

北京印刷学院特色教材

高等数学学习题解答与同步练习

朱晓峰 杨莉军 编著



北京艺术与科学电子出版社

北京印刷学院特色教材

高等数学习题解答与同步练习

朱晓峰 杨莉军 编著

北京艺术与科学电子出版社

高等数学习题解答与同步练习

朱晓峰 杨莉军 编著

责任编辑：王一宾

封面设计：张 晨

版式设计：新兴工作室

出版发行：北京艺术与科学电子出版社

地 址：北京市大兴区黄村镇兴华北路 25 号

电 话：010-61265727

邮 编：102600

网 址：www.bjasep.com

字 数：200 千字

版 次：2012 年 7 月第 1 版

印 次：2012 年 7 月第 1 次印刷

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的配套用书。主要分两部分,第一部分是普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的习题全解,包括各章节的习题与总习题及解答。第二部分是配合普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的同步学习指导。

前言

高等数学是工科类高职高专学生的一门基础理论课,是培养学生基本素质的重要课程之一,它对培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力,以及综合运用所学知识来分析和解决问题的能力有着重要作用。

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的配套用书,主要是为学习高等数学的大专或高职学生提供一本解题和学习指导参考书,也可以供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书主要分两部分,第一部分是普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的习题全解,包括各章节的习题与总习题及解答。在解答中,解题过程尽量详尽,并配有图示,以便更好地辅助学生的学习。第二部分是配合普通高等教育“十一五”国家级规划教材(盛祥耀主编)《高等数学》(第四版)的同步辅导,每章节主要包括教学内容与要求、重要定义定理及公式、基础巩固题、能力提高题、综合拓展题、单元练习、单元练习答案、单元自测题、单元自测题参考答案等内容。教学内容与要求和重要定义定理及公式这两模块能够帮助学生梳理每章的主要内容、重点、难点、重要定义、定理及公式。基础巩固题、能力提高题、综合拓展题、单元练习和单元自测题是按照从易到难的顺序编写的同步练习题,读者可以根据自己的能力和学习不同阶段选择相应的模块进行练习,巩固所学知识。

本书为学习高等数学的大专或高职学生提供一个解题和学习指导参考书,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

由于编者水平有限,书中难免有错误不妥之处,欢迎读者批评指正。

本书由北京印刷学院朱晓峰和杨莉军编写,是北京印刷学院的特色教材。在编写和出版过程中,得到北京市属高等学校人才强教计划项目(PHR201107145)、北京印刷学院校级重点项目(Ea201231)资助。

目 录

第一篇 高等数学习题解答篇

第一章	空间解析几何 向量代数	2
第二章	函数极限连续	22
第三章	微分学	49
第四章	积分学	87
第五章	微分方程	141
第六章	无穷级数	165

第二篇 高等数学同步练习篇

第一章	空间解析几何 向量代数	190
第二章	函数极限连续	212
第三章	微分学	238
第四章	积分学	273
第五章	微分方程	303
第六章	无穷级数	315
综合练习题及答案		341

第一篇

高等数学习题解答篇



第一章 空间解析几何 向量代数

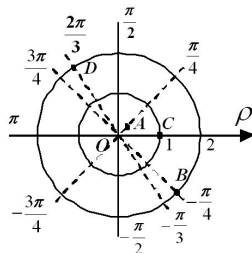
习题解答

教材 P8

1. 指出下列各点在极坐标系中的位置:

A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; B. $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$;

C. $(-1, \pi)$; D. $\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$.



解: A, B, C, D 四点在极坐标系中的位置如图所示.

2. 将下列在直角坐标系中的曲线方程转化为极坐标方程.

(1) $x^2 + y^2 = -2Ry (R > 0)$; (2) $x^2 + y^2 = 4x$; (3) $x^2 + y^2 + x + y = 0$.

解: (1) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入方程, 得 $(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = -2R\rho \sin \theta$,

化简整理得极坐标方程 $\rho = -2R \sin \theta$.

(2) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入方程, 得 $(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = 4\rho \cos \theta$, 化

简整理得极坐标方程 $\rho = 4 \cos \theta$.

(3) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入方程, 得 $(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 + \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 0$,

化简整理得极坐标方程 $\rho = -(\cos \theta + \sin \theta)$.

3. 试作下列极坐标方程的图形.

(1) $\rho = 4(1 - \cos \theta)$; (2) $\rho = 1 + \sin \theta$;

(3) $\rho = 2(1 - \sin \theta)$; (4) $\rho = 2$; (5) $\theta = \frac{\pi}{4}$.

解:(1)因为将 θ 换成 $-\theta$ 方程不变,所以图形关于极轴对称,列表

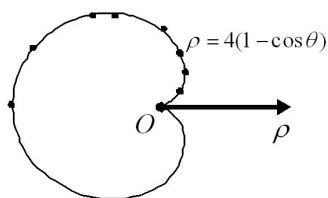
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	0	0.54	1.17	2	4	6	5.66	7.46	8

图形如图 2(1)所示.

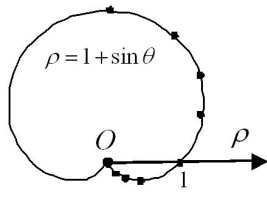
(2)因为将 θ 换成 $\pi - \theta$ 方程不变,所以图形关于射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称,列表

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	0.13	0.29	0.5	1	1.5	1.71	1.87	2

图形如图 2(2)所示.



2 (1) 题



2 (2) 题

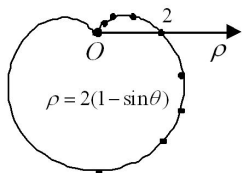
(3)因为将 θ 换成 $\pi - \theta$ 方程不变,所以图形关于射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称,列表

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	4	3.74	3.42	3	2	1	0.58	0.26	0

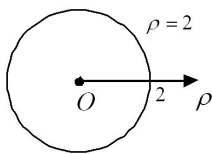
图形如图 2(3)所示.

(4)半径为 2,圆心在极点的圆.如图 2(4).

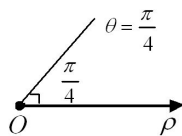
(5) θ 为 $\frac{\pi}{4}$ 的半射线.图形如图 2(5).



2(3) 题



2(4) 题



2(5) 题

4. 写出下列各方程的参数方程.

$$(1) \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (2) x^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad (a > 0);$$

$$(3) x^2 + y^2 = 2x.$$

解: (1) 令 $x-a = a \cos t$, 即 $x = a(1 + \cos t)$, 并代入原方程解得 $y = b \sin t$ (也可以取 $y = -b \sin t$), 所以参数方程为

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos t), \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

(2) $x = a \cos t$, 并代入原方程 $a^2 \cos^2 t + (y-a)^2 = a^2$, 解得 $y = a + a \sin t$ (也可以取 $y = a - a \sin t$), 所以参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a + a \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

(3) (方法一) 整理得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$. 令 $x-1 = \cos t$, 并代入上式解得 $y = \sin t$ (也可以取 $y = -\sin t$), 所以参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

(方法二) 令 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 代入原式解得 $\rho = 2 \cos \theta$, 所以参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 \cos^2 \theta, \\ y = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

5. 试计算下列各行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 8a-9b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}.$$

解: (1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \times 1 - 5 \times 3 = -8.$

(2) $\begin{vmatrix} 8a-9b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix} = (8a-9b) \times (-3b) - (-6a) \times 2$
 $= -24ab + 27b^2 + 12ab = 27b^2 - 12ab.$

(3) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} = 10 \times \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 32 & 12 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 20 & 12 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 15 & 12 \\ 20 & 32 \end{vmatrix}$
 $= 10 \times 48 - 8 \times 120 + 2 \times 240 = 0.$

(4) $\begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos \theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} = \cos \theta \times \begin{vmatrix} 2\cos \theta & 1 \\ 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} - 1 \times$
 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\cos \theta \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2\cos \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
 $= \cos \theta (4\cos^2 \theta - 1) - 2\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \cos 3\theta.$

教材 P10

6. 问在 yz 坐标面上的点的坐标有什么特点?

解: 在 yz 坐标面上点的坐标具有特点是 x 坐标为 0, 形如 $P(0, b, c)$.

7. 问在 xy 坐标面上的点的坐标有什么特点?

解: 在 xy 坐标面上点的坐标具有特点是 z 坐标为 0, 形如 $Q(a, b, 0)$.

8. 问在 x 轴上的点的坐标有什么特点?

解: 在 x 坐标面上点的坐标具有特点是 y 坐标和 z 坐标都为 0, 形如 $R(a, 0, 0)$.

9. 自点 $P(a, b, c)$ 分别作各坐标面的垂线, 写出各垂足的坐标.

解: 在 xy 坐标面上的垂足坐标为 $P_1(a, b, 0)$,

在 yz 坐标面上的垂足坐标为 $P_2(0, b, c)$,

在 xz 坐标面上的垂足坐标为 $P_3(a, 0, c)$.

10. 设点 P 在第一卦限上, OP 方向与三个坐标轴的正方向成等角 α (不超过 π), 且 OP 的长度为 l , 试写出 P 的坐标.

解: 因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

所以 P 的坐标为 $(-\frac{l}{\sqrt{3}}, -\frac{l}{\sqrt{3}}, -\frac{l}{\sqrt{3}})$ 或者 $(\frac{l}{\sqrt{3}}, \frac{l}{\sqrt{3}}, \frac{l}{\sqrt{3}})$.

11. 求点 $P(2, -1, 0)$ 到各坐标轴的距离.

解: 过 P 点分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 依次得三个垂足 $P_1(2, 0, 0)$, $P_2(0, -1, 0)$, $P_3(0, 0, 0)$, 由两点间距离公式得,

$$P \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } |PP_1| = \sqrt{(2-2)^2 + [0-(-1)]^2 + (0-0)^2} = 1;$$

$$P \text{ 到 } y \text{ 轴的距离为 } |PP_2| = \sqrt{(0-2)^2 + [-1-(-1)]^2 + (0-0)^2} = 2;$$

$$P \text{ 到 } z \text{ 轴的距离为 } |PP_3| = \sqrt{(0-2)^2 + [0-(-1)]^2 + (0-0)^2} = \sqrt{5}.$$

12. 求下列各对点之间的距离:

$$(1) (2, 3, 1), (2, 7, 4); \quad (2) (4, -1, 2), (-1, 3, 4);$$

$$\text{解: } (1) d_1 = \sqrt{(2-2)^2 + (7-3)^2 + (4-1)^2} = 5;$$

$$(2) d_2 = \sqrt{(-1-4)^2 + [3-(-1)]^2 + (4-2)^2} = 3\sqrt{5}.$$

13. 在 xy 坐标面上找一点, 使它的 x 坐标为 1, 且与点 $(1, -2, 2)$ 和点 $(2, -1, -4)$ 等距.

解: 设所求点的坐标为 (x, y, z) , 该点与点 $(1, -2, 2)$ 和点 $(2, -1, -4)$ 等距, 所以

$$\sqrt{(x-1)^2 + [y-(-2)]^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 + [z-(-4)]^2}.$$

因为该点在 xy 坐标面上, 所以 $z=0$; 因为该点的 x 坐标为 1, 所以 $x=1$;

将 $x=1, z=0$ 代入上式, 解得 $y=5$, 所以该点坐标为 $(1, 5, 0)$.

教材 P17

14. 问下列方程各表示什么曲面:

(1) $x=b$; (2) $y=0$; (3) $y=c$.

解: (1) 若 $b \neq 0$, 则 $x=b$ 为平行于 yz 坐标面的平面; 若 $b=0$, 则 $x=0$ 为 yz 坐标面.

(2) $y=0$ 为 xz 坐标面.

(3) 若 $c \neq 0$, 则 $y=c$ 为平行于 xz 坐标的平面; 若 $c=0$, 则 $y=0$ 为 xz 坐标面.

15. 求出下列方程所表示的球面的球心坐标与半径:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z + \frac{5}{4} = 0$;

(2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x = 0$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$.

解: (1) 将原方程化为 $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = 2^2$,

所以球面的球心坐标为 $(-2, 1, -\frac{1}{2})$, 半径为 2.

(2) 将原方程化为 $(x-\frac{1}{4})^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{4})^2$,

所以球面的球心坐标为 $(\frac{1}{4}, 0, 0)$, 半径为 $\frac{1}{4}$.

(3) 将原方程化为 $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{5})^2$,

所以球面的球心坐标为 $(-1, 0, 2)$, 半径为 $\sqrt{5}$.

在题 16~23 中, 方程各表示什么曲面? 回答并作简图.

16. $4x^2 + y^2 = 1$.

解: 因为方程中缺少 z , 所以该方程表示母线平行于 z 轴的柱面. 因为其准线为 xy 面上的椭圆, 所以其表示为椭圆柱面 (如图 16).

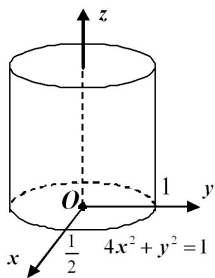
17. $x^2 + y^2 = 2x$.

解: 因为方程中缺少 z , 所以该方程表示母线平行于 z 轴的柱面. 因为其

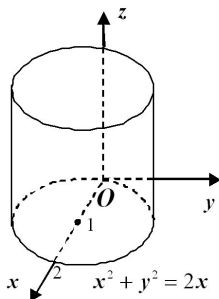
准线为 xy 面上的圆, 所以其表示为圆柱面(如图 17).

$$18. y^2 = 1.$$

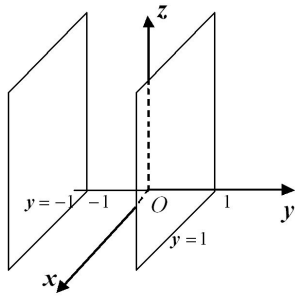
解: 方程化为 $y=1$ 和 $y=-1$, 所以方程表示两个平行于 xz 坐标面的平面(如图 18).



16 题



17 题



18 题

$$19. 4x^2 - z^2 = 1.$$

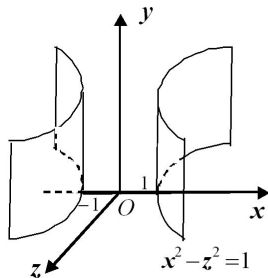
解: 方程中缺少 y , 所以该方程表示母线平行于 y 轴的柱面. 因为其准线为 xz 面上双曲线, 所以其表示为双曲柱面(如图 19).

$$20. 3y^2 + z^2 = 4.$$

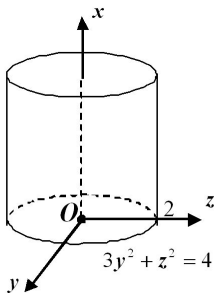
解: 因为方程中缺少 x , 所以该方程表示母线平行于 x 轴的柱面. 因为其准线为 yz 面上的椭圆, 所以其表示为椭圆柱面(如图 20).

$$21. x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

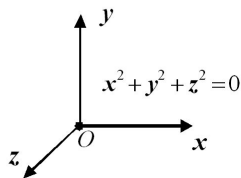
解: 因为方程可化为 $x=y=z=0$, 所以该方程表示一个点 $(0,0,0)$, 即坐标原点(如图 21).



19 题



20 题



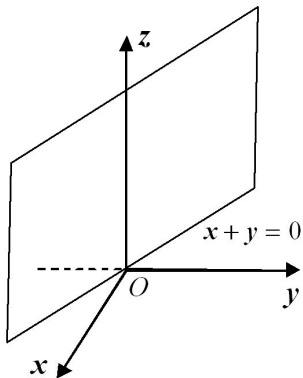
21 题

22. $x + y = 0$.

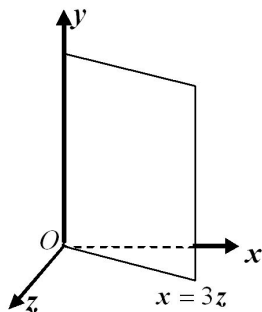
解: 因为方程中缺少 z , 所以该方程表示母线平行于 z 轴的柱面. 因为其准线为 xy 面上过原点的直线, 所以其表示为过 z 轴的平面 (如图 22).

23. $x = 3z$.

解: 因为方程中缺少 y , 所以该方程表示母线平行于 y 轴的柱面. 因为其准线是 xz 面上过原点的直线, 所以其表示为过 y 轴的平面 (如图 22).



22 题



23 题

在 24~31 题中方程组各表示什么曲线?

24.
$$\begin{cases} x = 3, \\ y + 2z^2 = 0. \end{cases}$$

解: 因为 $y + 2z^2 = 0$ 表示母线平行于 x 轴的抛物柱面, 而 $x = 3$ 表示平行于 yz 坐标面的平面, 所以原方程组表示在平面 $x = 3$ 上的抛物线.

25.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

解: 将原方程组化为 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 3, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以原方程组表示圆柱面, $x^2 + z^2 = 3$

与 $y = 1$ 平面的交线, 即它表示平面 $y = 1$ 上半径为 $\sqrt{3}$ 的圆.

26.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x = 1. \end{cases}$$

解:由原方程组解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$ 因为 $x=1, y=1$ 分别表示平行于

yz 坐标面和 xz 坐标面的两个平面,所以 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 表示平行于 z 轴的直线,

同理, $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$ 也表示平行于 z 轴的直线.

$$27. \begin{cases} z=3x^2, \\ y=1, \end{cases}$$

解:因为 $z=3x^2$ 表示母线平行于 y 轴的抛物柱面,而 $y=1$ 表示平行于 xz 坐标面的平面,所以它表示在平面 $y=1$ 上的抛物线.

$$28. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 5. \end{cases}$$

解:因为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表示球心在原点,半径为 1 的球面,而 $x=5$ 表示垂直 x 轴,且与原点距离为 5 的平面,所以二者不能相交,即它不表示任何图形.

$$29. \begin{cases} y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

解:因为 $y=1$ 和 $z=1$ 分别表示平行于 xz 坐标面和 xy 坐标面的两个平面,所以二者的交线是平行于 x 轴的直线.

$$30. x^2 + y^2 = 0.$$

解:由于方程可化为 $x=0$ 且 $y=0$,所以它表示 yz 坐标面和 xz 坐标面的交线,即表示 z 轴.

$$31. \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ y=0. \end{cases}$$

解:将方程组可化为 $\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 1, \\ y=0, \end{cases}$ 因为 $x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ 表示母线平行于 y 轴

的椭圆柱面,而 $y=0$ 表示 xz 坐标面,所以原方程组表示 xz 坐标面上的椭圆.

教材 P24

在 32~35 题中, a, b 均为非零向量, 这些等式在什么条件下成立?

$$32. |a+b| = |a-b|.$$

解: 由向量模和向量的运算可得, $a \perp b$.

$$33. |a+b| = |a| + |b|.$$

解: 由向量模和向量的运算可得, a 与 b 同向.

$$34. |a+b| = ||a| - |b||.$$

解: 由向量模和向量的运算可得, a 与 b 反向.

$$35. \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}.$$

解: 由向量模和向量的运算可得, a 与 b 同向.

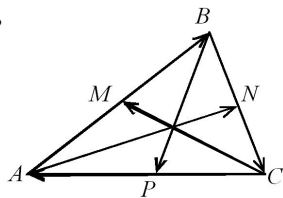
36. 设 M, N, P 分别为 $\triangle ABC$ 的三个边 AB, BC, CA 的中点, 已知 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, $\overrightarrow{CA} = c$, 求 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CM}$.

解: 因为 N 是 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} b$,

由三角形法则, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = a + \frac{1}{2} b$,

同理 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} = b + \frac{1}{2} c$,

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = c + \frac{1}{2} a.$$



36 题

37. 设 $P_1(2, 1, -1)$, $P_2(0, 2, -4)$, $P_3(3, 0, 0)$, 求 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$ 的坐标表达式.

解: $\overrightarrow{OP_1} = 2i + j - k$, $\overrightarrow{OP_2} = 2j - 4k$, $\overrightarrow{OP_3} = 3i$.

38. 设 $a = i + 2j - 2k$. 求 $|a|$ 即 a 的方向余弦.

解: 模 $|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$,