线性系统分析中的数学方法

国家计委地质局150工程
地震数字处理短训班编

1974年4月

序

本讲义暂时称为“线性系统分析中的数学方法”，因为一时找不到更合适的名称。它实际上包括下列内容：复变函数论初步（第一章到第四章）、频谱分析（第五章到第九章）、拉氏变换脉冲函数和线性系统分析初步（第十章到第十二章）。这些内容主要是为学习地震勘探数字技术中的滤波部分而准备的。由于考虑到另外一些因素，编入了一些参考章节，它们在节号前附有“*”号，忽略它们是不会对学习有所影响的。

由于我们的政治水平和业务能力都很低，教育革命的实践也不多，在时间上又很仓促，所以在内容上一定存在有不少错误和缺点。我们恳切地希望读者提出批评意见，帮助我们改进工作。

编　者

一九七四年四月

线性系统分析中的数学方法

目　　录

第一章　复数及其运算

§1.1　前言

自第一章到第四章主要介绍所需要的属于复变函数论的内容，在第一章先介绍复数及其运算，然后分别介绍复变函数、复变函数的导数、复变函数的积分以及级数等々。

为了要解方程

$$x^2+1=0,$$

人们引进了符号 $j=\sqrt{-1}$，*) 这样，上述方程就有解

$$x=\pm j.$$

因此对于一般二次方程

$$ax^2+bx+c=0,$$

它的解总有这样的表达形式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

由此人们就形式地认为一个二次方程总是有解的。但 $j=\sqrt{-1}$ 所能表示的实际意义在很長时期里未能明了，所以称 j 为虚数，而把 $x+jy$（其中 x、y 为实数）叫复数。虽然在微积分学初步建立之后，人们也考虑了以复数为变量的复变函数的微积分学，但都是形式的。直到生产的发展促使人们开始研究流体力学时，发现在流体力学中有好多问题可以与复变函数理论联系起来，此时人们才真正了解复变函数的实际意义；同时由于流

---

*) 为了与电学上的习惯一致，在这里 $\sqrt{-1}$ 用 j 表示，而在数学上，却是用 i 来表示的。

体力学的影响，复变函数才开始独立地成为一个数学分支。以后人们也发现复数及复变函数在电学上的应用。从那时起，复变函数不但已成为数学分析中的一个重要分支，而且也显示它在解决个质力学（流体力学、空气动力学和弹性力学）及电磁场的平面问题上的巨大威力。

§1.2　复数的各种表示法

在习惯上，总是把一个复数写成下列形式

$$Z = x + jy,$$

其中 x，y 都是实数，$j = \sqrt{-1}$，称实数 x 是 Z 的实数部分，记为 $Re(Z) = x$；称 y 为 Z 的虚数部分，记为 $Im(Z) = y$。称复数 yj 为纯虚数或虚数。

为了对复数有一个具体的几何了解，我们时常把复数看成平面上的点，把一个点用数来表示有几种方法，它们各有所长。因此一个复数也有几种表示方法。在这里介绍复数的直角坐标、极坐标及指数形式的表达式。

任一复数 $Z = a + jb$ 可以用直角坐标上的点（a，b）来代表。换句话说，把复数的实数部分作为点的横坐标，虚数部分作为点的纵坐标。例如虚数 j 就用 y 轴上的点（0，1）表示。依照这种方法，可以看到，对于每一个复数 Z，总能找到一点与之对应；反之，对应于给定的任一点（x，y），能得到一个复数 $x + jy$。这种关系在习惯上称为一一对应，也就是说，平面上所有的点（通过直角坐标系）与全部复数间建立起一一对应关系。今后不再严格地区分“复数”和“平面上的点”，例如我们将常说“点 $1+2$”，“顶点为 Z_1，Z_2，Z_3 的三角形”等々。今后也常称 x 轴为实轴，y 轴为虚轴，因为 x 轴和 y 轴分别与实数和虚数对应。这种表达方式称为复数直角坐标表示

法。

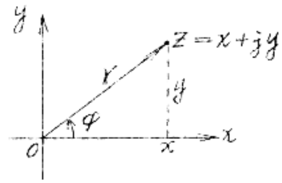

图1—1 复数的向量表示法

我们又知道，平面上每一点（a，b）可以对应一个向量，这个向量的始点是原点，而终点是（a，b）；反之，可以把自原点作出的向量对应于一点，此点即此向量的终点。这样就建立了平面上所有点与上述全部向量间的一一对应。因此也就使全部复数与向量间建立起一一对应关係。这种表示法称为复数的向量表示法（图1—1）。

现在来叙述复数的极坐标表示法。平面上任一点的直角坐标（x，y）和它的极坐标（r，φ）之间的关係是：

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ tg\varphi=\frac{y}{x}。\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi。\end{cases}$$

这样就有 $$z=x+jy=r\cos\varphi+jr\sin\varphi,$$

即 $$z=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$$

此即复数的极坐标表达式；常称r为复数Z的模（或称Z的绝对值），用记号$|Z|$表示。从图1—1可以看到，复数Z的模即是点Z到原点之间的距离，角φ称为复数Z的幅角，记为$Arg Z$。依照上面的公式有

$$|Z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0,$$

$$\mathrm{Arg}Z=\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}=\begin{cases}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+2k\pi,&（Ⅰ、Ⅳ象限），\\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x}+(2k+1)\pi,&（Ⅱ、Ⅲ象限）。\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots,$$

其中“arctg”表“Arctg”的主值，即大于$-\frac{\pi}{2}$而小于$\frac{\pi}{2}$的的那个值。今后也用“arg”表示“Arg”的某一确定值。由这两个公式可以得出结论：对于每一个复数Z，它的模是唯一的；而它的幅角可以差2π的整数倍。例如

$$\mathrm{Arg}(1+j)=\mathrm{Arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{Arg}(j)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{Arg}(-j)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1\cdots\cdots。$$

利用尤拉公式，

$$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi,$$

可以把复数的极坐标形式写成下面的形式：

$$Z=re^{j\varphi}=|Z|e^{j\mathrm{Arg}Z},$$

此称复数的指数表示法。

最后，着重指出，复数的各种表示法在各种不同的场合下各有优点，希望读者记住各种表示式的关系，并逐步了解在什么场合下用什么表示法比较简便。

§1.3 复数的四则运算

首先，我们说一个复数等于零，就是说它的实数部分和虚数部分都为零，即

$$Z=0\quad 即是\quad x=0,\ y=0$$

人之亦然。

当两个复数的实数部分和虚数部分相等时，就说这两复数相等。即假设有

$$z_1=x_1+jy_1,\qquad z_2=x_2+jy_2,$$

当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时，则$z_1=z_2$。反之，$z_1=z_2$，则$x_1=x_2$，$y_1=y_2$。

复数的相加同实数中的运算相似。设有两个复数$z_1=x_1+jy_1$，$z_2=x_2+jy_2$，则

$$z_1+z_2=(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)=$$
$$=(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)。$$

这说明两个复数相加只要把实数部分和虚数部分分别加起来就可以了，由于同样的道理，下列公式必然成立：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)。$$

至于两个复数相减，当然就把它们的实数部分和虚数部分分别相减就可以了。即

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+j(y_1-y_2),$$

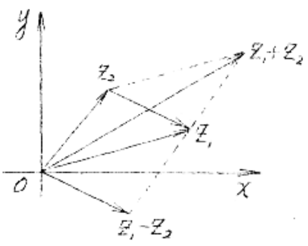

图 1-2 复数的向量加法

我们知道向量的加法可以用平行四边形的方法来做，也知道向量加法可以由其分量相加而成，这种方法与复数的相加类似。这样就可以几何地作出两个复数z_1，z_2的和与差（图1-2）。

利用三角形三边的关系，由图1-2可得

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|。$$

很明显，欲使二式内的等号成立，必须且只需 $\mathrm{Arg}\,Z_1=\mathrm{Arg}\,Z_2$。

两个复数相乘也可以当做实数运算来进行：

$$Z_1Z_2=(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)=$$
$$=x_1x_2+jx_1y_2+jy_1x_2+j^2y_1y_2。$$

因为 $j=\sqrt{-1}$，$j^2=-1$，故

$$Z_1Z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+y_1x_2)$$

这个式子表示了乘法的表达式。不难证明下面的几个公式仍然成立：

$$Z_1Z_2=Z_2Z_1,$$
$$(Z_1Z_2)Z_3=Z_1(Z_2Z_3)。$$
$$(Z_1+Z_2)Z_3=Z_1Z_3+Z_2Z_3。$$

两个复数的相除可依靠下列方法来做：

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{(x_2+jy_2)(x_2-jy_2)}=$$
$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+j(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+j\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}。$$

利用复数的极坐标形式来观察两个复数的相乘。设

$$Z_1=r_1(\cos\phi_1+j\sin\phi_1),$$
$$Z_2=r_2(\cos\phi_2+j\sin\phi_2)。$$

则

$$Z_1Z_2=r_1(\cos\phi_1+j\sin\phi_1)r_2(\cos\phi_2+j\sin\phi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2+$$
$$+j(\sin\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_2\cos\phi_1)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+j\sin(\phi_1+\phi_2)]$$

这说明了

$$|Z_1Z_2|=r_1r_2=|Z_1||Z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(Z_1Z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\operatorname{Arg}Z_1+\operatorname{Arg}Z_2。$$

这样就得到一个求Z_1Z_2的乘积的几何方法（图1—3）。把1代表x轴上点（1，0），作一个三角形$O1Z_2$，然后以OZ_1与$O1$对应，在OZ_1边上作一个与$O1Z_2$相似的三角形OZ_1A，A点即为所求Z_1与Z_2之乘积。因为由图1—3可以看出：

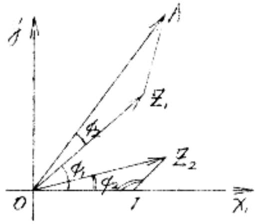

图1—3 复数乘法的几何作图

$$\operatorname{Arg}A=\varphi_1+\varphi_2=\operatorname{Arg}Z_1+\operatorname{Arg}Z_2，$$

另外，由于两个三角形相似，得

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OZ_2}}=\frac{\overline{OZ_1}}{\overline{O1}}，$$

因$\overline{OA}=|A|$，$|\overline{OZ_2}|=|Z_2|$ $|\overline{OZ_1}|=|Z_1|$，$\overline{O1}=1$。

故

$$\frac{|A|}{|Z_2|}=\frac{|Z_1|}{1}\text{即}|A|=|Z_1||Z_2|，$$

这就证明了 $$A=Z_1Z_2。$$

用同样方法可以证明

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}，\operatorname{Arg}\frac{Z_1}{Z_2}=\operatorname{Arg}Z_1-\operatorname{Arg}Z_2。$$

用复数的指数表示法也能得到同样的结果。

上面的结果可以推广。设n是正整数，并设$Z=re^{j\varphi}$，则

$$Z^n=(re^{j\varphi})^n=r^ne^{jn\varphi}，$$

亦即

$$[r(\cos\varphi+j\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+j\sin n\varphi)，$$

消去r^n就得

$$(\cos\varphi+j\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+j\sin n\varphi。$$

这个公式称棣莫弗公式，利用它可以得出三角函数的倍角公式。

例1　计算$(1-4j)(2+3j)$。

解

$$(1-4j)(2+3j)=2+3j-8j-12j^2=14-5j。$$

例2　计算$\frac{1+2j}{7-3j}$。

解

$$\frac{1+2j}{7-3j}=\frac{(1+2j)(7+3j)}{(7-3j)(7+3j)}=\frac{7+3j+14j+6j^2}{7^2+3^2}=$$

$$=\frac{1+17j}{58}=\frac{1}{58}+j\frac{17}{58}。$$

例3　计算$\frac{1}{j}$。

解

$$\frac{1}{j}=\frac{j}{jj}=\frac{j}{-1}=-j。$$

例4　试用极坐标表示法及指数表示法表示$1+j\sqrt{3}$，并由此计算$(1+j\sqrt{3})^3$。

解　因为

$$r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2，$$

$$tg\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}，即\ \theta=\frac{\pi}{3}，$$

所以

$$1+j\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3})=2e^{j\frac{\pi}{3}}，$$

$$(1+j\sqrt{3})^3=(2e^{j\frac{\pi}{3}})^3=8e^{j\pi}=-8。$$

最后，我们来求复数Z的n次根，即$\sqrt[n]{Z}$。

设　$w=\sqrt[n]{Z}$　也就是$w^n=Z$，令

$$Z=|Z|(\cos\theta+j\sin\theta)，$$

$$w=|w|(\cos\varphi+j\sin\varphi)，$$

$$tg\theta=\frac{1}{1}=1\text{，即}\theta=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

所以

$$1+j=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}\right)\text{。}$$

因此

$$\sqrt{1+j}=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+j\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),$$
$$k=0,1\text{。}$$

即

$$\sqrt{1+j}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+j\sin\frac{\pi}{8}\right)\text{及}$$
$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+j\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

而

$$\sqrt[4]{1+j}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+j\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)=$$
$$=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right],$$

其中$k=0,1,2,3$。

§1·4 共轭复数

在長期的使用中，人們发現在复数$Z=x+jy$的运算中引入另一个复数$x-jy$有很大的方便。这正如我們在除法中作过的那样。$x-jy$称为$Z=x+jy$的共轭复数，記作$\bar{Z}$。从几何上看，一个复数和它的共轭复数是关于实轴对称的两点。

共轭复数有下列一些性質，其中大部分都是很显然的。

1、$\overline{(\bar{Z})}=Z$。

2、$Z\bar{Z}=|Z|^2$。

因为 $Z\overline{Z}=(x+jy)(x-jy)=x^2+y^2=|Z|^2$。

3、$|Z|=|\overline{Z}|$。

4、$\overline{Z_1\pm Z_2}=\overline{Z}_1\pm\overline{Z}_2$。

5、$\overline{(Z_1Z_2)}=\overline{Z}_1\overline{Z}_2$。

6、$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$。

7、$Z+\overline{Z}=2x=2Re(Z)$。

8、$Z-\overline{Z}=2jy=2jI_m(Z)$。

§1.5 平面上的曲线及场的复数表示法

我们知道，平面上的曲线一般是由方程 $y=f(x)$ 或参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 来表示。既然复数 $Z=x+jy$ 与平面上的点成一一对应，故平面上的曲线可以用复数表示。例如，我们知道，$y=5x+6$ 是一条直线方程，则

$$Z=x+jy=x+j(5x+6)。$$

就是这条直线方程的复数形式。又如，$x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，是一个圆的方程，故

$$Z=x+jy=R\cos\theta+jR\sin\theta=Re^{j\theta},$$
$$0\leqslant\theta\leqslant2\pi。$$

就是这个圆的复数形式。

一般，若曲线方程用参数形式表示，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则这个曲线的复数形式为

$$Z=\varphi(t)+j\psi(t)。$$

但是从几何观点也可以得到平面上曲线方程的复数形式。例如，设用 Z 表示以原点为圆心，以 R 为半径的圆周上的点，则这些复数的模必然等于 R，而不在圆周上的点的复数的模不

是大于R就是小于R，故

$$|z|=R$$

就代表这个圆周的复数方程。相似地，若圆心不是在原点而是z_0点，则此方程为

$$|z-z_0|=R \text{。}$$

下面我们来研究方程

$$|z-a|=|z-b|$$

代表什么样的曲线。等式左边表示曲线上的点z与点a的距离，而等式右边表示点z与点b的距离；这个方程告诉我们曲线上的点z与两点a，b间的距离是相等的，因此可以知道，这个方程表示a，b两点间联线的垂直平分线。

另外，方程

$$|z-1|=2|z+2|$$

代表什么曲线呢？直接用几何观点来考虑似乎困难一些，可以用代数方法来解决。设$z=x+jy$，则因

$$|z-1|=|x+jy-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$
$$|z+2|=|x+jy+2|=\sqrt{(x+2)^2+y^2},$$

故上式可写成

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2},$$

即
$$(x-1)^2+y^2=4[(x+2)^2+y^2] \text{。}$$

整理后，得

$$3x^2+18x+3y^2+15=0 \text{。}$$

这是一个圆的方程。

依上面的思考方法，容易知道，$\arg z=\frac{\pi}{4}$就表示与实轴相交成$\frac{\pi}{4}$的半射线；而$Re(z)>3$，即$x>3$，表示平面上