则运算后的变化如下:

f	g	$f\pm g$	$f\cdot g$及f/g	$f(g(x))$
奇	奇	奇	偶	偶
奇	偶	不确定	奇	偶
偶	偶	偶	偶	偶
偶	奇	不确定	奇	偶

〖导函数〗设函数满足可导条件,则奇函数的导函数是偶函数,偶函数的导函数是奇函数.

〖原函数〗设$f(x)$连续,则奇函数$f(x)$的所有原函数是偶函数,而偶函数$f(x)$的原函数中却只有一个(通过原点的,例如$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$)是奇函数.

【函数的周期性】设函数$f(x)$的定义域是D. 若有正常数T,使得当$x\in D$时$x+T\in D$且$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是周期函数,T是$f(x)$的一个周期.

〖点拨〗可以验证,$2T$,$3T$,…也是$f(x)$的周期,因此周期函数有无限个周期.

【基本周期】如果$f(x)$有一个最小的周期T_0,则称T_0是$f(x)$的基本周期.

例 $\sin x$,$\cos x$都以2π为基本周期;狄利克雷函数没有基本周期,因为每个正有理数都是其周期.

【狄利克雷函数及其性质】以德国数学家狄利克雷名字命名的函数. 用来说明一些重要的函数性质,定义如下:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

此函数具有以下基本性质:

(1)$D(x)$是分段函数,不是初等函数;

(2)$D(x)$是周期函数,以每个正有理数r为周期,因为$D(x)=D(x+r)$;

(3)$D(x)$是一个处处有定义的有界函数,也是一个处处不连续的函数;

(4)$D(x)$在任何有限区间$[a,b]$上的定积分不存在.

【周期函数的性质】周期函数的性质主要有以下几条.

〖复合运算〗设T是$f(x)$的周期,$a>0$. 则T/a是复合函数$\varphi(x)=f(ax+b)$的周期.

〖和函数〗当两个周期函数的周期T_1,T_2有最小公倍数T时，它们的和函数是周期函数，周期为T. 而当T_1,T_2无最小公倍数时，和函数不一定是周期函数. 例如$f(x)=\sin x$以2π为周期，狄利克雷函数$D(x)$以正有理数r为周期，由于2π与r无最小公倍数，其和$f(x)+D(x)$不是周期函数.

〖导函数〗可导的周期函数$f(x)$的导函数还是周期函数. 事实上，于$f(x+T)=f(x)$两边同时对x求导，得出$f'(x+T)=f'(x)$. 这说明$f'(x)$以T为周期.

〖原函数〗一般地，周期函数$f(x)$的原函数$F(x)$不一定是周期函数，例如，$f(x)=1+\cos x$是周期函数，但是其原函数$F(x)=x+\sin x$却不是周期函数. 但是，如果周期函数$f(x)$在周期区间$[0,T]$上的定积分$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$，则它的原函数都是周期函数. 事实上，设$F(x)$是$f(x)$的原函数，令$h(x)=F(x+T)-F(x)$，则会有$h'(x)=0$，$h(0)=0$，故$h(x)=0$.

〖有界性〗在$(-\infty,+\infty)$上连续的周期函数是有界函数.

例如$f(x)=\sin x^2$不是周期函数，因为它的导函数$f'(x)=2x\cos x^2$是$(-\infty,+\infty)$上连续的无界函数，从而不是周期函数，进而推出$f(x)$不是周期函数.

〖定积分〗设$f(x)$是以T为周期的在$(-\infty,+\infty)$上连续的周期函数，a为任意实数，则有

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

【函数的单调性】设函数$f(x)$在区间I上有定义，$x_1,x_2\in I$.

(1)若$x_1<x_2$时恒有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或恒有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称$f(x)$为I上的单调增(或单调减)函数.单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

(2)若$x_1<x_2$时恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或恒有$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$为I上的严格单调增(或严格单调减)函数.严格单调增函数与严格单调减函数统称为严格单调函数.

【函数的有界性】设函数$f(x)$在区间I上有定义.若存在常数B，使得对每个$x\in I$，有$f(x)\leqslant B$(或$f(x)\geqslant B$)，则称$f(x)$在I上有上界(或有下界)，且称B为$f(x)$在I上的一个上界(或下界).若存在$M>0$，使得对每个$x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在D上有界；否则称$f(x)$为I上的无界函数.既有上界又有下界的函数是有界函数.

【可逆函数】若自变量取不同值时，对应的函数值也不相同，则称该函数为可逆函数.

〖点拨〗严格单调函数必为可逆函数，但反之不然.

【反函数】当函数$y=f(x)$可逆时，可以定义从函数$f(x)$的值域W_f到定义域D_f之间的一个函数f^{-1}：$f^{-1}(y)=x,y\in W_f,f(x)=y$.称之为函数$f(x)$的反函数.

〖点拨〗通常，从方程$y=f(x)$中解出$x=f^{-1}(y)$

即得到所求的反函数表示式.

【反函数的图形】在同一个坐标系中函数$y=f(x)$的图形与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称,但是与函数$x=f^{-1}(y)$的图形却是相重合的,如图1-1-1所示.

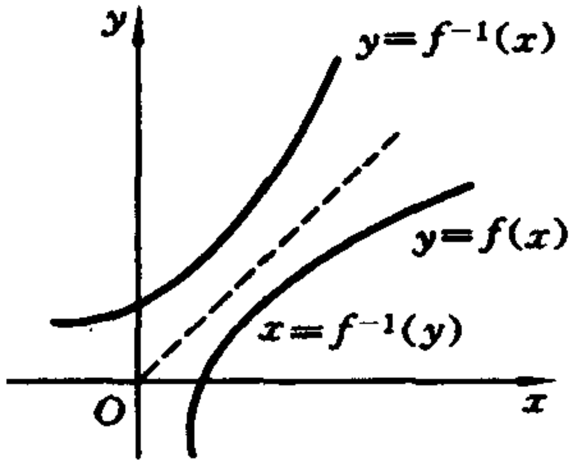

图1-1-1

【基本初等函数】包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.

【初等函数】由基本初等函数经有限次四则运算、有限次复合运算构成的用一个数学算式表示的函数.

常见题型·应对

历年考卷中较少专门考察函数知识,但是作为微积分的研究对象,函数的基本知识贯穿在许多问题当中,因此必须熟练地掌握本章的知识点.

【求函数的定义域问题】首先依据$f(x)$中出现的基本初等函数性质写出关于自变量的不等式组.例如:对于偶次根式函数如$\sqrt{u}$要求$u\geqslant 0$;对于对数函数