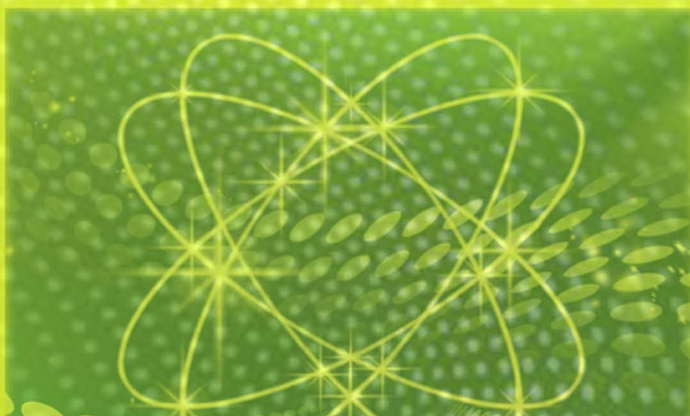
几 何

复旦附中数学教研组　编



复旦大学出版社

几　　何

复旦附中数学教研组　编

復旦大學出版社

序

经过近60年坚韧不拔的努力，复旦大学附属中学已经初步发展成为一所特色鲜明、国际闻名的示范性品牌高中.很多国内外著名学校的师生、校长来复旦附中交流访问，在听课、座谈、参观之后，都提出希望能得到一套复旦附中的校本教材，以深入研究“复旦附中现象”.确实，通过教材，可以了解我们的办学思想、课程设置以及教学的设计、结构、内容与要求等等.在2005年，我们曾经出过一套六本“校本课程选辑”，受欢迎的程度还是比较乐观的.在此基础上，我们计划在2008—2009年里再出一批.其目的主要有三：一、编写的过程就是笔者学习思考的过程，可以提炼教师的专业水平和研究教学的能力，把他们个体手中的备课笔记整合成教研组集体的“讲义”(学校不可能出版“教材”)，同时可以解决上课时多媒体技术使用日益频繁给学生记笔记带来不便等新问题，更方便他们自主学习(如预习和复习等)；二、在提倡对通用教材二次开发的今天，各学校自编的校本教材五花八门、千姿百态，为便于同兄弟学校交流、分享教改成果，我们也应该出版一些基本成型的“讲义”；三、我们认为，这也是在记录我校教育发展的历程，透过这些书面的资料，促使我们自身理性地观察和对待学校近年的教育教学改革，积极推动高中素质教育的振兴，帮助我们不断迈向卓越.

已经或将陆续出版的这套《复旦大学附属中学“大视野”教育书系》，其宗旨在于“凸显教育眼光的开阔和深远，体现通识教育的理念”，也是对复旦附中教师长年教育教学实践智慧的总结，是真正意义上的“校本”.尤其是展现了复旦附中师生的教与学水平和教育方式方法，可以说，呈现给大家的是一份真切的“实惠”.但对某些学校而言未必适用，仅供参考之用.另外，限于编辑时间和各自的理解能力，我们展现给大家的只是部分思考心得，更多的切入点有待我们进一步挖掘，这是我们的愿望及努力方向.书中的疏漏之处，还望读者指正！

谢应平

2008年7月22日

目录

第一篇 立体几何

第二篇　解析几何

第一篇　立体几何

第 1 章
空间直线与平面

1.1 平面的性质

立体几何研究空间图形的性质和度量，点、直线、平面是立体几何研究的基本对象. 常见的桌面、黑板面、光滑的镜面等，都给我们以“平”的印象，几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的，但是，几何里的平面是向各个方向无限延伸的. 在画一个平面时，一般把它画成一个平行四边形. 当平面水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍(图 1-1). 当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住的部分画成虚线或不画(图 1-2)，这样的立体感强一些.

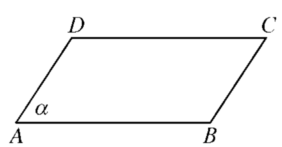


图 1-1

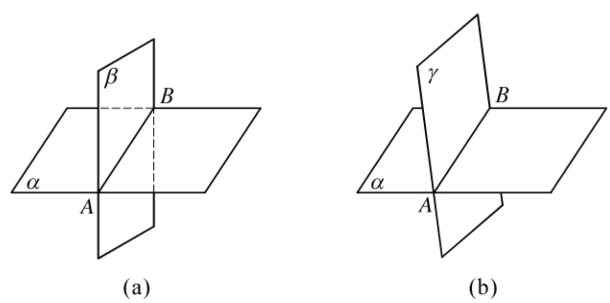


图 1-2

平面通常用一个希腊字母来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等(图 1-2)，也可以用表示平行四边形的四个顶点或两个相对顶点来表示，如平面 $ABCD$、平面 AC 等(图 1-1).

为了表达的方便，直线、平面可以看作是点的集合，它们之间的关系可以借用集合的记号. 点与直线的位置关系有点在直线上、点在直线外两种. 点 A 在直线 l 上，记作 $A \in l$；点 A 在直线 l 外，记作 $A \notin l$. 点与平面的位置关系有点在平面内、点在平面外两种. 点 A 在平

面 α 内，记作 $A \in \alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$. 直线 l 与直线 m 相交于点 A，记作 $l \cap m = A$.

在长期的生产实践和数学的发展中，人们意识到，研究立体几何应从以下基本事实(称之为公理)出发，把它们作为进一步推理的基础.

公理 1　如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

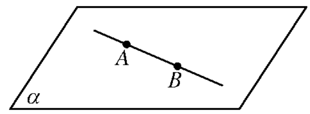


图 1-3

这时，我们说直线在平面内，或平面经过直线(如图 1-3). 直线 l 在平面 α 内，记作 $l \subset \alpha$.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有一条通过这个点的公共直线(图 1-4).

如果平面 α 与平面 β 有一条公共直线 l，则称平面 α 与平面 β 相交，交线为 l，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

例如，教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线.

公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且仅有一个平面.

经过 A, B, C 三点的平面记作“平面 ABC”. 公理 3 也可以表述为“不在同一直线上的三点确定一个平面”.

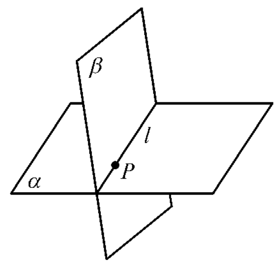


图 1-4

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

根据上述公理，可以得到以下推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外一点，有且仅有一个平面(图 1-5(a)).

证明　设 A 是直线 l 外的一点，在 l 上任取两点 B, C. 由公理 3，A, B, C 三点可以确定一个平面，记为 α. 因为点 B, C 都在平面 α 内，由公理 1，直线 l 在平面 α 内.

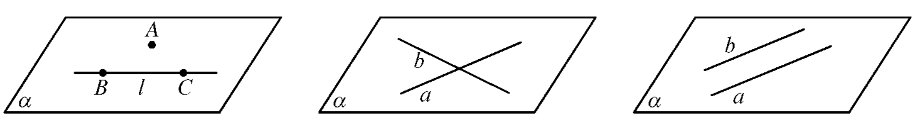
若经过点 A 和直线 l 还有一个平面 β，则点 B, C 也在平面 β 内，这样，经过不共线的三点 A, B, C 就有两个不同的平面 α, β，与公理 3 矛盾. 所以，推论 1 成立.

因此，若两个平面有一个公共点，则它们有且仅有一条经过该点的公共直线.

类似地，可以得到以下两个推论：

推论 2　经过两条相交直线，有且仅有一个平面(图 1-5(b)).

推论 3　经过两条平行直线，有且仅有一个平面(图 1-5(c)).



(a)　　(b)　　(c)

图 1-5

根据直线平行的定义，两条直线平行指的是这两条直线在同一平面内且没有公共点，因此，有一个平面经过两条平行直线，又由公理 3，这个平面是唯一的.

例 1　求证：两两相交且不过同一个点的三条直线在同一个平面内.

已知：直线 AB, BC, CA 两两相交，交点分别为 A, B, C(图 1-6). 求证：直线 AB, BC, CA 在同一平面内.

证明　由直线 AB，AC 相交于点 A，

可知直线 AB 和 AC 确定一个平面 α(推论 2).

因为 $B \in AB$，$C \in AC$，

所以 $B \in \alpha$，$C \in \alpha$.

可得 $BC \subset \alpha$(公理 1).

因此，直线 AB，BC，CA 在同一平面内.

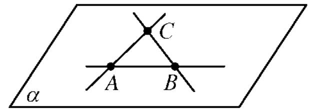


图 1-6

练习

1. 用集合的语言表示下列语句，并画图表示.
   (1) 平面 α 上有点 A，平面 α 外有点 B；
   (2) 直线 l 经过点 A，且平面 α 经过直线 l；
   (3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l，且直线 l 经过点 M；
   (4) 平面 α 与平面 β 的交线 l 与直线 m 相交于点 A.
2. 已知 a，b，c 是空间三条直线，且 $a /\!/ b$，c 与 a，b 都相交，求证：直线 a，b，c 在同一平面内.
3. 已知 A，B，C，D 是空间四点，且点 A，B，C 在同一直线 l 上，点 D 在直线 l 外. 求证：直线 AD，BD，CD 在同一平面上.
4. 讨论使空间四点在同一平面上的条件.
5. 证明本节中的推论 2 和推论 3.

1.2　空间的两条直线

1.2.1　两条直线的位置关系

我们知道，在同一个平面内的两条直线* 的位置关系只有两种：平行或相交.

空间的两条直线之间，还有另外一种位置关系.

观察长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$(图 1-7)，可以发现 BD_1 与 AC，AA_1 与 B_1C_1 既不相交，也不平行，并且不在同一平面内. 我们把不可能在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**.

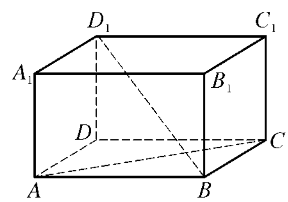


图 1-7

空间的两条直线的位置关系有以下三种：

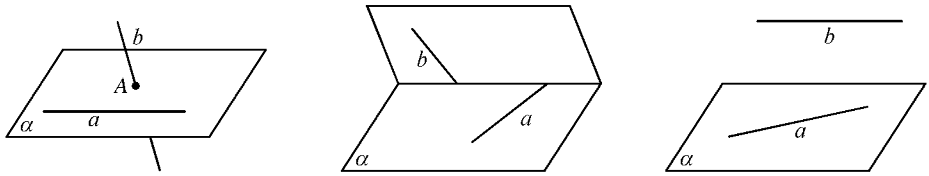
(1) **相交直线**——在同一平面内，有且仅有一个公共点；

(2) **平行直线**——在同一平面内，没有公共点；

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内，没有公共点.

画两条异面直线时，一般画成如图 1-8 的形状.

* 本教材中提到的两条直线均指两条不重合的直线.



(a)　　(b)　　(c)

图 1-8

例 1　过平面内一点和平面外一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

已知：直线 $a \subset$ 平面 α，点 $A \notin \alpha$，$B \in \alpha$，$B \notin a$（图 1-9）. 求证：直线 AB 与直线 a 是异面直线.

证明　假设直线 AB 与直线 a 在同一平面 β 内，则平面 β 经过点 B 和直线 a.

由于 $B \notin a$，经过点 B 和直线 a 的平面有且仅有一个平面 α，因此平面 α 与平面 β 重合.

可得 $A \in \alpha$，与已知 $A \notin \alpha$ 矛盾.

故直线 AB 与直线 a 是异面直线.

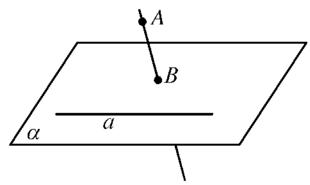


图 1-9

1.2.2　平行直线

在平面几何里，我们曾学过："在同一平面内，平行于同一直线的两条直线互相平行."实际上，在空间中，这个结论依然成立.

引理　设三个平面 α，β，γ 两两相交，交线分别为 a，b，c（$\gamma \cap \alpha = a$，$\alpha \cap \beta = b$，$\beta \cap \gamma = c$）. 对于直线 a，b，c，我们有

（1）若 a，b，c 中有两条直线相交，则 a，b，c 三线共点；

（2）若 a，b，c 中没有两条直线相交，则 a，b，c 两两平行，即 $a \parallel b$，$b \parallel c$，$c \parallel a$.

证明　因为 a 与 b 共面于 α，所以 a 与 b 只可能相交或平行.

（1）若 a 与 b 相交，设交点为 P，则 $P \in a \cap b = (\gamma \cap \alpha) \cap (\alpha \cap \beta)$，即 $P \in \beta \cap \gamma = c$，故三线 a，b，c 共点于 P.

（2）若 $a \parallel b$，则 $b \parallel c$，$c \parallel a$.（否则，a，b，c 中有两线相交，则由（1）的证明过程可知，三线均相交，与 $a \parallel b$ 矛盾）

因此，我们有以下的推论：

平行传递定理　平行于同一直线的两条直线平行.

已知：$a \parallel b$，$b \parallel c$. 求证：$a \parallel c$.

证明　设 a 与 b 共面于 α，b 与 c 共面于 β. 若 a，b，c 三线共面，则由平面几何知识，$a \parallel c$；若 a，b，c 不共面，且 a 与 c 共面于 γ，则由引理可知 $a \parallel c$.

若 a 与 c 不共面，则在 c 上取一点 P，a 与 P 确定平面 γ'，γ' 与 β（有公共点 P）相交成直

线 c'，于是 $c' \parallel b$. 而直线 b, c, c' 同在平面 β 内，过一点只能有一条平行线，两者矛盾. ∴ a 与 c 共面，$a \parallel c$.

例 2　已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不在同一平面上的四边形)，E, H 分别是边 AB, AD 的中点，F, G 分别是边 CB, CD 上的点，且 $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$. 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明　如图 1-10，连接 BD.

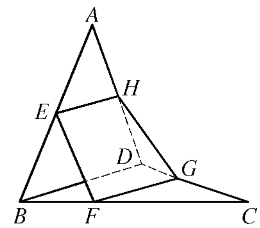


图 1-10

因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

所以 $EH \parallel BD$, $EH = \dfrac{1}{2}BD$.

又在 $\triangle BCD$ 中，$\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$,

有 $FG \parallel BD$, $FG = \dfrac{2}{3}BD$.

所以 $EH \parallel FG$, $FG > EH$.

故四边形 $EFGH$ 是梯形.

根据平行传递定理，我们有以下的定理：

等角定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，则这两个角相等.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$，并且方向相同. 求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

证明　对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 在同一平面内的情况，在平面几何中已经证明. 下面证明两个角不在同一平面内的情况.

如图 1-11，在 AB, $A'B'$, AC, $A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$, $AE = A'E'$，连接 AA', DD', EE', DE, $D'E'$.

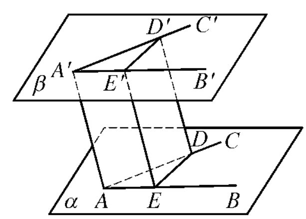


图 1-11

因为 $AB \parallel A'B'$, $AD = A'D'$,

所以 $AA'D'D$ 是平行四边形.

有 $AA' \parallel DD'$, $AA' = DD'$.

同理，$AA' \parallel EE'$, $AA' = EE'$.

则 $DD' \parallel EE'$, $DD' = EE'$,

所以四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形.

有 $ED = E'D'$, $\triangle AED \cong \triangle A'D'E'$.

故 $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

1.2.3　异面直线所成的角

对于异面直线 a 和 b，经过空间任意一点 O，分别引直线 a' 平行(或重合)于直线 a，直线

b'平行(或重合)于直线 b. 由上一节的推论,直线 a', b'所成的锐角(或直角)的大小,只由直线 a, b 的相互位置决定,与点 O 的选择无关. 把直线 a', b'所成的锐角(或直角)叫做**异面直线 a, b 所成的角**(图 1-12). 如果两条异面直线所成的角是直角,则称**这两条异面直线互相垂直.**

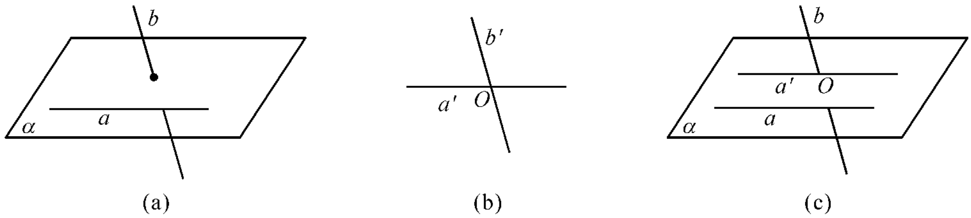


图 1-12

因此,两条异面直线所成角的取值范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

例 3　如图 1-13,在边长为 1 的正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中,

(1) 哪些棱所在的直线与直线 BC'成异面直线;

(2) 求异面直线 AB'与 BC'所成角的大小.

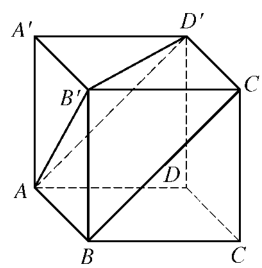


图 1-13

解　(1) 正方体共有 12 条棱,与 BC'相交的有 6 条,与 BC'平行的棱不存在. 因此余下的 6 条棱所在的直线与直线 BC'成异面直线,它们是 AA', $A'B'$, $A'D'$, AD, CD, DD'.

(2) 连接 AD', $B'D'$.

因为 $AB \parallel A'B'$, $A'B' \parallel C'D'$, $AB = A'B'$, $A'B' = C'D'$,

所以四边形 $ABC'D'$ 是平行四边形,$AD' \parallel BC'$,直线 AB' 与 BC' 所成的角就是直线 AB' 与 AD' 所成的角.

在 $\triangle AB'D'$ 中,$AB' = B'D' = AD' = \sqrt{2}$, $\angle B'AD' = 60°$.

故异面直线 AB'与 BC'所成的角是 $60°$.

例 4　在长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中,已知 $AB = 2AD = 3AA'$. 求异面直线 AC 与BC'所成角的大小.

解　如图 1-14,连接 AD', CD',

则 $AD' \parallel BC'$, $\angle D'AC$ 为异面直线AC 与BC' 所成的角(或它的补角).

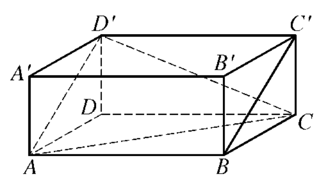


图 1-14

由 $AB = 2AD = 3AA'$,

可令 $AA' = 2t$, $AD = 3t$, $AB = 6t$,

在 $\triangle ACD'$ 中,$AC^2 = 45t^2$, $D'A^2 = 13t^2$, $D'C^2 = 40t^2$,

有 $\cos\angle D'AC = \dfrac{AC^2 + D'A^2 - D'C^2}{2AC \cdot D'A} = \dfrac{45t^2 + 13t^2 - 40t^2}{2 \cdot \sqrt{45}t \cdot \sqrt{13}t} = \dfrac{3\sqrt{65}}{65}$,

则 $\angle D'AC = \arccos\dfrac{3\sqrt{65}}{65}$,即直线 AC 与 BC' 所成的角是 $\arccos\dfrac{3\sqrt{65}}{65}$.

在图 1-14 中，AA' 和 BC 是两条异面直线，直线 AB 和它们都垂直相交. 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线**. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做**这两条异面直线的距离**. 图 1-14 中，异面直线 BC 和 $C'D'$ 的距离是线段 CC' 的长.

练习

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 没有公共点的两条直线互相平行；

(2) 分别在两个平面内的直线是两条异面直线.

2. 指出图中正方体各线段所在直线的位置关系：

(1) AB 和 CC'；

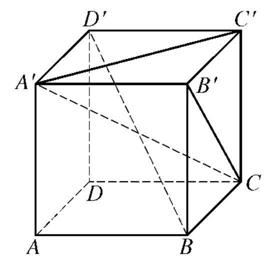
(2) $A'C$ 和 BD'；

(3) AA' 和 CB'；

(4) $A'C'$ 和 CB'；

(5) $A'B'$ 和 DC；

(6) BD' 和 DC.



第 2 题图

3. 已知：线段 AA'，BB'，CC' 不在同一平面上，且 $AA' \parallel BB'$，$AA' = BB'$，$AA' = CC'$，$AA' \parallel CC'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

4. 已知：E，F，G，H 分别是空间四边形的四条边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

5. 分别和两条异面直线 AB，CD 同时相交的两条直线 AC，BD 一定是异面直线. 为什么?

6. 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求下列异面直线所成的角：

(1) AD' 与 $B'C$；

(2) AA' 与 CB'；

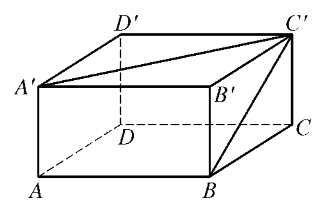
(3) $A'D$ 与 CD'.

7. 如图的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB = BC = 4$，$AA' = 2$. 求：

(1) 异面直线 BC 和 $A'C'$ 所成的角；

(2) 异面直线 AA' 和 BC' 所成的角；

(3) 直线 $A'B'$ 和 DD'、$B'C'$ 和 CD 的距离.



第 7 题图

1.3　空间直线与平面

1.3.1　直线和平面的平行

根据公理 1，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线上的所有点都在这个平面内，我们称之为直线在平面内.