

南阳市优秀教育科研成果丛书

# 卢氏数学

## 直观思维通用模型

LU SHI SHU XUE  
ZHI GUAN SI WEI TONG YONG MO XING

丛书主编 景国成 李大峰  
本册主编 卢文艺 卢 娅



大象出版社

南阳市优秀教育科研成果丛书

# 卢氏数学

## 直观思维通用模型

LU SHI SHU XUE  
ZHI GUAN SI WEI TONG YONG MO XING

丛书主编 景国成 李大峰  
本册主编 卢文艺 卢 娅

大象出版社

丛书主编 景国成 李大峰

本册主编 卢文艺 卢 娅

本册编者 卢文艺 卢 娅 卢冉冉  
卢 升 卢慢新 景国成  
梁 敏

# 总 序

近年来,随着素质教育的不断深化和课程改革的深入实施,南阳市广大教育工作者对教育科研工作越来越重视,大家紧密联系教育教学实际,开展了丰富多彩的教育科研活动,取得了可喜的成绩,涌现出一批优秀的教育科研成果。目前,这些优秀成果已经通过不同的渠道推广至全市、全省乃至全国的不少学校,为提高教师的科研水平和教育教学质量发挥了重要作用,受到普遍好评。为更好地宣传、推广这些成果,并为广大教师提供科研范例和借鉴,南阳市教育科学研究所决定出版“南阳市优秀教育科研成果丛书”,陆续推出优秀成果。

收入该丛书的优秀成果,体现以下四个特点:

一是全省、市教育科研部门获准立项的研究课题;

二是源于南阳本土,立足课堂,出自一线教育工作者之手,并在教育教学实践中取得显著成效;

三是能够激发学生学习兴趣,减轻课业负担,提高课堂教学效率和教育教学质量;

四是遵循教育教学规律,具有科学性和实用性,便于推广应用,促进教育可持续发展。

由于我们水平有限,不足之处定然难免,恳请读者提出宝贵意见。

“南阳市优秀教育科研成果丛书”编写组

2013年10月

# 序 言

中小学数学本来不难,人们对数学的“惧怕”是人为造成的.

其实,小学和初中的数学问题并不太多:

1. 部分与整体(一共数)的关系问题;
2. “比……多”、“比……少”的问题;
3. “是……的多少倍/几分之几/百分之几”的问题;
4. “甲比乙多(或少)几分之几/百分之几”的问题;
5. 与“平均数”相关的问题(比如不同类型的应用题);
6. 数学规律、函数和几何等问题.

至于有理数、方程等问题,只不过是这些问题的延伸罢了. 这点儿“东西”归根结底不过是加、减、乘、除的运用以及相应规律的运用问题,而目前的数学体系却把本来一体的思维框架分割得支离破碎——本来一次可以很容易学会的内容,却分解为多次才能学完整的内容;本来属于一类的问题偏要分成多种类型、用多种公式来解决的问题. 这不仅浪费了时间,增加了难度,同时也造成了学生对数学的“畏惧”心理.

卢文艺老师几十年教数学,从来就不拘泥于这样的体系,他的直观思维通用模型(简称“模型”)使他的数学教学非常高效:一个学期或一个学年的知识一般在一个月内就可以顺利解决,并且不用加班加点,不需大量训练,学生一学就会,且不易遗忘. 另外,照此思路学习数学的学生,观察能力强、自学能力强、思维能力强,学习灵活,兴趣提

升,后劲十足!

直观思维通用模型的最大优势是“直观”:数量符号直观,数量关系直观,解题方法直观.最大的特点是:一边读题,一边列式,即学即会.不仅适用于小学数学和初中数学,就连物理、化学和高中数学的一些内容也同样适用.有一些问题看似不相关,实质上有着紧密的联系,比如:圆面积公式的运用,先写出公式,再代入已知和未知符号(量),把公式看作一个特殊的模型;物理、化学中的各种公式,都可以按此模型解决.当然这里仅指“模型”之外的公式,如电流定律公式、球体公式、周长公式、面积公式、自由落体公式、牛顿定律等.“模型”之内的公式就更好解决了.

本书可以作为中小学生学习数学的参考书,中小学教师创造性使用教材的参考书,教研部门、出版部门、数学教材编审者的参考书.全书分三部分,第一部分论述直观思维通用模型的建立和应用,包括在解析小学数学课本中的一般题目、较难题目、资料难题、智力难题,甚至一些中招难题解题中的应用.第二部分论述“模型”在解决现行中小学教材中相关问题的一些思路.第三部分论述“模型”在解决《九章算术》中各类问题时的运用,实际上是还原中国古代的数学智慧.相信本书对于广大中小学生学习数学会有很大帮助,同时对于广大数学教师灵活处理教材也大有裨益.

本书是应广大教师、学生和家长的请求而编写的,但编写时间仓促,也因水平有限,不足之处在所难免,真诚希望广大读者提出宝贵意见.

2011年10月

# 目 录

<b>第一部分 加、减、乘、除的规律与直观思维通用模型</b> .....	001
<b>第一章 直观思维通用模型的建立</b> .....	003
第一节 加、减法的三量关系与直观思维通用模型之一 .....	003
第二节 加、减法的拓展与直观思维通用模型之二 .....	007
第三节 乘、除法的三量关系与直观思维通用模型之三 .....	008
第四节 “谁是/占谁的几倍/几分之几”与直观思维通用模型之四 .....	011
第五节 “ $1 \pm \frac{几}{几}$ ”中“1”的来历与直观思维通用模型之五 .....	014
<b>第二章 直观思维通用模型的应用</b> .....	016
第一节 小学课本中的一般“难题” .....	016
第二节 资料或考试题中的“难题” .....	022
第三节 智力难题 .....	025
第四节 中招难题 .....	030
第五节 奥赛题 .....	034
<b>第二部分 用直观思维通用模型解决中小學生常见的数学问题</b> .....	039
<b>第一章 小学部分</b> .....	041
第一节 组合与排列 .....	041
第二节 时、分、秒 .....	045

第三节	可能性	047
第四节	“至少”问题	049
第五节	铺地板砖	049
第六节	栽树	050
第七节	重复	051
第八节	位置与方向	051
第九节	年、月、日	052
第十节	面积	053
第十一节	小数	056
第十二节	循环小数	061
第十三节	近似数	062
第十四节	大数的认识	063
第十五节	点和线	065
第十六节	分数入门	070
第十七节	比和比的应用	081
第十八节	百分数	083
第十九节	垂直与平行	086
第二十节	多边形的面积	087
第二十一节	多边形的内角和、外角和	088
<b>第二章</b>	<b>初中部分</b>	<b>091</b>
第一节	走进数学世界	091
第二节	数列入门	096
第三节	整式的加减入门	102
第四节	有理数入门	105
第五节	几何入门	109
第六节	一元一次方程	122
第七节	二元一次方程组	125
第八节	平方根与立方根	127
第九节	整式的除法	128

第十节 因式分解 .....	130
第十一节 勾股定理 .....	132
第十二节 平移与旋转 .....	134
第十三节 认识平行四边形 .....	137
第十四节 数据的整理与初步处理 .....	145
第十五节 函数入门(从三量关系到图像) .....	151
第十六节 二次根式入门 .....	159
第十七节 解直角三角形 .....	168
第十八节 相似 .....	182
第十九节 黄金分割 .....	187
第二十章 概率 .....	198
第二十一章 二元一次方程组 .....	203
第二十二章 一元一次不等式和一元一次不等式组 .....	209
第二十三章 三角形外角 .....	217
第二十四章 多边形内角和与外角和 .....	219
第二十五章 轴对称 .....	221
第二十六章 三视图 .....	226
第二十七节 整式的加减 .....	227
第二十八节 分式 .....	232
第二十九节 全等三角形 .....	235
第三十节 平行四边形的判定 .....	242
第三十一节 圆 .....	248
第三十二节 反比例函数 .....	262
第三十三节 二次函数 .....	268
<b>第三章 直观思维通用模型在高中数学中的应用举例 .....</b>	<b>286</b>
<b>第三部分 利用直观思维通用模型解决《九章算术》中的问题 .....</b>	<b>291</b>
<b>附 让所有的孩子都能轻松学好数学 .....</b>	<b>304</b>

## 第一部分

# 加、减、乘、除的规律与 直观思维通用模型



本部分学习加、减、乘、除法及其规律，与一般数学教学体系不同的是：加、减法同时学习，乘、除法也一块儿处理。

学加、减法时，主要讨论“加数”与“和”这两个概念；学乘、除法时，主要讨论“因数”与“积”这两个概念，并且乘、除法采用的是中国古代的竖式。





## 第一章

# 直观思维通用模型的建立

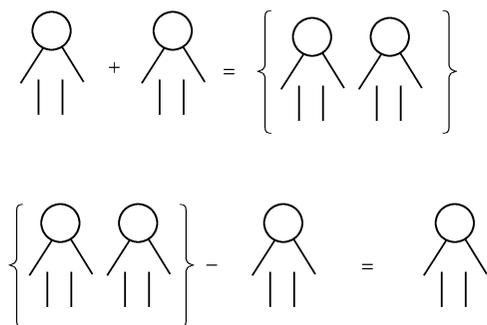
### 第一节 加、减法的三量关系与直观思维通用模型之一

加、减法同时学,省时省力,不易出错.

加、减法的核心是“和”包含“加数”,最关键的是“加数 + 加数 = 和”、“和 - 加数 = 加数”. 遇到加、减法应用题时,只需考虑谁是“和”、谁是“加数”,便可直接建立起相应的“模型”,然后根据“模型”转换相应的关系式,即可轻松解决问题.

加、减法同时学,不需记忆“被减数”、“减数”、“差”等名词,更不需要去考虑“用加法,还是用减法”以及“哪个是被减数、减数、差”等问题.

请看下图:



加、减法有什么关系呢?

图 1.1.1-1

1 人 + 1 人 = 2 人,

2 人 - 1 人 = 1 人.

加数 + 加数 = 和,

和 - 加数 = 加数.

“和”的意义的核心是“包含”加数.

如:

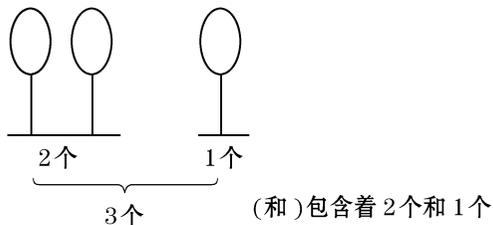


图 1.1.1-2

$$\begin{aligned} \therefore 2 \text{ 个} + 1 \text{ 个} &= 3 \text{ 个}, & 1 \text{ 个} + 2 \text{ 个} &= 3 \text{ 个}; \\ 3 \text{ 个} - 2 \text{ 个} &= 1 \text{ 个}, & 3 \text{ 个} - 1 \text{ 个} &= 2 \text{ 个}. \end{aligned}$$

模型一:加数+加数=和,和-加数=加数;

规律:求“和”用加法,有“和”用减法.

说明:1. 如果有了“加数”,不知道“和”,就用加法;如果有了“和”与其中的部分“加数”,想找另外的“加数”,就用减法. 不论整数、分数(小数)、有理数和无理数都是这个规律.

2. 学好这一部分内容的基础是数的认识 and 数的分解,比如:

$$\begin{aligned} 5 &\begin{cases} 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5, 4, 3, 2, 1, 0 \end{cases} \\ 9 &\begin{cases} 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 \end{cases} \end{aligned}$$

只要能够准确熟练地进行数的分解,则每个数与其分解后的两个数之间的三量关系就自然建立. 就是这么一个小小的关系式,贯穿了小学数学、初中数学、高中数学、大学数学,乃至中学物理、化学中的所有加、减法问题.

相关链接

### 实验教师的教学反思(摘要)

找和的方法应用非常广泛,早在小学一年级上期就有应用. 如  $9 + (\quad) = 10$ ,  $(\quad) - 2 = 7$  等. 不少常教一、二年级数学的老师说:“这是难题! 学生常出错.” 他们教给学生的诀窍是:见“+”号用减法,见“-”用加法. 对大多数题目来讲,确实能用这一规律解决. 比如:  $5 + (\quad) = 7$ , 见“+”号用减法,  $7 - 5 = 2$ , 括号里填2;  $(\quad) - 2 = 7$ , 见“-”用加法,  $7 + 2 = 9$ , 括号里填9. 但是,如果遇到  $9 - (\quad) = 4$  这类题时就不是这样了:见“-”

还得用减法,即  $9 - 4 = 5$ . 这不就让学生越学越迷糊了吗?

使用“模型一”及其规律就容易多了:第一步,找“和”,在加法算式里,“和”在等号右面,在减法算式里,“和”在算式最前面;第二步,决定用加法还是用减法,求“和”用加法,有“和”用减法. 用三量关系来求未知数,学生就明明白白了.

让学生这样学,不仅做题容易,更能“知其然,并知其所以然”. 这是在为学生的长远发展考虑. 即使将来到初中、高中、大学,遇到加、减法应用题时,他们仍然会很轻松.

**例 1** 小明有 2 朵花,小兰有 1 朵花,小明和小兰一共有几朵花?

解:因为“一共有几朵”包含着小明 2 朵和小兰 1 朵,据此我们可以直接应用模型:

$$\text{小明} + \text{小兰} = ? \text{朵(求“和”用加法),}$$

$$\text{代入,得 } 2 + 1 = 3(\text{朵}).$$

答:小明和小兰一共有 3 朵花.

(这样的思路,对于整数、小数、分数等同样适用.)

**例 2** 小明有 3 支铅笔,借给小兰 1 支,小明还剩几支铅笔?

解:因为“小明的 3 支铅笔”包含“借出的”和“剩下的”,据此我们可以直接应用模型:

$$\text{小明铅笔数} - \text{借出数} = \text{剩下数(有“和”用减法)}$$

$$\text{代入,得 } 3 \text{支} - 1 \text{支} = ? \text{支,}$$

$$3 - 1 = 2(\text{支}).$$

答:小明还剩 2 支铅笔.

## 超级链接

1. 中国人“加减同时学”的理念可以从一个数学故事得到证明:一个牧羊童,为了天天掌握羊群的数目,他准备了两个盒子和与羊一样多的石子. 早上放羊出圈时,每出来一个,他就把甲盒里的石子拿出一个放入乙盒,如果正好把石子移完,则说明羊全部出来;如果剩下一个或几个石子,则说明前一天夜里圈内有相应数量的羊出了问题. 晚上回来,每进去一只羊,他就把乙盒里的石子拿出一个放入甲盒,如果正好移完,则说明羊全部回来,否则便有相应数量的羊出了问题.

当然,生产和生活中只进行“加”或“减”的时候也是有的,并且并不少见. 但那是另一运算过程的有意忽略,而不是根本不存在,比如装船、卸车、伐树、杀敌等.

2. 古人教孩子学算盘更是“加减同时学”理念的实践:他们利用 77158950625 这一串数



掉,而在高一位(十位)上加1,即得到12……]

这种加减同时使用的方法寓教于乐,趣味横生,学生即学即会,根本不会有难、烦、累的感觉.

## 第二节 加、减法的拓展与直观思维通用模型之二

“谁比谁多/少”这个问题是学生们最常出错的问题之一. 出错的原因无非是不知道什么时候用加法、什么时候用减法,特别是在出现“比……多”反而用减、“比……少”反而用加的时候. 实际上很简单,首先构建“模型”:见“比”即“=”、见“多”即“+”、见“少”即“-”、见未知即“?(或 $x$ )”,然后,根据其三量关系进行转换,即可轻松解决. 请观察图1.1.2-1:



图 1.1.2-1

左端比右端多1块, 右端比左端少1块.

左 = 右 + 1块, 右 = 左 - 1块.

(和)(比) (多) (比)(和)(少)

2块 = 1块 + 1块, 1块 = 2块 - 1块.

(和) (和)

如:2块 =  + 1块, 1块 = 2块 - .

(和) (和)

因为有“和”用减法,

所以2块 - 1块 = ,

如:1块 =  - 1块,

(和)

因为求“和”用加法,

所以1块 + 1块 = .

**例 1** 小明有5支铅笔,小兰有2支铅笔,小明比小兰多几支铅笔?

解:因为要问“小明比小兰多几支铅笔”,

所以建模:小明 = 小兰 + ?,

代入:  $5 = 2 + ?$ ,

转换,得:  $? = 5 - 2$  (有“和”用减法)  
 $= 3$  支.

答:小明比小兰多3支铅笔.

**例2** 小明有5支铅笔,小兰比小明少3支,小兰有几支铅笔?

解:因为“小兰比小明少3支”,

所以建模,得:小兰 = 小明 - 3支,

代入,得:  $? = 5$  支 - 3 支 (有“和”用减法)  
 $= 2$  支 (不需转换).

答:小兰有2支铅笔.

**点睛:**这样解决问题,顺应了人们的思维习惯:首先根据见“比”即“=”,见“多”即“+”,见“少”即“-”的原则,直观地边读题,边列出三量关系式,然后转换式子并解决问题.这样避免了盲目猜“法”的弊端.

如:8比6多几?

先建立  $8 = 6 + ?$ ,然后转换为:  $8 - 6 = ?$ ,  $? = 8 - 6 = 2$ .

模型二:谁比谁多      谁比谁少?  
 $= +$                        $= -$

注:有时会用“大、长、高……”来代替“多”,用“小、短、矮……”来代替“少”.

### 第三节 乘、除法的三量关系与直观思维通用模型之三

众所周知,乘法是若干个相同加数求和的简便运算,如:

$$\textcircled{1} 2 + 2 + 2 = 6 \qquad \rightarrow 2 \times 3 = 6;$$

$$\textcircled{2} 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40 \qquad \rightarrow 8 \times 5 = 40.$$

对于这个由加法到乘法的转变过程,如果你做认真的观察和分析,就会发现,它与“九九乘法口诀”还有着一定的联系:

①中2为相同加数,3为加数的个数,口诀为:二三得六;

②中8为相同加数,5为加数的个数,口诀为:五八四十.

再进一步观察,在  $2 + 2 + 2 = 6$  中,每一加数所在的位置都有一个序数.比如说:第一个