



高中

同步 学程

TONG BU XUE CHENG

高中新课程

数学

必修 5 必修 2

高中

同步 学程

高中新课程

数学

必修5 必修2

明天出版社

同步学程

数 学

必修 5 必修 2

※

明天出版社出版发行

(济南市经九路胜利大街 39 号)

<http://www.sdpress.com.cn>

<http://www.tomorrowpub.com>

各地新华书店经销 山东省无棣县教育实业公司印刷厂印刷

※

787×1092 毫米 16 开 13 印张 362 千字

2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5332-5984-6

定价:11.00 元

如有印装质量问题 请与出版社联系调换



为了更好地贯彻素质教育要求,落实《山东省普通高中课程设置及教学指导意见(试行)》,帮助广大师生更好地理解和把握实验教材的内容和要求,全面提高学生的自主学习能力,我们依据教育部颁布的《普通高中课程方案(实验)》、各学科课程标准和现行教材,组织部分一线骨干教师和教学研究人员编写了这套《同步学程》丛书,主要供高中学生同步学习使用。这套丛书对指导普通高中新课程实验,提高学生的综合素质,都将起到积极的促进作用。

这套丛书包括思想政治、语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理共九个学科的所有必修模块和部分选修模块,并根据教学进度同步发行。各模块根据新课程的内容特点按单元(节、课)编写,指导学生在规定的课时内完成学习任务,提高学习效率。

这套丛书有以下几个方面的特点:

1. 注重体现普通高中课程改革的理念和要求,帮助师生进行课程实验,用好用活教材;

2. 注重体现“知识和能力、过程和方法、情感态度和价值观”的三维目标要求,在帮助学生牢固掌握基础知识的前提下,努力提高学生的应用能力;

3. 注重设置问题情境,拓宽知识背景,指导学生掌握科学的学习方法,自主探求未知领域,培养学生的探索精神和创新能力;

4. 注重与新课程实验的同步性,紧密配合各学科的学习,按单元(节、课)分配学习课时,组织学习训练内容,既便于教师指导又便于学生自学。

参加《同步学程·数学》(必修5 必修2)编写工作的老师及分工情况:王均星(第一章),刘洪福(第二章),吴宝英(第三章);赵传俊(第一章),郑振华(第二章),于清堂(第三章),卢延兵(第四章)。高天祥、商金琳、蒋涛、刘玉武、李长虹、王均星参加了审稿,王文清老师负责统稿。

希望这套《同步学程》丛书能够帮助同学们学好新课程,打牢基础,提升素质,实现理想。

2009年1月



必修 5

第一章 解三角形

- § 1.1 正弦定理和余弦定理····· (1)
- § 1.2 应用举例····· (6)
- 单元测试题····· (12)

第二章 数列

- § 2.1 数列的概念与简单表示法·· (15)
- § 2.2 等差数列····· (20)
- § 2.3 等差数列的前 n 项和····· (25)
- § 2.4 等比数列····· (29)
- § 2.5 等比数列的前 n 项和····· (35)
- 单元测试题····· (40)

第三章 不等式

- § 3.1 不等关系与不等式····· (42)
- § 3.2 一元二次不等式及其解法·· (48)
- § 3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题····· (55)
- § 3.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ····· (63)
- 单元测试题····· (72)
- 综合测试(一)····· (75)
- 综合测试(二)····· (78)

必修 2

第一章 空间几何体

- § 1.1 空间几何体的结构····· (82)
- § 1.2 空间几何体的三视图和直观图····· (87)
- § 1.3 空间几何体的表面积与体积····· (92)
- 单元测试题····· (98)

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

- § 2.1 空间中点、直线、平面之间的位置关系····· (101)
- § 2.2 直线、平面平行的判定及性质····· (108)
- § 2.3 直线、平面垂直的判定及性质····· (115)

- 单元测试题····· (123)

第三章 直线与方程

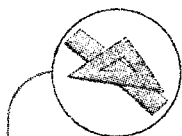
- § 3.1 直线的倾斜角与斜率····· (126)
- § 3.2 直线的方程····· (131)
- § 3.3 直线的交点坐标与距离公式····· (137)
- 单元测试题····· (144)

第四章 圆与方程

- § 4.1 圆的方程····· (147)
- § 4.2 直线、圆的位置关系····· (152)
- § 4.3 空间直角坐标系····· (158)
- 单元测试题····· (164)
- 综合测试(一)····· (167)
- 综合测试(二)····· (170)
- 参考答案····· (173)

必修5

第一章 解三角形



§ 1.1 正弦定理和余弦定理



课标要求

通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.



基础诊断

一、正弦定理、余弦定理

$\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

1. 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

正弦定理的三种变式:

(1) $a = 2R \sin A, b = \underline{\hspace{2cm}}, c = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \underline{\hspace{2cm}},$

$\sin C = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) $a : b : c = \sin A : \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 余弦定理

$a^2 = \underline{\hspace{2cm}}, b^2 = \underline{\hspace{2cm}},$

$c^2 = \underline{\hspace{2cm}};$

$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}, \cos B = \underline{\hspace{2cm}},$

$\cos C = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、解斜三角形的类型

1. 已知两角与一边,用 $\underline{\hspace{2cm}}$,有解时只有一解.

2. 已知两边及其中一边的对角,用 $\underline{\hspace{2cm}}$,可能有两解、一解或无解.

3. 已知三边,用 $\underline{\hspace{2cm}}$,有解时只有一解.

4. 已知两边及夹角,用 $\underline{\hspace{2cm}}$,必有一解.

附:在 $\triangle ABC$ 中,已知 a, b 和 A 时,解的情况如下:

	A 为锐角				A 为钝角或直角	
图形						
关系式	$a < b \sin A$	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$	$a \leq b$
解个数	无解	一解	两解	一解	一解	无解

 典型示例

【例 1】已知 $\triangle ABC$ 中, $c=10, A=45^\circ, C=30^\circ$, 解 $\triangle ABC$.

【分析】因为本题中条件是两角及一边, 由三角形内角和易求出第三角. 由正弦定理易求出 a, b , 即可解决.

【解】由 $A=45^\circ, C=30^\circ$, 知 $B=105^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{得, } a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2},$$

$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

【反思与小结】已知一边及两角解三角形可优先考虑正弦定理.

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=3, c=3\sqrt{3}, B=30^\circ$, 求 a .

【分析】本题为已知两边及其中一边的对角解三角形, 一般用正弦定理, 先求 C , 再求 A , 最后求 a , 但讨论容易出现错误; 由于本题只求 a , 所以用余弦定理可直接求解, 而且不需讨论.

【解法一】由正弦定理得, $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because c > b, \therefore C > B, \therefore C$ 有两解(锐角或钝角).

(1) 若 $C=60^\circ$, 则 $A=90^\circ$, 于是 $a=6$;

(2) 若 $C=120^\circ$, 则 $A=30^\circ$, 于是 $a=3$.

$\therefore a=6$ 或 $a=3$.

【解法二】将 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, 代入已知条件得, $a^2 - 9a + 18 = 0$, 故 $a=6$ 或 3 .

【反思与小结】解三角形时先看已知条件, 确定先求角, 还是先求边, 正确使用正、余弦定理是

解题的关键.

【例 3】在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2}{b^2}$, 试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

【分析】对已知条件变形, 得出三角关系或三边关系, 都要根据正、余弦定理.

【解法一】 $\because \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{a^2}{b^2}$,

$$\text{又 } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}.$$

\because 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \sin B \neq 0$,

$$\therefore \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ 即 } \sin 2A = \sin 2B.$$

$$\therefore A=B \text{ 或 } A+B = \frac{\pi}{2} (C = \frac{\pi}{2}).$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形(注意不是等腰直角三角形).

【解法二】 $\frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{a^2}{b^2}$, 由正弦和余弦定

$$\text{理得 } \frac{a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot b} = \frac{a^2}{b^2},$$

化简整理得, $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$,

$$\therefore a=b \text{ 或 } a^2 + b^2 = c^2.$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

【反思与小结】已知三角形中的边角关系, 判定三角形的形状, 有两条思路: (1) 化边为角, 再进行三角恒等变形, 求出三个角之间的关系式; (2) 化角为边, 再进行代数恒等变形, 求出三条边之间的关系式.

【例 4】设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $A=60^\circ, c=3b$, 求:

(1) $\frac{a}{c}$ 的值;

(2) $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的值.

【分析】由已知和余弦定理可得 a, c 的关系

式,进而求出 $\frac{a}{c}$ 的值.解决(2)可有两个思路:一是用正弦定理;二是用余弦定理.

【解】(1)由余弦定理得,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= \left(\frac{1}{3}c\right)^2 + c^2 - 2 \times \frac{1}{3}c \times c \times \frac{1}{2} = \frac{7}{9}c^2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{(2)方法一: } \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} &= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \\ &= \frac{\cos B \sin C + \cos C \sin B}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{a^2}{bc} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{7}{9}c^2}{\frac{1}{3}c^2}$$

$$= \frac{14}{3\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}.$$

方法二:由余弦定理及(1)的结论可得,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5}{2\sqrt{7}},$$

$$\text{故 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{同理可得 } \cos C = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$$

$$= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{14\sqrt{3}}{9}.$$

【反思与小结】正、余弦定理是沟通三角形边角关系的桥梁,它常与三角函数结合起来综合考查与角有关的三角形问题.



归纳总结

1. 利用正余弦定理解题时,应先把握题目给

的元素,哪些是已知的,哪些是未知的,选用合理公式,除此以外还应注意 $A+B+C=\pi$.

$$2. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}.$$



拓展提高

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$,求 A 、 C 及边 c .

【解析】由正弦定理,得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because B=45^\circ < 90^\circ$ 且 $b < a$, \therefore 有两解 $A=60^\circ$ 或 $A=120^\circ$.

(1)当 $A=60^\circ$ 时, $C=180^\circ-(A+B)=75^\circ$,

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

(2)当 $A=120^\circ$ 时, $C=180^\circ-(A+B)=15^\circ$,

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

综上所述, $A=60^\circ$, $C=75^\circ$, $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 或 $A=120^\circ$, $C=15^\circ$, $c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

【注】已知两边和其中一边的对角解三角形时,运用正弦定理,首先必须判明是否有解,如果有解,是一解还是两解?

【变式1】本题有两解,你能从边角关系式或利用草图加以解释吗?

【变式 2】本题中,若把 b 的值改为 2,则 $\triangle ABC$ 解的个数是().

- A. 一解 B. 二解
C. 无解 D. 无法确定

若把 b 的值改为 1,则 $\triangle ABC$ 解的个数是().

2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin A = 2\sin B \cos C$, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【解析】由 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$,利用正弦定理得, $a^2 = b^2 + c^2$.

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $A = 90^\circ$, $\therefore B + C = 90^\circ$,即 $B = 90^\circ - C$.

$\therefore \sin B = \cos C$. 由 $\sin A = 2\sin B \cos C$ 可得 $1 = 2\sin^2 B$,

$$\therefore \sin^2 B = \frac{1}{2}.$$

$\therefore B$ 为锐角, $\therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,从而 $B = 45^\circ$.

$\therefore C = 45^\circ$. $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

【变式 1】本题还可以利用 $A + B + C = 180^\circ$,转化为角推得结论. 试利用这一思路推证.

【变式 2】本题还可以同时应用正弦定理及余弦定理,把角都转化为边推得结论. 试利用这一思路推证.

展示平台

基础训练

- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $A : B : C = 1 : 2 : 3$,则 $a : b : c =$ ()
A. $1 : 2 : 3$ B. $2 : 3 : 4$
C. $3 : 4 : 5$ D. $1 : \sqrt{3} : 2$
- 边长为 5, 7, 8 的三角形的最大角和最小角的和是 ()
A. 90° B. 120° C. 135° D. 150°
- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$,则 c 等于 ()
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{3}$
- 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边,则直线 $x \sin A + ay + c = 0$ 与直线 $bx - y \sin B + \sin C = 0$ 的位置关系是 ()
A. 平行 B. 重合
C. 垂直 D. 相交但不垂直
- 在 $\triangle ABC$ 中, $b = 4\sqrt{3}$, $C = 30^\circ$, $c = 2$,则此三角形有 ()
A. 一解 B. 两解 C. 无解 D. 不能确定
- 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$,则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 等边三角形
B. 有一个内角是 30° 的直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 有一个内角是 30° 的等腰三角形
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b = 2a \sin B$,则 A 等于 ()
A. 30° 或 60° B. 45° 或 60°
C. 60° 或 120° D. 30° 或 150°
- 在不等边 $\triangle ABC$ 中, a 是最大的边,若 $a^2 < b^2 + c^2$,则 $\angle A$ 的取值范围是 ()

A. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

C. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ D. $(0, \frac{\pi}{2})$

9. $\triangle ABC$ 中, 若 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$, 则 $A =$ _____.

10. 已知 $\triangle ABC$ 中, 三个内角的正弦比为 $4:5:6$, 则最大角的余弦值为 _____.

11. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C , 满足 $2B = A + C$, 且 $AB = 1, BC = 4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为 _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3\sqrt{2}, \cos C = \frac{1}{3}, S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, 则 $b =$ _____.

13. 已知方程 $x^2 - (b\cos A)x + a\cos B = 0$ 的两根之积等于两根之和, 且 a, b 为 $\triangle ABC$ 的两边, A, B 为两内角, 试判断这个三角形的形状.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边, 已知 $b^2 = ac$, 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$, 求 A 的大小及 $\frac{b\sin B}{c}$ 的值.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a + b = 10$, $\cos C$ 是方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 的一个根, 求 $\triangle ABC$ 周长的最小值.

能力训练

16. 已知三角形两边的长分别为 1 和 $\sqrt{3}$, 第三边上的中线长为 1 , 求这个三角形的外接圆的半径.

17. 把一根长为 30cm 的木条锯成两段, 分别作为钝角 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 BC , 且 $\angle ABC = 120^\circ$, 问怎样锯才能使第三条边 AC 最短?

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 若 $B=2A, a+b=10, \cos A=\frac{3}{4}$, 求 c .



反思提高

§ 1.2 应用举例



课标要求

能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.



基础诊断

1. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边, $\triangle ABC$ 的面积为 S . $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ (h_a 表示 _____)

$$2. S = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

$$3. S = \frac{1}{2} r(a+b+c), (r \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}}).$$

$$4. \text{若 } p = \frac{1}{2}(a+b+c), \text{ 则}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



典型示例

【例 1】平行四边形两条邻边的长分别是 $4\sqrt{6}$ cm 和 $4\sqrt{3}$ cm, 它们的夹角是 45° , 求这个平行四边形的两条对角线的长与它的面积.

【分析】本题可化为已知三角形两边和它们

的夹角, 故求第三边必须用余弦定理解. 又因为已知角为特殊角, 已知边为精确值, 所以结果要保留精确值.

【解】对角线长

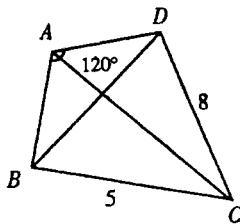
$$= \sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2 \pm 2 \cdot 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} \cos 45^\circ},$$

$$= 4\sqrt{9 \pm 6} = 4\sqrt{15} (\text{cm}) \text{ 或 } 4\sqrt{3} (\text{cm}).$$

$$\text{面积 } S = 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} \sin 45^\circ = 48 (\text{cm}^2).$$

【反思与小结】解答这一类问题, 关键是公式的应用, 考虑如何用.

【例 2】在四边形 $ABCD$ 中, $A = 120^\circ, B = D = 90^\circ, BC = 5, CD = 8$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



【分析】本题考查正弦定理与余弦定理, 三角形面积公式及外接圆等基础知识, 考查综合运用数学知识解决问题的能力. 解时, 用一条对角线将四边形分成两个三角形分别计算面积, 不管用哪条对角线分割, 总是要求得 AB 和 AD 两条边

长,而这又需通过对角线用正弦和余弦定理将已知边和角联系起来.

【解】 $A=120^\circ, B=D=90^\circ, \therefore C=60^\circ$.

$\therefore BD = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos 60^\circ} = 7$ (余弦定理).

$\therefore A, B, C, D$ 四点共圆, 且 AC 是圆的直径,

$\therefore AC = \frac{BD}{\sin C} = \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{14}{\sqrt{3}}$ (正弦定理).

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \frac{11}{\sqrt{3}}$,

$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

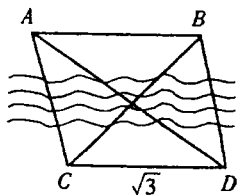
故 $S = \frac{1}{2} \times \frac{11}{\sqrt{3}} \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 8 = \frac{71\sqrt{3}}{6}$.

【反思与小结】本题难点是怎么求两边 AB 和 AD , 求 AC 的长又是关键, 充分利用几何性质去辅助解题往往起到至关重要的作用.

【例 3】要测量河对岸两点 A, B 之间的距离, 选取相距 $\sqrt{3}$ 里的 C, D 两点, 并测得 $\angle ACB = 75^\circ, \angle BCD = 45^\circ, \angle ADC = 30^\circ, \angle ADB = 45^\circ$, 求 A, B 之间的距离.

【分析】本题考查正弦定理和余弦定理及测量方法.

【解】如图所示, 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 120^\circ, \angle CAD = \angle ADC = 30^\circ$, 由 $\frac{AD}{\sin 120^\circ} = \frac{CD}{\sin 30^\circ}$, 得 $AD = 3$.



在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 45^\circ, \angle BDC = 75^\circ, \angle CBD = 60^\circ$,

故 $BD = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理,

得 $AB^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ =$

5,

故 $AB = \sqrt{5}$ (里).

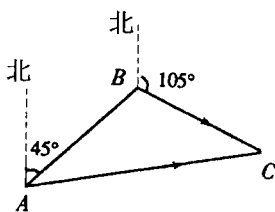
答: A, B 之间的距离为 $\sqrt{5}$ 里.

【反思与小结】测量问题, 转化为三角形的解法, 正余弦定理要灵活运用.

【例 4】我艇在 A 处发现一走私船在北偏东 45° 且距离为 12 海里的 B 处正在以每小时 10 海里的速度向北偏东 105° 的方向逃窜, 我艇立即以 14 海里/时的速度追击, 求我艇航向及追上走私船所需要的最短时间.

【分析】考查正弦定理、余弦定理的应用能力.

【解】如图所示, 设在 C 处追上走私船, 需用时间 t h, 则在 $\triangle ABC$ 中, $B = 120^\circ, BC = 10t, AC = 14t$,



由正弦定理, 得 $\frac{14t}{\sin 120^\circ} = \frac{10t}{\sin A}$,

$\therefore \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 查得 $A = 38^\circ 12' 48''$.

由余弦定理得, $(14t)^2 = (10t)^2 + 12^2 - 2 \times 12 \times 10t \cos 120^\circ$,

化简得 $4t^2 - 5t - 6 = 0, t = 2$ (h), 且

$38^\circ 12' 48'' + 45^\circ = 83^\circ 12' 48''$.

答: 我艇应以北偏东 $83^\circ 12' 48''$ 的方向追击, 经 2 小时可追上走私船.

【反思与小结】此问题是方向角问题, 合理的画图, 设时间为 t 是解题的关键, 正确合理地用正余弦定理解之.

归纳总结

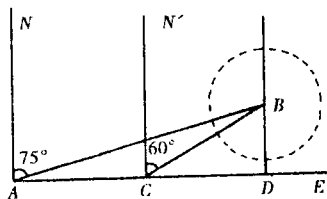
1. 应用解三角形知识解决实际问题,要分析和研究问题中涉及的三角形,它的哪些元素是已知的,哪些元素是未知的,应该选用正弦定理还是余弦定理进行求解.求三角形的面积时要选择适当的公式.

2. 对于实际应用问题,要进行认真的分析,作出正确的图形,根据已知条件,选择定理,进行计算,最后根据题意得出正确的结论.难点是将实际应用问题转化为数学问题并用解三角形的方法解决.

拓展提高

1. 如图, B 表示海中一小岛, 周围 3.8 海里内有暗礁, 一船从 A 由西向东航行, 在 A 处望见此岛在北偏东 75° . 航行 8 海里后, 在 C 处望见此岛在北偏东 60° , 如果该船不改变航线继续前进, 问有没有触礁的危险.

【解析】如图, 设 AE 是航线, B 是小岛, 作 $BD \perp AE$, 则 $\angle DBA = 75^\circ$, $\angle DBC = 60^\circ$.



$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AD = BD \cdot \tan 75^\circ,$$

$$CD = BD \cdot \tan 60^\circ,$$

$$\therefore AC = AD - CD$$

$$= BD(\tan 75^\circ - \tan 60^\circ) = 8.$$

$$\therefore BD = \frac{8}{\tan 75^\circ - \tan 60^\circ} = \frac{8}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}} = 4$$

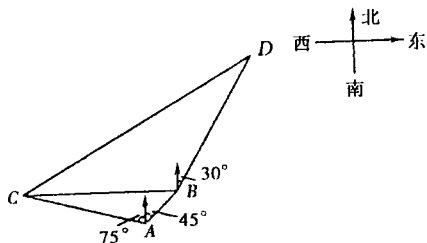
(海里).

由于 $BD > 3.8$, 故不改变航线继续航行, 无触礁的危险.

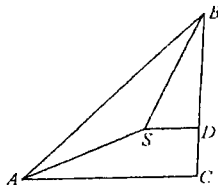
【变式 1】上题中航线不变, 若有危险, 则暗

礁的半径至少为多少海里?

【变式 2】如图在海岸 A 处, 发现北偏东 45° 方向, 距 A 为 $(\sqrt{3}-1)$ mile 的 B 处有一艘走私船, 在 A 处北偏西 75° 方向, 距 A 为 2 mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ mile/h 的速度追截走私船, 此时走私船正以 10 mile/h 的速度从 B 处向北偏东 30° 方向逃窜, 问缉私船沿什么方向能最快追上走私船, 并求出所需要的时间.



2. 如图, 在山脚测得山顶的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$, 沿倾斜角为 30° 的斜坡走 1000 米至 S 点, 又测得山顶仰角 $\angle DSB = 75^\circ$, 求山高.



【解析】∵ $\angle SAB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, $\angle SBA = \angle ABC - \angle SBD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$,
 ∴ $\angle ASB = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$.

在 $\triangle ABS$ 中,

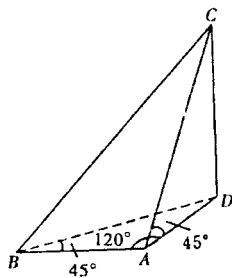
$$AB = \frac{AS \cdot \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1000 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1000\sqrt{2}.$$

∴ 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

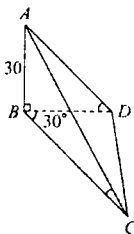
$$BC = AB \sin 45^\circ = 1000\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000 \text{ (米)}.$$

答:山高为 1000 米.

【变式 1】如图 A、B 是海平面上的两个点,相距 800m,在 A 点测得山顶 C 的仰角为 45° , $\angle BAD = 120^\circ$,又在 B 点测得 $\angle ABD = 45^\circ$,其中 D 是点 C 到水平面的垂足,求山高 CD.



【变式 2】江岸边有一炮台高 30 米,江中有两条船,由炮台顶部 A 测两船 D、C 俯角分别为 45° 和 30° ,而两条船与炮台底部 B 连线成 30° 角,求两船相距多少米?



展示平台

基础训练

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, 面积为 $\sqrt{3}$, 则

$\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 的值为 ()

- A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{39}$
 C. $\frac{26}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{39}$

2. $\triangle ABC$ 中, $a = 2b \cos C$, 则此三角形的形状为 ()

- A. 等腰 B. 直角
 C. 等腰直角 D. 等腰或直角

3. 在 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 中, $\vec{OA} = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, $\vec{OB} = (5\cos\beta, 5\sin\beta)$. 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -5$, 则 $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} =$ ()

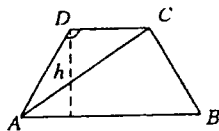
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

4. 在一座 20 m 高的观测台顶测得地面一水塔顶仰角为 60° , 塔底俯角为 45° , 那么这座塔的高为 ()

- A. $20(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ m B. $20(1 + \sqrt{3})$ m
 C. $10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m D. $20(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m

5. 甲、乙两楼相距 20m, 从乙楼底望甲楼顶的仰角为 60° , 从甲楼顶望乙楼顶的俯角为 30° , 则甲、乙两楼的高分别是 ()

- A. $20\sqrt{3}\text{m}, \frac{40}{3}\sqrt{3}\text{m}$
 B. $10\sqrt{3}\text{m}, 20\sqrt{3}\text{m}$
 C. $10(\sqrt{3}-\sqrt{2})\text{m}, 20\sqrt{3}\text{m}$
 D. $\frac{15\sqrt{3}}{2}\text{m}, \frac{20\sqrt{3}}{3}\text{m}$
6. $\triangle ABC$ 中, $\lg a - \lg b = \lg \sin B = -\lg \sqrt{2}$, B 为锐角, 则 A 的值是 ()
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
7. 若在 $\triangle ABC$ 中, $(b+c) : (a+c) : (a+b) = 4 : 5 : 6$, 则 $\sin A : \sin B : \sin C$ 等于 ()
 A. $6 : 5 : 4$ B. $7 : 5 : 3$
 C. $3 : 5 : 7$ D. $4 : 5 : 6$
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 那么 $a \cos B + b \cos A$ 等于 ()
 A. $2 \cos C$ B. $2 \sin C$ C. $\frac{a+b}{2}$ D. c
9. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 4, 且 $\sin B \cdot \sin C + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$, 则 $a =$ _____.
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 2\sqrt{2}, a = 2$, 且三角形有解, 则 A 的取值范围是 _____.
11. 在 $\triangle ABC$ 中, a 比 b 长 2, b 比 c 长 2, 且最大角的正弦是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.
12. $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 A, B, C 的对边, 如果 $a+c=2b, B=30^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 那么 $b =$ _____.
13. 如图已知等腰梯形 $ABCD$ 中, $CD=2, AC=\sqrt{19}, \angle BAD=60^\circ$, 求梯形的高 h .

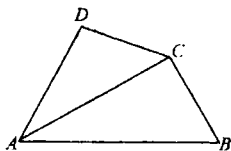


14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $4 \sin^2 \frac{A+C}{2} - \cos 2B = \frac{7}{2}$.
- (1) 求角 B 的度数;
 (2) 如果 $b = \sqrt{3}, a+c=3$ 且 $a > c$, 求 a, c 的值.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:
 $(a^2 - b^2 - c^2) \tan A + (a^2 - b^2 + c^2) \tan B = 0$.

能力训练

16. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle DAB$, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 7$, $AD = 6$, $S_{\triangle ADC} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$, 求 AB 的长度.



17. 已知圆 O 的半径是 R , 它的内接 $\triangle ABC$ 中, 有 $2R(\sin^2 A - \sin^2 C) = (\sqrt{2}a - b)\sin B$ 成立, 求 C 的值.

18. 某观测站 C 在 A 城的南偏西 20° 的方向, 由 A 城出发有一条直线公路, 公路的走向是南偏东 40° , 在 C 处测得距离 C 处 31 公里的公路上 B 处有敌坦克正沿公路向 A 城前进, 走了 20 公里后到达 D 处, 此时 C, D 之间相距为 21 公里, 问这时敌坦克离 A 城还有多少公里?

 反思提高

单元测试题

一、选择题

- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a\cos A = b\cos B$,则此三角形是 ()
 A. 等腰三角形 B. 等腰或直角三角形
 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形
- 在 $\triangle ABC$ 中,根据下列条件解三角形,其中有两个解的是 ()
 A. $b=10, A=45^\circ, C=70^\circ$
 B. $a=60, c=48, B=60^\circ$
 C. $a=7, b=5, A=80^\circ$
 D. $a=14, b=16, A=45^\circ$
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $2\cos B \sin A = \sin C$,则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ()
 A. 等腰三角形 B. 直角三角形
 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=15, b=30, A=30^\circ$,则 $\triangle ABC$ 是 ()
 A. 等腰三角形 B. 直角三角形
 C. 锐角三角形 D. 锐角或钝角三角形
- 在200m高的山顶上,测得山下一塔顶与塔底俯角分别为 $30^\circ, 60^\circ$,则塔高为 ()
 A. $\frac{400}{3}$ m B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ m
 C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ m D. $\frac{200}{3}$ m
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=3, A=30^\circ$,则满足这个条件的三角形的个数是 ()
 A. 2 B. 1 C. 0 D. 以上答案均有可能
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b^2 + c^2 + bc - a^2 = 0$,则 $A =$ ()
 A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c=3:5:7$,则此三角形的最大角为 ()
 A. 60° B. 90°
 C. 120° D. 以上答案均不对
- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$,则 $\triangle ABC$ ()
 A. 一定是锐角三角形
 B. 一定是直角三角形
 C. 一定是钝角三角形
 D. 是锐角或直角三角形
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ, AC=16$,三角形的面积为 $220\sqrt{3}$,则 BC 的长为 ()
 A. $20\sqrt{6}$ B. 75 C. 51 D. 49

二、填空题

- 在 $\triangle ABC$ 中,若三边 a, b, c 满足 $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{3}{a+b+c}$,则 $C =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, BC 边上的中线长为 m ,用三边 a, b, c 表示 m ,其结果为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a=6, B=30^\circ, C=120^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.
- 三角形两边长分别为3 cm, 5 cm,其夹角的余弦是方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根,则此三角形的面积是_____.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,且 $\cos A = \frac{4}{5}$.
 (1)求 $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$ 的值;
 (2)若 $b=2, \triangle ABC$ 的面积 $S=3$,求 a .