

高 / 等 / 学 / 校 / 教 / 材 /

包装工程专业系列教材

缓冲包装 理论基础与应用

Fundamental and Application of
Cushioning Packaging

苏 远 汤伯森 编



化学工业出版社
教材出版中心

高等学校教材

包装工程专业系列教材

缓冲包装理论基础与应用

苏 远 汤伯森 编



化学工业出版社
教材出版中心

· 北 京 ·

本书是《包装工程专业系列教材》之一。本书主要包含三个部分：前一部分为包装动力学基础理论（第2章和第4章）；后一部分是材料的缓冲特性和缓冲包装五步设计法（第5章和第6章）；中间则加入了振动台和振动试验，这是因为缓冲包装设计不是纯理论计算，它是以包装动力学为理论基础的实用型设计方法，而这种方法离不开振动与冲击试验。

为了便于师生学习需要，特在各章后附思考题，以利于学习思考，并在文后添加包装件性能测试中国国家标准目录的附录，以供参考。

图书在版编目（CIP）数据

缓冲包装理论基础与应用/苏远，汤伯森编. —北京：化学工业出版社，2006.7

高等学校教材

包装工程专业系列教材

ISBN 7-5025-9057-9

I. 缓… II. ①苏…②汤… III. 缓冲包装-基础理论-高等学校-教材 IV. TB485.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 071752 号

高等学校教材

包装工程专业系列教材

缓冲包装理论基础与应用

苏 远 汤伯森 编

责任编辑：杨 菁

文字编辑：李 玥

责任校对：李 林

封面设计：郑小红

*

化学工业出版社
教材出版中心

出版发行

（北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码 100029）

购书咨询：（010）64982530

（010）64918013

购书传真：（010）64982630

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

化学工业出版社印刷厂印装

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 9¼ 字数 232 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-9057-9

定 价：20.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者，本社发行部负责退换

前 言

任何产品在从生产线下线后再到达用户手中,都要经过装卸、仓储及运输这一流通过程。在这一过程中发生的冲击和振动,是产品破损的主要原因。由此产生的破损,不但带来直接的经济损失,还可能给工厂,甚至于国家的声誉,带来不可估量的影响。为此,了解产品/包装件在运输环境中的有害因素,并研究出能有效保护产品的缓冲包装方法,是包装研究中的一项十分重要的任务。本书的目的就是为缓冲包装设计提供基本的理论基础和实际的设计方法。

缓冲包装的理论基础是包装动力学,缓冲包装五步(或六步)设计则是包装动力学的应用。本书主要包含三个部分:前一部分为包装动力学基础理论(第2章和第4章);后一部分是材料的缓冲特性和缓冲包装五步设计法(第5章和第6章);中间则加入了振动台与振动试验,这是因为缓冲包装设计不是纯理论计算,它是以包装动力学为理论基础的实用型设计方法,而这种方法离不开振动与冲击试验。

由于产品和包装件种类繁多,而且大多数是多自由度非线性系统,纯理论计算不可能解决这样复杂的实际问题。所以,本书在介绍了相关的动力学基础理论后,重点介绍了实际的测试和设计方法。希望包装专业的学生能够从本书得到一个较清楚的缓冲包装设计的概念和方法。从事包装设计和测试的工程人员可以从本书得到一个较为系统的参考。

随着中国包装工业的飞速发展,包装高等教育也得到了长足的发展。开设包装工程专业的高等院校,从20世纪80年代的几所高校,到21世纪的今天,已有几十所高等院校开设了包装工程专业,很多学校还招收了这个方向的硕士研究生。作者希望本书的出版能为包装教育和包装工业的发展添砖加瓦,也十分欢迎各高校和企业的同行给予指正和交流。

株洲工学院包装与印刷学院的赵德坚老师,为本书的文字和图稿做了大量的工作。在此表示衷心的感谢。

作 者

2006年3月于株洲工学院

目 录

1 绪论	1
1.1 防护包装	1
1.2 振动与冲击	2
1.3 包装动力学的研究对象与任务	3
1.4 包装动力学发展简史	3
2 振动理论基础	5
2.1 单自由度系统的自由振动	5
2.1.1 无阻尼系统的自由振动	5
2.1.2 有阻尼系统的自由振动	9
2.2 单自由度支座激励系统的受迫振动	11
2.3 车辆振动的定性分析	15
2.4 产品与包装件的力学模型	17
2.4.1 产品的力学模型	17
2.4.2 包装件的力学模型	18
2.5 包装件的简谐振动	18
2.5.1 包装件简谐振动的两级估算法	18
2.5.2 包装件的幅频特性曲线	21
2.5.3 易损零件两次共振时的加速度峰值	23
2.5.4 缓冲衬垫对易损零件振动的影响	24
2.6 包装件的随机振动	27
2.6.1 随机振动的基本概念	27
2.6.2 振动环境的统计特性	28
2.6.3 易损零件对振动环境的响应	30
2.6.4 易损零件响应的统计特性	31
2.6.5 车辆随机振动的定性分析	34
思考题	35
3 振动台与振动试验	36
3.1 压电式加速度计	36
3.1.1 压电式加速度计的工作原理	36
3.1.2 质量块对外壳的相对振动	37
3.1.3 加速度计传感器的幅频曲线	39

3.1.4	加速度计传感器的相频曲线	40
3.2	振动台	44
3.2.1	离心式机械振动	44
3.2.2	电动式振动台	47
3.2.3	液压式振动台	51
3.3	振动试验	52
3.3.1	正弦振动试验	52
3.3.2	随机振动试验	53
	思考题	55
4	冲击理论基础	56
4.1	包装件跌落冲击问题的研究方法	56
4.2	产品对跌落冲击的响应	57
4.2.1	产品的跌落冲击过程	57
4.2.2	产品的位移时间函数	58
4.2.3	产品的加速度时间函数	59
4.2.4	产品的速度改变量	60
4.3	易损零件对跌落冲击的响应	61
4.3.1	易损零件的运动微分方程	61
4.3.2	易损零件对跌落冲击的响应	62
4.3.3	易损零件的最大加速度	65
4.4	跌落冲击的产品破损边界曲线	67
4.4.1	易损零件的极限加速度	67
4.4.2	正弦半波脉冲的冲击谱	68
4.4.3	跌落冲击的产品破损边界曲线	68
4.5	产品脆值理论	70
4.5.1	矩形脉冲激励	70
4.5.2	易损零件对矩形脉冲的响应	72
4.5.3	矩形脉冲的冲击谱	75
4.5.4	矩形脉冲的产品破损边界曲线	76
4.6	包装件跌落冲击的强度条件	78
4.7	产品脆值测试	79
4.7.1	临界速度线的测试	79
4.7.2	临界加速度线的测试	79
4.8	国外的一些产品脆值标准	80
	思考题	81
5	材料缓冲特性曲线	82

5.1	研究跌落冲击问题的能量法	82
5.2	缓冲系数/最大应力曲线	84
5.2.1	$C-\sigma_m$ 曲线的概念	84
5.2.2	对数坐标应力轴	85
5.2.3	$C-\sigma_m$ 曲线的绘制	85
5.3	产品跌落冲击时的最大加速度	89
5.4	衬垫的面积与厚度公式	90
5.5	温度对材料缓冲特性的影响	92
5.6	箱内产品的触底问题	94
5.7	内外箱组合包装	96
5.8	最大加速度/静应力曲线	97
5.8.1	$G_m-\sigma_{st}$ 曲线的方程	97
5.8.2	$G_m-\sigma_{st}$ 曲线的测试	99
5.8.3	$G_m-\sigma_{st}$ 曲线的应用	100
5.8.4	缓冲衬垫厚度/面积取值范围的估算及基本步骤	103
5.9	关于包装件的角跌落校核	104
5.9.1	不同姿态的跌落试验	104
5.9.2	直方体的几何性质	105
5.9.3	衬垫的角跌落校核	105
	思考题	107
6	缓冲包装的五步设计法	108
6.1	确定冲击与振动环境	108
6.1.1	冲击环境	108
6.1.2	振动环境	112
6.2	确定产品的易损性	114
6.2.1	产品的冲击试验	114
6.2.2	产品的振动试验	118
6.3	选用适当的缓冲垫	119
6.3.1	缓冲材料	119
6.3.2	缓冲材料与产品特性的匹配	121
6.3.3	测试材料的缓冲特性曲线	123
6.3.4	按冲击环境计算衬垫厚度与面积	125
6.3.5	测试产品衬垫系统的幅频曲线	126
6.3.6	按振动环境校核衬垫面积与厚度	129
6.4	设计与创造原型包装	129

1 绪 论

1.1 防护包装

将各种工农业产品由生产者输送给消费者的过程称为产品流通过程。不论流通过程多么复杂，它总是由装卸、运输和储存三个基本环节组成的。为了方便装卸、运输和储存，绝大多数工农业产品都要经过包装形成包装件后才能投入流通过程。包装件是由内装产品、包装容器及其附属物经过封箱和捆扎组成的物体系统。例如电视机包装件，就是由箱内电视机、缓冲衬垫、瓦楞纸箱以及封口和捆扎材料组成的系统。如果包装不善，产品就有可能在流通过程中损坏。所谓损坏，指的是使产品降低甚至丧失它原有的价值的各种现象。由此可见，包装又具有保护内装产品、防止其损坏的功能，这种功能简称为包装的防护功能。以实现防护功能为主的包装称为防护包装。设计包装的防护功能应以经济为前提。所谓经济，意思是以最少的包装费用完善包装的防护功能，将产品在流通过程中的损失降低到最低限度，使产品通过包装能取得最佳的经济效益。正是“经济”这个前提促使人们将包装的防护功能视为一门科学而认真地进行研究。

这个以经济为前提的包装设计，就是国际安全运输委员会（ISTA）要求的“合理包装”设计。即以尽可能经济的方式，选用最合适的材料，使设计出的包装正好满足产品的防护需要，又能让产品用户和承运人能将产品的损坏降低到一个最合理的水平。图 1-1 给出了这种合理包装的示意。

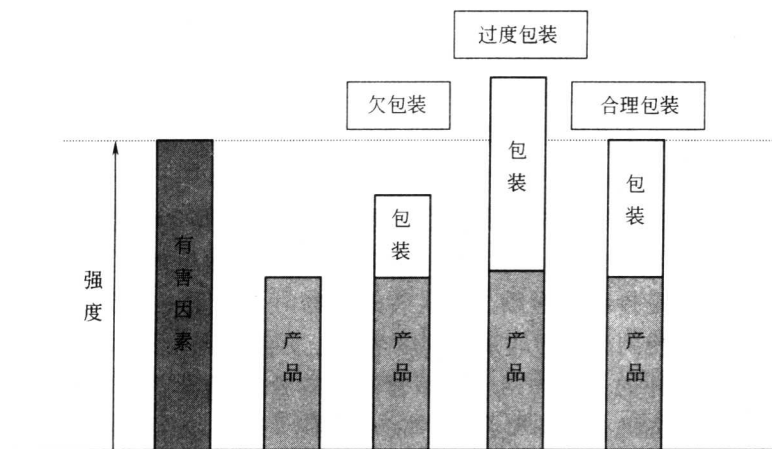


图 1-1 欠包装、过度包装和合理包装

从图 1-1 中可以看到，产品的耐破损强度一般都小于外界有害因素的强度。如果没包装的防护，产品将很快就会受到损坏。因此必需用外包装以提高产品的耐破损强度。如果包装提供的耐破损强度不足以抵消外界有害因素的强度，不能满足产品的防护要求，这种情况称为欠包装。如果使用的外包装过多，使其耐破损强度远大于外界有害因素的强度，虽然能够

满足产品的防护要求, 但将带来多余的成本消耗, 这种情况称为过度包装。只有当外包装提供的耐破损强度刚好抵消外界有害因素的强度, 则既可满足产品的防护要求, 又不会花费多余的成本。这就是合理包装。它是包装设计的最高境界。

流通过程中导致产品损坏的各种外因称为流通环境。通常产品遇到的环境有跌落、振动、冲击、温度、湿度、静压力、静电、大气压力等。产品固有的物理和化学性质称为产品特性。产品特性是导致产品损坏的内因。外因要通过内因才能起作用, 所以不同特性的产品在相同的流通环境下会产生不同形式的损坏。如瓷器由于受到振动与冲击而破碎, 食品由于微生物的作用而发霉和腐烂等, 都可以称之为损坏, 但是它们损坏的形式与机理是根本不同的。包装的防护功能研究产品特性、流通环境、产品损坏的形式与机理以及防止产品损坏的条件与方法。由于产品的损坏有多种形式, 因而包装的防护功能又有许多分支, 如缓冲减振、防锈、防霉、防腐、保鲜、防火防爆等。在防护功能的各个分支中, 最为人们关注的是包装的缓冲减振功能。这是因为在产品损坏的各种形式中, 由于振动与冲击而造成的破损最为常见, 由此而造成的经济损失在产品损坏的各种形式中居于首位。

破损是个力学概念。产品由于振动与冲击而损坏, 究其原因, 是产品受力太大。为了与其他形式的损坏区别开来, 将产品由于受力太大而引起的机械损坏称为破损。零部件的断裂、塑性变形、松动脱落等, 是产品破损的一些常见形式。

1.2 振动与冲击

物体在其平衡位置附近所作的来回往复运动称为机械振动, 简称振动。促使物体振动的各种外因称为激励, 而物体的振动则是对各种激励的响应。物体振动的内因是它具有一定的质量和弹性。物体振动时总会受到各种阻力, 如空气的阻力、材料的内阻、物体间的摩擦等。这些阻碍物体振动的因素统称为阻尼。物体的质量、弹性和阻尼决定了它的振动特性。不同的物体具有不同的振动特性, 因而在相同的激励下有不同的响应。物体突然受到短暂而又强烈的动态力作用时, 其运动状态在极短的时间内发生急剧的变化, 这种现象称为冲击。只有应用振动理论才能确切地分析物体受冲击时的运动规律, 所以冲击与振动属于同类问题。冲击与振动的区别在于激励的持续时间。相对物体的固有周期而言, 振动是长时间的持续激励引起的, 而冲击则是短暂的瞬态激励造成的。

各种工农业产品经过包装形成包装件后, 要用车、船、飞机输送到国内外市场去。车、船、飞机运行时都有明显的振动, 并通过包装将其振动传递给内装产品。就包装件而言, 车、船、飞机的振动就是持续的激励。工人装卸货物时, 由于不慎有可能造成包装件的跌落。落地的包装件突然受到地板的约束, 其运动状态发生急剧变化, 因而使内装产品受到强烈的冲击。地板对包装件的这种作用就是短暂的瞬态激励。各种机动车和装卸机械都有开车、停车和紧急刹车, 飞机有起飞和着陆, 轮船在海上航行时有可能遇到风暴, 铁路列车编组时也有强烈的撞击。在这些情况下包装件都会受到冲击, 内装产品的运动状态都会在极短时间内发生急剧的变化。

产品在流通过程中对各种激励的响应, 如位移、速度和加速度的变化, 既取决于外因, 又取决于自身的振动特性。产品振动时的加速度会产生惯性力, 即产生动载荷。如果作用在产品上的动载荷超过产品的强度极限, 产品就会破损。因此, 在一定的外界激励下, 产品是否破损既和它的振动特性有关, 又和它的强度特性有关, 其振动特性和强度特性决定了它抵

抗振动与冲击的能力。

产品经过包装形成包装件后,流通过程中的各种激励都要通过包装才能传递给内装产品。因此,对于内装产品来说,包装实质上是个减振装置。所谓缓冲减振设计,意思是已知产品特性和环境激励,设计“包装”这个减振装置的振动特性,使产品的响应不超过它的强度极限,目的是防止产品在流通过程中由于振动与冲击而破损。

1.3 包装动力学的研究对象与任务

缓冲包装的理论基础是包装动力学。包装动力学研究包装件对流通过程中的振动与冲击环境的响应,分析内装产品在振动与冲击环境激励下破损的原因,并在经济的前提下提出防止内装产品破损的条件,其任务是为缓冲包装设计提供理论依据。

产品种类繁多,结构复杂。通过理论计算解决产品的振动与冲击问题是非常困难的,甚至是不可能的。目前国外采用的缓冲包装的各种设计方法,都是以包装动力学为理论基础、以实验室试验为主要手段的实用型设计方法。因为以实验室试验为主要手段,所以包装动力学与包装测试技术有着不可分割的联系。环境激励的采样,产品脆值的测试,缓冲材料的静态与动态试验,产品、产品衬垫系统以及包装件的振动试验、包装件的跌落试验等,都离不开测试技术。包装动力学与包装测试技术的研究方向与研究范围是不同的。但是,本书作为大学本科教材,既要注重理论,又要强调实用,而且还要考虑学时和学生的数学力学基础。讲包装动力学就是讲理论,讲缓冲包装设计就是讲这种理论的应用。讲理论讲到什么程度呢?其深度与广度以满足缓冲包装设计为原则。这样就可以让出一部分篇幅,讲一些与缓冲包装有关的振动与冲击试验,提高学生解决缓冲包装问题的能力。至于有关的振动与冲击试验,只讲测试原理,不触及测试仪器与设备的构造、测试方法和测试数据的处理,使纳入的这些测试原理成为本书的一个有机的组成部分。

缓冲包装设计涉及的问题非常广泛,它不但要考虑缓冲减振,而且要求材料价格低廉,易于加工,便于装箱,包装废弃物易于处理,包装件的质量、形状、尺寸和结构便于装卸、储存和运输。严格地说,包装动力学是振动理论的一个分支,它只是从力学的角度阐明缓冲包装设计的一些基本原理。因此,包装动力学不等于缓冲包装设计,它不可能全面地讨论缓冲包装设计涉及的各种技术经济问题。

1.4 包装动力学发展简史

早在17世纪,古典力学的创始人,英国物理学家牛顿就曾经研究过物体对固定平面的碰撞,做了许多碰撞试验,并提出了碰撞恢复系数(回弹系数)的概念。时至今日,从国内外有关包装动力学的论著中,仍能清楚地看到碰撞理论的痕迹。虽说产品包装古已有之,甚至可以追溯到原始社会,但是,就包装动力学来说,其源头只能是牛顿的碰撞理论。

现代经济的迅猛发展使投入流通的产品数量越来越多,流通范围越来越大,产品在流通过程中的破损问题也越来越引起社会的关注。从力学角度分析产品破损问题的包装动力学就是在这种形势下应运而生的。

美国贝尔公司的明德林是人们公认的包装动力学的奠基人。1945年,明德林发表了他的著名论文“缓冲包装动力学”,受到世界许多国家的学术界与产业界的重视,在这篇著名

论文中,明德林提出了易损零件的概念,建立了包装件的力学模型——有支座的二自由度振动系统,分别按照线性和非线性缓冲垫两种情况,讨论了产品跌落冲击时的加速度时间曲线;引入了正弦半波脉冲的冲击谱,分析了易损零件的加速度,提出了评价包装件跌落冲击强度的基本方法。明德林的论文发表后,许多发达国家也以此为基础开展了缓冲包装的试验与研究。许多学者将包装件的跌落冲击问题纳入振动理论专著,许多世界著名的企业,如德国的西门子,日本的松下、日立等,都建立了自己的包装设计机构,装备了先进的试验仪器与设备。

半个世纪以来,随着经济的发展和科学技术的进步,人们对缓冲包装的研究也在不断深化。1952年,简森(R. R. Janssen)提出了缓冲材料的缓冲系数最大应力曲线。1961年,富兰克林(P. E. Franklin)又提出了最大加速度静应力曲线。应用这两种曲线设计缓冲衬垫,不但更接近材料的实际情况,而且计算公式非常简单,很快为广大工程技术人员所接受。1968年,美国的牛顿(R. E. Newton)以几种常用脉冲的冲击谱为基础,绘制出产品破损边界曲线,为采用程序控制的气垫冲击机的研制和完善产品脆值测试技术提供了理论依据。20世纪70年代末期,美国MTS公司和密西根大学总结半个世纪来缓冲包装的设计理论与经验,共同提出了包装的五步研制方法。五步研制法以包装动力学为基础,以实验室试验为主要手段,是一种实用的设计方法。这种设计方法理论上更加严谨,设计程序更加合理,试验项目、标准与测试手段更加完善,较之明德林时代是个很大的进步。20世纪80年代末期,美国Lansmont公司在五步法的基础上,又加入了“产品改进”一步,使缓冲包装设计 with 产品设计结合起来。

和世界各发达国家比较,我国的包装动力学研究起步较晚。直至1978年,湖南大学朱光汉教授才首次向国内介绍国外包装动力学及缓冲包装设计方面的一些基本情况。1987年1月,浙江大学奚德昌教授发起召开全国首次包装动力学学术讨论会,并在中国振动工程学会内成立了包装动力学学会,为推动我国的包装动力学和缓冲包装设计研究起了积极的作用。

经济的发展要求生产者不断地完善产品的包装,科学技术的进步又为生产者改进产品的包装不断地提供新的途径。因此,对包装动力学及缓冲包装设计的研究绝不会停留在现有水平,人们一定会随着经济的发展和科学技术的进步将这项研究不断地向前推进。

2 振动理论基础

物体在其平衡位置附近所作的来回往复运动称为机械振动,简称振动。产品经过包装形成包装件。以缓冲减振为主要功能的包装件是由内装产品、缓冲衬垫、瓦楞纸箱经过封箱或捆扎组成的振动系统,汽车、火车、轮船和飞机的振动就是这类包装件的振动环境。过于强烈的振动会导致产品破损。产品破损是从易损零件开始的,所以,研究包装件的振动,重点是分析易损零件对振动环境的响应,搞清缓冲衬垫的减振效果,目的是为缓冲包装设计提供理论依据。

2.1 单自由度系统的自由振动

将物块悬挂或者支承在弹簧上就构成最简单最直观的振动系统,这样的系统称为物块弹簧系统,如图 2-1 所示,(a) 为悬挂系统,(b) 为支承系统,以物块的平衡位置 O 为原点取 x 轴,并假设物块沿 x 轴作直线运动。系统振动时,只要知道物块的坐标 x ,整个系统在空间的位置就完全确定,所以将这样的系统称为单自由度系统。系统处于平衡时,如果没有外界的激励,它将保持平衡状态,不可能产生振动。外界激励又称干扰,它是系统振动的外因。系统振动的内因是它的质量与弹性。物块的质量很大,弹性很小,所以只考虑它的质量。弹簧的弹性很大,质量很小,所以只考虑它的弹性。弹簧受力后产生变形,力去除后变形随之消失。假设弹簧所受的力 F 与它的变形 Δ 成正比,即

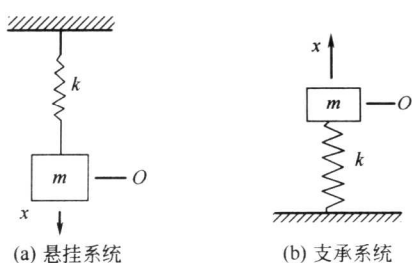


图 2-1 单自由度振动系统

$$F = k\Delta$$

这样的弹簧称为线性弹簧,比例常数 k 称为弹性常数,其单位为 N/m 。

2.1.1 无阻尼系统的自由振动

如果外界对振动系统的激励仅限于使物块产生初位移 x_0 和初速度 v_0 ,这样的激励称为初干扰。物块受到初干扰后在其平衡位置所作的往复运动称为自由振动,而在自由振动的过程中不存在外界激励。

图 2-2 中的物块弹簧系统处于平衡时,弹簧只受物块重力 mg 的作用,其变形 δ_{st} 称为静变形, l_0 是弹簧原长。根据线性假设,弹簧静变形应为

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad (2-1)$$

在系统作自由振动的任一瞬时 t ,物块位移为 x ,弹簧的弹性力为

$$F = k(x + \delta_{st})$$

且该力方向向上。不计系统振动时受到的各种阻力,根据牛顿第二定理,物块的运动微分方

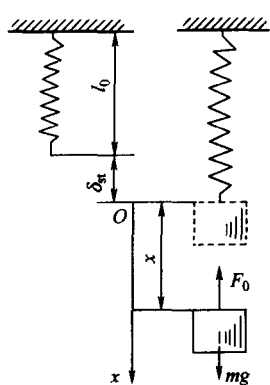


图 2-2 无阻尼自由振动的受力分析

程为

$$m \ddot{x} = mg - k(x + \delta_{st}) = -kx$$

令

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

就得到物块运动微分方程的标准形式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2-2)$$

式 (2-2) 有两个特解:

$$x_1 = \cos \omega t, \quad x_2 = \sin \omega t$$

这两个特解的线性组合就是式 (2-2) 的通解, 故

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

确定两个积分常数的初始条件为

$$t=0, \quad x=x_0, \quad \dot{x}=\dot{x}_0$$

由此得到

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

故

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

令

$$x_0 = A \sin \alpha$$

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega} = A \cos \alpha$$

就可以将物块作自由振动的运动规律表达为

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (2-3)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \quad (2-4)$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \quad (2-5)$$

式 (2-3) 表明, 物块的自由振动为简谐振动, 即位移 x 是时间 t 的正弦函数, 振动中心在平衡位置。A 称为振幅, 是物体偏离振动中心的最大距离, 它反映物块自由振动的强弱。 $(\omega t + \alpha)$ 称为相位角。 α 称为初相位, 是振动开始时的相位角。A 和 α 是由运动的初始条件决定的两个积分常数。图 2-3 为无阻尼自由振动的运动规律。

物块振动一次经历的时间 T 称为周期。时间每经历一个周期, 正弦函数的相位角增加 2π , 故

$$[\omega(t+T) + \alpha] - (\omega t + \alpha) = 2\pi$$

所以物块作自由振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-6)$$

物块每秒振动的次数称为频率, 用 f_n 表示, f_n 与 T 互为倒数, 即

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-7)$$

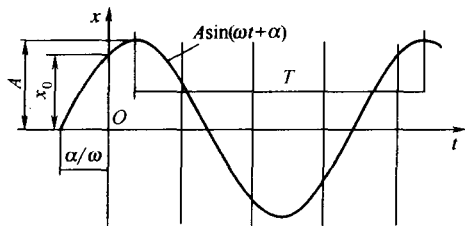


图 2-3 无阻尼自由振动的运动规律

物块在 2π 秒内振动的次数称为圆频率, 用 ω 表示, 且

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-8)$$

将式 (2-1) 代入式 (2-8), 又得

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (2-9)$$

式 (2-6)、式 (2-7)、式 (2-8) 表明, f_n 、 ω 和 T 只与系统质量 m 及弹性 k 有关, 与运动的初始条件无关, 是系统自身的固有特性。不论运动的初始条件如何, 物块作自由振动的频率和周期都一样, 所以将 f_n 与 ω 称为系统的固有频率, 将 T 称为系统的固有周期。

【例 2-1】 图 2-4(a) 是一根钢制矩形截面的悬臂梁, 横截面宽度 $b=10\text{mm}$, 厚度 $h=5\text{mm}$, 梁的长度 $l=6\text{cm}$, 钢的弹性模量 $E=200\text{GPa}$, 梁的自由端固定有一物块, 其质量 $m=0.5\text{kg}$, 试求物块在垂直方向作自由振动的固有频率与固有周期。

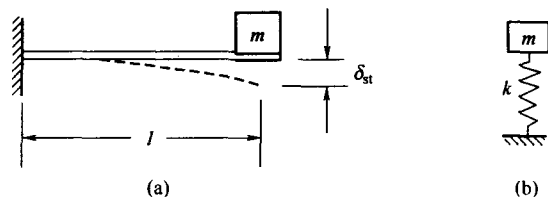


图 2-4 实际振动系统及其力学模型

解 图 2-4(a) 是实际的振动系统, 物块横向振动时梁的作用相当于一根弹簧,

因此将实际系统抽象为物块弹簧系统, 如图 2-4(b) 所示, 并将这个物块弹簧系统称为实际系统的力学模型。通过力学模型分析实际系统的振动更直观, 更便于计算。比较图 2-4 的 (a) 与 (b), 悬臂梁自由端在物块重力作用下的挠度相当于弹簧的静变形。梁的横截面惯性矩:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 5^3}{12} = 104 (\text{mm}^4) = 104 \times 10^{-12} (\text{m}^4)$$

悬臂梁自由端在物块重力作用下的挠度为:

$$\delta_{st} = \frac{mg l^3}{3EI} = \frac{0.5 \times 9.8 \times 6^3 \times 10^{-6}}{3 \times 200 \times 10^9 \times 104 \times 10^{-12}} = 0.017 \times 10^{-3} (\text{m})$$

物块在垂直方向自由振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.017 \times 10^{-3}}} = 759 (\text{rad/s})$$

物块在垂直方向自由振动的频率为

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{759}{2\pi} = 120.8 (\text{Hz})$$

物块在垂直方向自由振动的周期为

$$T = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{120.8} = 0.0083 (\text{s})$$

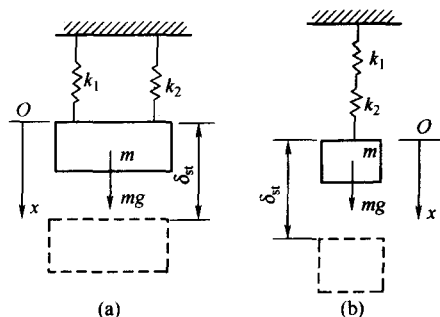


图 2-5 弹簧的并联与串联

【例 2-2】 图 2-5(a) 是由两根弹簧并联而组成的振动系统。图 2-5(b) 是由两根弹簧串联而组成的振动系统。试求这两种振动系统的固有频率。

解 (1) 当两根弹簧并联时 [图 2-5(a)], 在重力 mg 作用下, 每根弹簧的静变形 δ_{st} 相同, 于是重力的平衡条件 ($\sum X=0$) 可得

$$mg = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \delta_{st}$$

即

$$\frac{g}{\delta_{st}} = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

代入式 (2-9) 的固有频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

可见, 两根并联的弹簧与一根弹性常数为 $k = k_1 + k_2$ 的弹簧相当。所以, 将弹簧并联可增大系统的刚度, 提高系统的固有频率。

(2) 当两弹簧串联时 [图 2-5(b)], 在重力 mg 作用下, 每根弹簧的静变形虽不同, 但所受拉力均等于重力 mg 。所以

$$\delta_{st} = \delta_{st1} + \delta_{st2} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = mg \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \right)$$

即 $\frac{g}{\delta_{st}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, 代入式 (2-9) 的固有频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

可见, 两根串联的弹簧与一根刚度为 $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ 的弹簧相当。将弹簧串联, 将减小系统的刚度, 降低系统的固有频率。

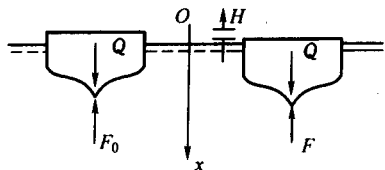


图 2-6 船与水构成的振动系统

【例 2-3】 图 2-6 所示为一在静水中的船舶。在平衡位置时, 重力 Q 与水的浮力 F_0 相平衡。当船偏离其平衡位置距离为 x 时, 重力 Q 与水的浮力 F 的共同作用使船产生上下振动, 求其固有频率。

解 根据 $\sum X = m\ddot{x}$, 得

$$Q - F = m\ddot{x}$$

即

$$Q - (F_0 + \gamma Sx) = m\ddot{x}$$

所以

$$m\ddot{x} = -\gamma Sx$$

式中, γ 为水的密度; S 为船在水线附近的水平截面积。

于是

$$\ddot{x} + \frac{\gamma S}{m}x = 0$$

固有频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma S}{m}}$$

【例 2-4】 木箱内悬挂有一个物块弹簧系统, 如图 2-7 所示。设木箱自高度 H 处自由跌落, 木箱落地后静止不动, 不计木箱与地板的变形, 试求木箱落地后箱内物块的运动规律。

解 以物块落地时的位置为原点, 向下取 x 轴, 从物块落地起开始计时。物块的落地速度与木箱相同, 为 $\sqrt{2gH}$ 。这个落地速度就是对物块弹簧系统的初干扰。因为木箱落地后静止不动, 而物块弹簧系统又存在初干扰, 所以这个系统落地后作自由振动。物块落地后作自由振动的初始条件为 $t=0$ 时, $x_0=0$, $\dot{x}=\sqrt{2gH}$ 。物块作自由振动的振幅与初相位的正切为

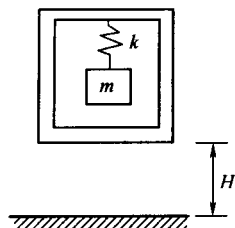


图 2-7 木箱中的物块弹簧系统



$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega}, \tan\alpha = 0$$

所以物块作自由振动的运动规律为

$$x = A \sin \omega t = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega} \sin \omega t$$

2.1.2 有阻尼系统的自由振动

振动系统振动时会受到各种阻力的作用，这些阻力的作用统称为阻尼。无阻尼自由振动是等幅的简谐振动，一经发生便永无休止。实际观察表明，自由振动的振幅是逐渐衰减的，经过一定时间后振动将完全停止。这是因为振动系统不可避免的存在着阻尼，它总是产生与系统振动方向相反的阻力，不断消耗初干扰输入系统的能量，使振动逐渐衰减直至消失。实际振动系统遇到的阻尼有各种不同的形式，如黏滞阻尼、干摩擦阻尼、材料的内阻等。在分析包装件的振动时，通常近似将各种阻尼都按黏滞阻尼处理，用阻尼器（图 2-8）作为各种阻尼的力学模型，并假设阻尼器产生的阻力与活塞对液缸的相对速度成正比，阻力的方向总是与相对速度的方向相反，这样的阻尼称为线性黏滞阻尼。

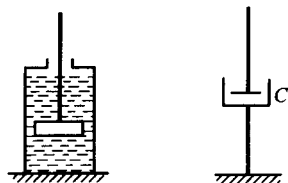


图 2-8 阻尼器

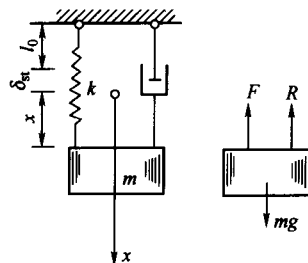


图 2-9 有阻尼自由振动的受力分析

图 2-9 是单自由度有阻尼系统的力学模型。物块作自由振动，在任一瞬时 t ，作用在物块上的力有重力 mg ，弹性力 $F = k(x + \delta_{st})$ 和阻尼器产生的阻力 $R = C\dot{x}$ 。 C 为阻力系数，其单位为 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。根据牛顿第二定律，物块的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = mg - F - R = -kx - C\dot{x}$$

令

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, 2n = \frac{C}{m}$$

就得到有阻尼自由振动的运动微分方程的标准形式

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2-10)$$

式中， ω 是物块弹簧系统的固有频率； n 为阻尼系数，其单位为 s^{-1} 。

设式 (2-10) 的特解为

$$x = e^{\lambda t} \quad (2-11)$$

将式 (2-11) 代入式 (2-10)，得

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0$$

故

$$\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

$n > \omega$ ，称为大阻尼； $n = \omega$ ，称为临界阻尼； $n < \omega$ ，称为小阻尼。在 $n \geq \omega$ 的条件下，物块受初干扰离开平衡位置后又缓慢回到平衡位置，不可能振动，所以这里只讨论小阻尼的情况。

因为 $n < \omega$, 故

$$\lambda = -n \pm j\sqrt{\omega^2 - n^2} \quad (2-12)$$

将式 (2-12) 代入式 (2-11), 得

$$x = e^{-nt} e^{\pm j\sqrt{\omega^2 - n^2}t}$$

将它按欧拉公式展开为

$$x = e^{-nt} (\cos\sqrt{\omega^2 - n^2}t \pm j\sin\sqrt{\omega^2 - n^2}t)$$

由此得到式 (2-10) 的两个特解

$$x_1 = e^{-nt} \cos\sqrt{\omega^2 - n^2}t$$

$$x_2 = e^{-nt} \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}t$$

将这两个的特解线性组合, 就得到式 (2-10) 的通解

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}t) \quad (2-13)$$

式中, C_1 、 C_2 是两个积分常数。令

$$C_1 = A \sin\alpha, \quad C_2 = A \cos\alpha$$

将式 (2-13) 改写为

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \alpha) \quad (2-14)$$

确定积分常数 A 、 α 的初始条件为

$$t=0 \text{ 时, } x=x_0, \quad \dot{x}=\dot{x}_0$$

由此求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(nx_0 + \dot{x}_0)^2}{\omega^2 - n^2}} \quad (2-15)$$

$$\tan\alpha = \frac{x_0 \sqrt{\omega^2 - n^2}}{nx_0 + \dot{x}_0} \quad (2-16)$$

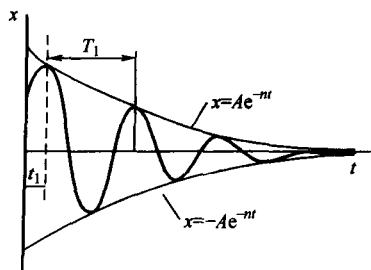


图 2-10 小阻尼衰减振动

式 (2-14) 就是小阻尼 ($n < \omega$) 的情况下物块的运动规律, 其图形如图 2-10 所示。因为

$$-1 \leq \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \alpha) \leq 1$$

所以物块的位移 x 被限制在两条曲线: $x = Ae^{-nt}$ 和 $x = -Ae^{-nt}$ 之间, 物块的振动随着时间的增加而逐渐衰减,

不再是等幅振动, 而是衰减振动。衰减振动虽然不是真正的周期性运动, 但它仍具有等时性, 因此物块来回往复一次所经历的时间仍然称为周期, 用 T_1 表示, 即

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \quad (2-17)$$

令

$$\zeta = \frac{n}{\omega} = \frac{C}{2m\omega} = \frac{C}{2\sqrt{mk}} \quad (2-18)$$

则

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2-19)$$

式中, ζ 称为阻尼比。对于小阻尼, $n < \omega$, $\zeta < 1$ 。式 (2-19) 表明, 由于阻尼的作用,