

一九八〇年

全国弹性与塑性力学学术交流会
论文选集

下册

1980年6月 重庆

板壳力学、稳定及动力学

(下册)

- 35 轴对称圆环壳的一般解
清华大学 钱伟长 邵思梁
- 36 悬臂矩形板弯曲
清华大学 张福范
- 37 两相邻边固定两相邻边自由的矩形板
清华大学 张福范
- 38 在不连续荷载作用下的悬臂矩形板的弯曲
清华大学 张福范
- 39 悬臂矩形板的不对称弯曲
清华大学 张福范
- 40 弹性基础板的变分解法
华东水利学院 傅作新
- 41 解两条边任意支承的连续矩形板
华中工学院 黄玉盈
- 42 均布载荷作用下的弹性厚板问题
北京工业学院 薛大为
- 43 厚管板的等效弹性常数
清华大学 钱伟长 戴福隆
- 44 扁壳圆孔附近的应力集中
清华大学 龙驭球 包世华
- 45 厚环壳的扭转
重庆大学 江秉琛
- 46 扁壳大挠度问题修正的海林格—赖斯内原理
上海交通大学 钱仍勍
- 47 A181F梳棉机滚筒变形计算
山东工学院 周旭飞 穆清仙
- 48 弹性薄板高阶近似方程
西安交通大学 匡震帮
- 49 装配式板的整体作用
新疆工学院 范缙生
- 50 集中载荷作用下横向铰接板的荷载分布计算
华南工学院 何逢康 朱跃铿
- 51 应用逐步加载法求圆板弯曲非线性问题
华南工学院 谭文宪
- 52 塑性动力学的数值方法

- 太原工学院 杨桂通
- 53 非正交级数展开法解弹性波衍射问题
工程力学所 苏士功 倪菊芬
- 54 裂纹对杆、板振动频谱的影响
西安交通大学 沈亚鹏 唐照千
- 55 弹性体系稳定性的近代理论和今后趋势
华中工学院 黄玉盈 金萝石 雷国璞
- 56 网格整体加筋圆筒壳稳定性试验研究
七机部七〇二所 王立祥
- 57 应力应变六参数方程及其在结构稳定性的计算和实验中的应用
哈尔滨船舶工程学院 罗培林
- 58 以环肋加强的园柱壳在液压作用下的总体稳定性
清华大学 黄克智 郑兆昌
- 59 两对边简支加肋矩形板自由振动的变分解法
武汉水利电力学院 史述昭
- 60 四边简支矩形板稳定问题的弹性力学解
科学院力学所 柳春图
- 61 双层金属截头扁锥壳的热稳定性
中国科技大学 刘人怀
- 62 用边界假想载荷计算薄板的热弯曲和热冲击
同济大学 张相庭
- 63 考虑初始缺陷的环肋薄壳的弹塑性稳定理论
大连工学院 周承倜

轴对称园环壳的一般解

钱伟长 郑思梁



清华大学基础部力学教研组

1980.2.

轴对称圆环壳的一般解

清华大学基础部 钱伟长 郑思梁

摘 要

本文是前文^[1]的推广,它不限于细环壳 $\alpha = a/R \ll 1$ 的假定,其中 a 为环壳的截面半径, R 为环壳的总体半径。提出了轴对称圆环壳在 $0 \leq \alpha < 1$ 范围内的一般解,本文的解可以用来解决波纹壳、热膨胀器、高压容器的过渡部分和波登管等实用问题。本文的结果是前人从未求得的圆环壳的一般解。

一、基本方程及非齐次解

在 Love—Kirchhoff 薄壳假定下, В. В. Новожилов 导出的轴对称环壳复变量方程为:

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + 2\mu i \sin \varphi V = 2\mu P_0 \cos \varphi \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad V = -\frac{4\mu^2 D}{\alpha a^2} (1 + \alpha \sin \varphi) \chi + i \left\{ \frac{2\mu}{\alpha} \frac{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}{\sin \varphi} Q - 2\mu \frac{Q_0}{\alpha} \cot \varphi \right\} \quad (1a)$$

$$P_0 = -\frac{1}{2} \alpha q a i + \frac{Q_0}{\alpha} 2\mu \quad (1b)$$

式中 $\alpha = a/R$ $\mu \cong \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2}{Rh}$, ν ——泊桑比, h ——壳的厚度, q ——壳壁所受分布载荷(外向为正), Q_0 —— $\varphi = 0$ 处的剪力, χ 和 Q 分别为壳的轴向转角变形和剪力。

如果根据(1)式求得解 V , 我们可以用它的虚数部分 ($I_m V$) 和实数部分 ($R_e V$) 来表达内力和变形, 内力素表达式为:

$$N_\varphi = -\frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1 + \alpha \sin \varphi)^2} I_m V + \frac{1}{2} q a \frac{(2 + \alpha \sin \varphi)}{1 + \alpha \sin \varphi} + Q_0 \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}$$

$$N_\theta = -\frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{I_m V}{1 + \alpha \sin \varphi} \right] + \frac{1}{2} q a - Q_0 \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}$$

$$M_{\varphi} = \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{R_e V}{1 + \alpha \sin \varphi} \right] + \nu \frac{\alpha \cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} R_e V \right\} \quad (2)$$

$$M_{\theta} = \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \nu \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{R_e V}{1 + \alpha \sin \varphi} \right] + \frac{\alpha \cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} R_e V \right\}$$

$$Q = \frac{\alpha}{2\mu} \frac{\sin \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} I_m V + Q_0 \frac{\cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}$$

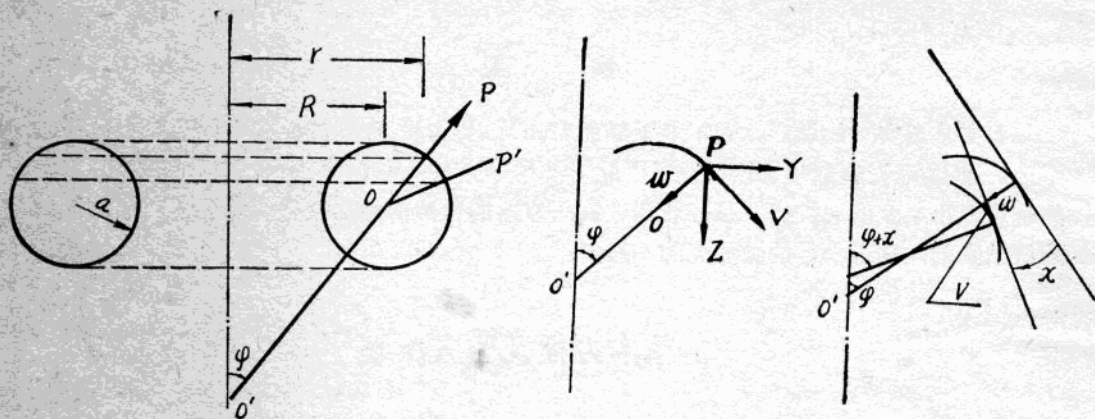


图 1 环壳的尺寸、坐标、位移和转角变形

轴向切线的变形转角 χ 、各点的径向位移 Y 和轴向位移 Z 的表达式为:

$$\chi = - \frac{R_e V}{E h \alpha (1 + \alpha \sin \varphi)}$$

$$Y = \frac{R}{E h} (1 + \alpha \sin \varphi) (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) \quad (3)$$

$$Z = Z_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{E h} \frac{\cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)} R_e V d\varphi$$

式中 E ——弹性系数。 $Z_0 = Z_{\varphi=\varphi_0}$

方程 (1) 的非齐次解设为 V^*

$$\begin{aligned} V^* = & -2P_0 \{ A_1 \cos \varphi + A_2 \sin 2\varphi - A_3 \cos 3\varphi - A_4 \sin 4\varphi + A_5 \cos 5\varphi + \\ & + A_6 \sin 6\varphi - A_7 \cos 7\varphi - A_8 \sin 8\varphi + \dots + A_{4n+1} \cos (4n+1)\varphi + \\ & + A_{4n+2} \sin (4n+2)\varphi - A_{4n+3} \cos (4n+3)\varphi - A_{4n+4} \sin (4n+4)\varphi + \\ & + \dots \} \end{aligned} \quad (4)$$

代入 (1), 恒等两端有关项的系数, 并利用三角关系式

$$\sin n\varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} [\cos (n-1)\varphi - \cos (n+1)\varphi]$$

$$\cos n\varphi \sin \varphi = -\frac{1}{2} [\sin (n-1)\varphi - \sin (n+1)\varphi]$$

得递推关系

$$A_1 = \frac{1}{\frac{1}{\mu} - i(1+i\frac{2\cdot 3}{2\mu}\alpha)\frac{A_2}{A_1}} \quad (5A)$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{i\left[1+i\frac{(n-1)(n-2)}{2\mu}\alpha\right]}{\frac{n^2}{\mu} - i\left[1+i\frac{(n+1)(n+2)}{2\mu}\alpha\right]\frac{A_{n+1}}{A_n}} \quad (5B)$$

(n = 1, 2, 3...)

令

$$S_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \quad (6)$$

很易证明

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \quad (7)$$

所以, 根据 O. Perron 定理^[3], 连分式的极限比例收敛至 (7) 式的小根, 于是, 当 $\alpha < 1$ 时

$$|S| < 1 \quad (8)$$

亦即 (4) 是绝对收敛的。

在实际计算中, 可以直接利用 (5B), 逐一计算系数比值 $\frac{A_n}{A_{n-1}}, \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} \dots \frac{A_4}{A_3}, \frac{A_3}{A_2}, \frac{A_2}{A_1}$, 然后代入 (5A) 求得 A_1 , 有了 A_1 之后, $A_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot A_1, \dots, A_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot A_{n-1}$, 从而计算得系数 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ 。

(4) 式的解是 B. B. Новожилов^[4] 求得的周期解, 因此, 它无法满足边界条件。为此, 我们必须求得 (1) 式的齐次解。

二、齐次解

(1) 的齐次方程可写成

$$\left[1 - \frac{\alpha i}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\right] \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \frac{\alpha}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \frac{dV}{d\varphi} + \mu(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})V = 0 \quad (9)$$

设其解为

$$V = e^{\lambda \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \varphi} \quad (10)$$

其中 λ 为待定的指数, C_n 为待定系数。代入 (9) 得有关系数的递推公式

$n > 0$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{-\{\mu - \frac{\alpha i}{2} [\lambda + i(n-1)] [\lambda + i(n-2)]\}}{(\lambda + in)^2 - \{\mu - \frac{\alpha i}{2} [\lambda + i(n+1)] [\lambda + i(n+2)]\}} \frac{C_{n+1}}{C_n} \quad (11A)$$

$n < 0$

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{\{\mu - \frac{\alpha i}{2} [\lambda + i(n+1)] [\lambda + i(n+2)]\}}{(\lambda + in)^2 + \{\mu - \frac{\alpha i}{2} [\lambda + i(n-1)] [\lambda + i(n-2)]\}} \frac{C_{n-1}}{C_n} \quad (11B)$$

(11)

$n = 0$

$$[\mu - \frac{\alpha i}{2} (\lambda - i)(\lambda - 2i)] \frac{C_{-1}}{C_0} + \lambda^2 - [\mu - \frac{\alpha i}{2} (\lambda + i)(\lambda + 2i)] \frac{C_1}{C_0} = 0 \quad (11C)$$

令

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{C_n}{C_{n-1}} & n > 0 \\ S_n^{(2)} &= \frac{C_n}{C_{n+1}} & n < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

容易证明

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = i \left(\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \right) \\ |S^{(1)}| &= \frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \\ S^{(2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = i \left(-\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \right) \\ |S^{(2)}| &= -\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\alpha < 1$

正如文^[2]所证明, 级数的系数比收敛到极限二次式的“大根”, 而连分式则收敛至“小根”, 所以它们是收敛的。

由 (11) 式, 利用迭代法, 可以得到 λ 及 C_n 系数值。

必须指出, 如果将 λ 改为 $-\lambda$, 则 (11) 不变其差别只在于有关的 $\frac{C_{-n}}{C_0}$, $\frac{C_n}{C_0}$ 相互对调而已, 因此

$$V_{(1)} = e^{\lambda\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \varphi} \quad (14)$$

$$V_{(2)} = e^{-\lambda\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n C_n e^{-i n \varphi}$$

是一对独立解。 λ 、 $\frac{C_n}{C_{n-1}} (n>0)$ 、 $\frac{C_n}{C_{n+1}} (n<0)$...都是复数。

令

$$\lambda = \beta + i\gamma, \quad \frac{C_n}{C_0} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n), \quad \frac{C_{-n}}{C_0} = \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) \quad (15)$$

则 $V_{(1)}$ 、 $V_{(2)}$ 可表为

$$V_{(1)} = e^{\beta\varphi} (\cos \gamma\varphi + i \sin \gamma\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \varphi} \quad (16)$$

$$V_{(2)} = e^{-\beta\varphi} (\cos \gamma\varphi - i \sin \gamma\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n C_n e^{-i n \varphi}$$

如果环壳的区域为 $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ，其中 $\varphi = \varphi_1$ ， $\varphi = \varphi_2$ 为壳的两条边界，我们认为在处理边值问题时，最方便合用两个独立的齐次解，可写成

$$V_{(1)} = (C_0' + i \bar{C}_0') e^{-\beta(\varphi_2 - \varphi)} (\cos \gamma\varphi + i \sin \gamma\varphi) [f_1(\varphi) + i f_2(\varphi)] \quad (17)$$

$$V_{(2)} = (B_0' + i \bar{B}_0') e^{-\beta(\varphi - \varphi_1)} (\cos \gamma\varphi - i \sin \gamma\varphi) [g_1(\varphi) + i g_2(\varphi)]$$

式中 $f_1(\varphi)$ 、 $f_2(\varphi)$ 、 $g_1(\varphi)$ 和 $g_2(\varphi)$ 为三角级数形式的实函数， C_0' 、 $\bar{C}_0'$ 、 B_0' 及 $\bar{B}_0'$ 为待定的实数

$$f_1(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\varphi - q_n' \sin n\varphi) \quad (18A)$$

$$f_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n' \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \quad (18B)$$

$$g_1(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\varphi + q_n' \sin n\varphi) \quad (18C)$$

$$g_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-p_n' \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \quad (18D)$$

其中

$$p_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{-n}), \quad q_n = \frac{1}{2}(b_n + b_{-n}), \quad p_n' = \frac{1}{2}(a_n - a_{-n}), \quad q_n' = \frac{1}{2}(b_n - b_{-n}) \quad (19)$$

由于 (17) 的解中有 $e^{-\beta(\varphi - \varphi_1)}$ 和 $e^{-\beta(\varphi_2 - \varphi)}$ ，所以这些解在远离边界时衰减很快，这种衰减的性质指出， $V_{(1)}$ 、 $V_{(2)}$ 都是代表边界效应性质的应力部分；在壳的内部，其应力分布主要决定于非齐次解。其次，上述齐次解适用于壳的全域，没有奇点，

数解的收敛域的限制,完全是由于采取级数解的形式所引起的,并不是微分方程解的本质问题。

三、 $\lambda = \beta + i\gamma$ 的计算

根据(1)式,可以看到 λ 为 μ 和 α 的函数,对细环壳而言, $\alpha=0$,所以 $\lambda(\mu, 0)$ 为 μ 的函数。对于实际的薄环壳而言, $h/a \leq \frac{1}{10}$,于是,对于已给的 μ 值而言,对 $\alpha = \frac{a}{R}$ 有一定限制,因为

$$\mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2}{Rh} \geq 10\alpha\sqrt{3(1-\nu^2)} \quad (20)$$

或

$$\alpha \leq \frac{\mu}{10\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{\mu}{16.52} \quad (21)$$

所以,对于薄壳而言, $\mu=1$ 时, $\alpha \leq 0.06$, $\mu=10$ 时 $\alpha \leq 0.605$,依此类推,我们将在(21)式的限制条件下,用迭代法计算(11)式的 λ 值。

设 λ_k 为第 k 次的迭代值。从(11c)式,有

$$\lambda_k = \sqrt{T_1(\lambda_{k-1}) - T_2(\lambda_{k-1})} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1(\lambda_{k-1}) &= \left[\mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda_{k-1} + i)(\lambda_{k-1} + 2i) \right] \left(\frac{C_1}{C_0} \right)_{k-1} \\ T_2(\lambda_{k-1}) &= \left[\mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda_{k-1} - i)(\lambda_{k-1} - 2i) \right] \left(\frac{C_{-1}}{C_0} \right)_{k-1} \end{aligned}$$

而且有 $n > 0$ 时

$$\left(\frac{C_n}{C_{n-1}} \right)_{k-1} = \frac{-\left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1} + i(n-1)][\lambda_{k-1} + i(n-2)] \right\}}{(\lambda_{k-1} + in)^2 - \left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1} + i(n+1)][\lambda_{k-1} + i(n+2)] \right\}} \left(\frac{C_{n+1}}{C_n} \right)_{k-1} \quad (23)$$

(23A)

$n < 0$ 时

$$\left(\frac{C_n}{C_{n+1}} \right)_{k-1} = \frac{\left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1} + i(n+1)][\lambda_{k-1} + i(n+2)] \right\}}{(\lambda_{k-1} + in)^2 + \left\{ \mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1} + i(n-1)][\lambda_{k-1} + i(n-2)] \right\}} \left(\frac{C_{n-1}}{C_n} \right)_{k-1}$$

(23B)

求(22)式的解,实际上是在 (y, λ) 平面中,求曲线

$$\begin{aligned} y &= \lambda \\ y &= \sqrt{T_1(\lambda) - T_2(\lambda)} \end{aligned} \quad (24)$$

的交点。当然，因为 $\lambda = \beta + i\gamma$ 和 $\sqrt{T_1(\lambda) - T_2(\lambda)}$ 都是复数，所以，其说明比较复杂。为了简单起见，先设 $\alpha = 0$ ，于是不论 λ 和 $\sqrt{T_1(\lambda) - T_2(\lambda)}$ 都是实数。通过实际计算，(24) 式的两条曲线有图 2(a, b, c) 三种情况：

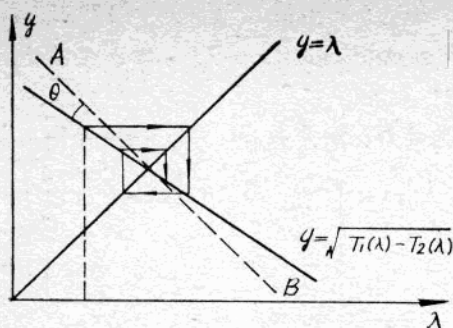


图 2a $AB \perp (y = \lambda)$ $45^\circ > \theta > 0$

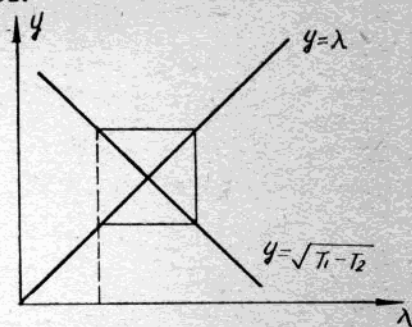


图 2b $y = \lambda$ 和 $y = \sqrt{T_1 - T_2}$ 正交

当图 2a 中， $45^\circ > \theta > 0$ 时，明显地看到，当用 (22) 式的简单迭代就能达到收敛于交点的结果。这是多数的情况，当 $\mu < 1$ 时是这样的情况，简单迭代就能得到预期的结果。

在图 2b 中， $y = \lambda$ 和 $y = \sqrt{T_1 - T_2}$ 正交，于是，当用 (22) 式的简单迭代时，达到临界状态，往复迭代，既不收敛也不发散。

在图 2c 中， $y = \lambda$ 和 $y = \sqrt{T_1 - T_2}$ 不正交，设 AB 和 $y = \lambda$ 正交， $y = \sqrt{T_1 - T_2}$ 和 AB 的交角 θ 和图 2a 相反， θ 向上，很容易看到，当用 (22) 式进行简单迭代时，是发散的。

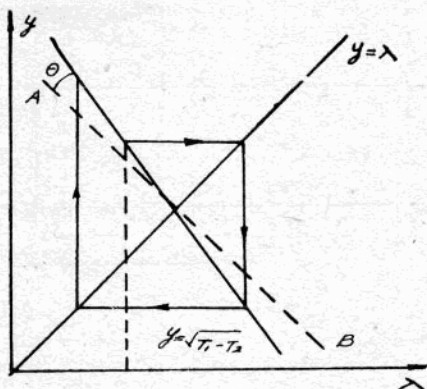


图 2c $y = \lambda$ 和 $y = \sqrt{T_1 - T_2}$ 相交处， θ 从 AB 线向上

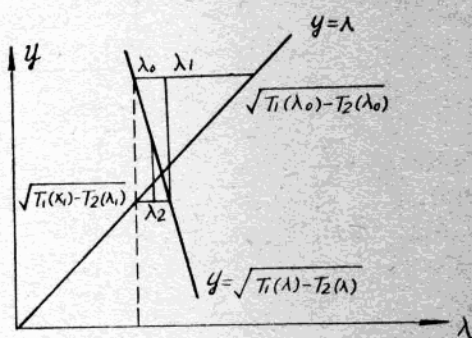


图 3 折算迭代法

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \eta \lambda_0 + (1 - \eta) \sqrt{T_1(\lambda_0) - T_2(\lambda_0)} \\ \lambda_2 &= \eta \lambda_1 + (1 - \eta) \sqrt{T_1(\lambda_1) - T_2(\lambda_1)}\end{aligned}$$

在遇到图 2b 和图 2c 的情况时，我们不能用简单迭代。我们建议采用折算迭代法，称

$$\lambda_k = \eta \lambda_{k-1} + (1 - \eta) \sqrt{T_1(\lambda_{k-1}) - T_2(\lambda_{k-1})}$$

其中 η 取大于 $\frac{1}{2}$ 的数 $\frac{1}{2} < \eta < 1$ 。当图 2c 中的 θ 越大 ($\leq 45^\circ$) 时, η 应该取越大的值。在 $\mu = 3 \sim 6$ 之间, η 有时要取到 99/100 这样接近于 1 的数。见图 3, 这样的折算迭代可以收到收敛的效果。

当曲线 $y = \sqrt{T_1(\lambda) - T_2(\lambda)}$ 很接近于 y 轴的平行线时, 要求 λ_0 值的选择很接近于交点, 不然, 稍一偏离, $\sqrt{T_1(\lambda) - T_2(\lambda)}$ 值就相差很大, 所以, 要求用拉格朗日插法从 μ 、 α 值附近的已知 $\lambda = \beta + i\gamma$ 值中估计 λ_0 值。

λ 计算结果见表 I、II 及图 4a、b。有关非齐次解系数 A_n 和齐次解系数 a_n 、 a_{-n} 、 b_n 和 b_{-n} , 因篇幅关系将另文发表。

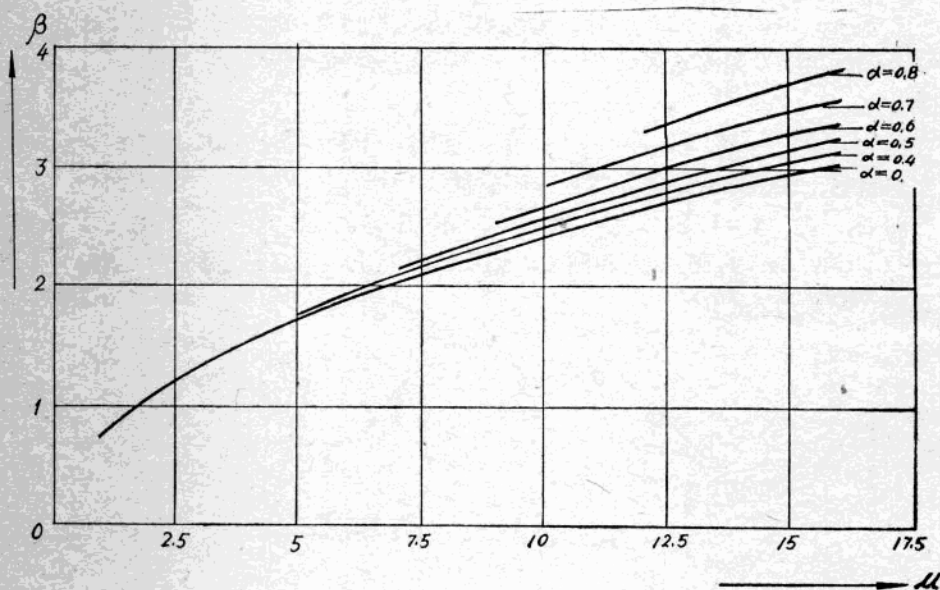


图 4a $\mu-\beta$ 关系曲线

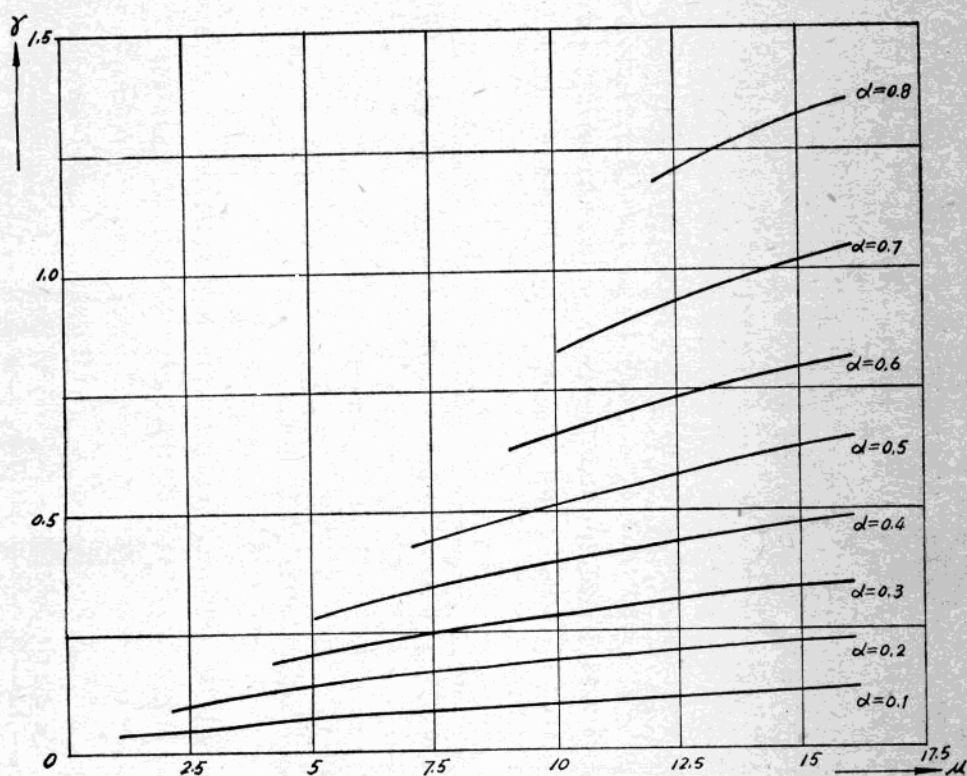


图 4b $\mu-\gamma$ 关系曲线

表 I $\lambda = \beta + i\gamma$ 中的 β 值

$\frac{\alpha}{\mu}$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.015
0.1	0.137352 ₂	0.137354 ₁	0.137359 ₀	0.137369 ₀	0.137383 ₁	0.137400 ₀	0.137421 ₇	0.137446 ₇				
0.2	0.256150 ₁	0.256151 ₂	0.256154 ₄	0.256159 ₇	0.256167 ₂	0.256176 ₈	0.256188 ₅	0.256202 ₃				
0.3	0.353357 ₅	0.353358 ₃	0.353360 ₅	0.353364 ₂	0.353369 ₄	0.353376 ₀	0.353384 ₂	0.353393 ₈	0.353404 ₉	0.353417 ₅	0.353431 ₅	0.353523 ₇
0.4	0.433513 ₄	0.433513 ₀	0.433515 ₇	0.433518 ₅	0.433522 ₆	0.433527 ₇	0.433534 ₁	0.433541 ₅	0.433554 ₄	0.433559 ₉	0.433570 ₈	0.433642 ₇
0.5	0.501378 ₆	0.501379 ₁	0.501380 ₅	0.501383 ₀	0.501386 ₃	0.501390 ₇	0.501396 ₀	0.501402 ₃	0.501409 ₉	0.501417 ₈	0.501426 ₉	0.501487 ₄
0.6	0.560412 ₇	0.560413 ₀	0.560414 ₄	0.560416 ₀	0.560419 ₆	0.560423 ₆	0.560428 ₂	0.560433 ₈	0.560440 ₂	0.560447 ₆	0.560455 ₈	0.560509 ₃
0.7	0.612966 ₁	0.612966 ₀	0.612967 ₈	0.612969 ₃	0.612972 ₉	0.612976 ₂	0.612980 ₉	0.612985 ₈	0.612992 ₁	0.612998 ₀	0.613006 ₂	0.613056 ₅
0.8	0.660637 ₆	0.660637 ₉	0.660639 ₁	0.660641 ₀	0.660643 ₇	0.660647 ₁	0.660651 ₃	0.660656 ₃	0.660662 ₃	0.660668 ₅	0.660675 ₈	0.660723 ₃
$\frac{\alpha}{\mu}$	0	0.010	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.06	0.07	0.08
0.3	0.353357 ₅		0.353653 ₀									
0.4	0.433513 ₄		0.433743 ₅	0.433872 ₅								
0.5	0.501378 ₆		0.501572 ₃	0.501680 ₈	0.501813 ₅	0.501970 ₇						
0.6	0.560412 ₇		0.560585 ₄	0.560681 ₆	0.560800 ₈	0.560940 ₅	0.561101 ₈					
0.7	0.612966 ₁		0.613126 ₂	0.613216 ₂	0.613326 ₃	0.613456 ₀	0.613606 ₂	0.613777 ₀				
0.8	0.660637 ₆		0.660790 ₀	0.660876 ₀	0.660981 ₇	0.661105 ₀	0.661249 ₃	0.661412 ₂	0.661594 ₄			
0.9	0.704534 ₄		0.704682 ₈		0.704869 ₆		0.705130 ₈		0.705465 ₈			
1	0.745441 ₄	0.745477 ₇	0.745587 ₆		0.745771 ₉		0.746029 ₈		0.746360 ₇	0.746766 ₃		
2	1.066549 ₃	1.066589 ₃	1.066704 ₆		1.066899 ₁		1.067170 ₄		1.067520 ₅	1.067948 ₀	1.068454 ₁	1.069033 ₇

表 I $\lambda = \beta + i\gamma$ 中的 β 值 (续)

$\alpha \backslash \mu$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.745441 ₄	0.749129 ₃								
2	1.066549 ₃	1.070446 ₁	1.082331 ₇							
3	1.310949 ₂	1.315140 ₆	1.327948 ₄							
4	1.516731 ₁	1.521217 ₅	1.534943 ₂	1.558767 ₀						
5	1.697751 ₉	1.702535 ₂	1.717180 ₀	1.742628 ₈	1.780710 ₄					
6	1.861235 ₀	1.866307 ₃	1.881839 ₉	1.908858 ₁	1.949336 ₉					
7	2.011469 ₃	2.016818 ₂	2.033203 ₃	2.061719 ₈	2.104487 ₈	2.165255 ₆				
8	2.151236 ₄	2.156850 ₆	2.174051 ₁	2.204003 ₁	2.248956 ₀	2.312891 ₂				
9	2.282461 ₃	2.288328 ₅	2.306312 ₄	2.337639 ₇	2.384685 ₁	2.451649 ₀	2.546099 ₂			
10	2.406530 ₁	2.412653 ₇	2.431390 ₁	2.464038 ₆	2.513093 ₄	2.582961 ₄	2.681586 ₇	2.824532 ₇		
11	2.524527 ₉	2.530877 ₂	2.550438 ₉	2.584263 ₈	2.635252 ₂	2.707912 ₈	2.810548 ₅	2.959425 ₇		
12	2.637244 ₁	2.643820 ₃	2.663984 ₀	2.699137 ₈	2.751992 ₅	2.827346 ₂	2.933847 ₂	3.088434 ₆	3.330356 ₇	
13	2.745334 ₇	2.752130 ₁	2.772972 ₈	2.809318 ₁	2.863976 ₇	2.941935 ₃	3.052168 ₀	3.212264 ₄	3.462984 ₇	
14	2.849326 ₃	2.856337 ₇	2.877838 ₇	2.915336 ₅	2.971746 ₄	3.052225 ₁	3.166067 ₈	3.331494 ₉	3.590716 ₆	4.082103 ₅
15	2.949655 ₃	2.956875 ₂	2.979014 ₆	3.017632 ₉	3.075740 ₀	3.158665 ₂	3.276011 ₉	3.446601 ₄	3.714054 ₆	4.221358 ₈
16	3.046682 ₇	3.054104 ₀	3.076865 ₈	3.116573 ₆	3.176330 ₆	3.261633 ₅	3.382382 ₉	3.557986 ₉	3.833429 ₈	4.356166 ₄

表 I $\lambda = \beta + i\gamma$ 中的 γ 值

α	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.015
0.1	0	0.000658 ₉	0.001317 ₈	0.001976 ₉	0.002635 ₁	0.003293 ₅	0.003951 ₆	0.004609 ₄				
0.2	0	0.000569 ₁	0.001138 ₂	0.001707 ₃	0.002276 ₃	0.002845 ₃	0.003414 ₂	0.003983 ₁				
0.3	0	0.000495 ₉	0.000991 ₈	0.001487 ₇	0.001983 ₅	0.002479 ₄	0.002975 ₂	0.003471 ₀	0.003966 ₈	0.004462 ₅	0.004958 ₁	0.007435 ₇
0.4	0	0.000448 ₉	0.000897 ₃	0.001345 ₉	0.001794 ₅	0.002243 ₁	0.002691 ₇	0.003140 ₃	0.003588 ₉	0.004037 ₄	0.004485 ₉	0.006728 ₂
0.5	0	0.000421 ₀	0.000842 ₁	0.001263 ₁	0.001684 ₁	0.002105 ₁	0.002526 ₃	0.002947 ₁	0.003368 ₁	0.003789 ₁	0.004210 ₁	0.006314 ₈
0.6	0	0.000406 ₉	0.000813 ₂	0.001219 ₉	0.001625 ₉	0.002032 ₃	0.002438 ₈	0.002845 ₃	0.003251 ₈	0.003658 ₂	0.004064 ₇	0.006096 ₈
0.7	0	0.000400 ₄	0.000800 ₈	0.001201 ₁	0.001601 ₄	0.002001 ₈	0.002402 ₂	0.002802 ₆	0.003209 ₀	0.003603 ₃	0.004003 ₈	0.006005 ₄
0.8	0	0.000399 ₃	0.000799 ₄	0.001199 ₁	0.001598 ₈	0.001998 ₉	0.002398 ₃	0.002797 ₉	0.003197 ₇	0.003597 ₄	0.003997 ₁	0.005995 ₇
α	0	0.010	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.070	0.080
0.3	0		0.009911 ₁									
0.4	0		0.008969 ₆	0.011209 ₈								
0.5	0		0.008419 ₁	0.010522 ₉	0.012625 ₈	0.014728 ₆						
0.6	0		0.008129 ₀	0.010160 ₆	0.012192 ₁	0.014223 ₁	0.016253 ₈					
0.7	0		0.008007 ₁	0.010008 ₇	0.012010 ₃	0.014011 ₈	0.016013 ₆	0.018014 ₃				
0.8	0		0.007994 ₁	0.009993 ₀	0.011991 ₆	0.013990 ₄	0.015989 ₂	0.017988 ₂	0.019987 ₂			
0.9	0		0.008051 ₈		0.012078 ₀		0.016105 ₁		0.020133 ₀			
1	0	0.004077 ₀	0.008154 ₂		0.012232 ₁		0.016310 ₈		0.020391 ₁	0.024473 ₂		
2	0	0.004863 ₉	0.009728 ₅		0.014594 ₅		0.019462 ₆		0.024333 ₀	0.029208 ₂	0.034086 ₉	0.038970 ₈

表 II $\lambda = \beta + i\gamma$ 中的 γ 值 (续)

$\frac{\alpha}{\mu}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	0.040821 ₅								
2	0	0.048756 ₅	0.098252 ₃							
3	0	0.056004 ₁	0.113053 ₉							
4	0	0.062443 ₇	0.126187 ₀	0.192728 ₈						
5	0	0.068336 ₁	0.138182 ₉	0.211270 ₈	0.289859 ₉					
6	0	0.073787 ₈	0.149269 ₅	0.228384 ₂	0.313653 ₆					
7	0	0.078876 ₀	0.159610 ₉	0.244332 ₅	0.335801 ₄	0.438035 ₉				
8	0	0.083661 ₈	0.169334 ₁	0.259319 ₈	0.356595 ₈	0.465501 ₁				
9	0	0.088190 ₈	0.178534 ₉	0.273495 ₁	0.376255 ₈	0.491446 ₂	0.626622 ₇			
10	0	0.092502 ₀	0.187291 ₂	0.286978 ₈	0.394944 ₃	0.516097 ₄	0.658437 ₃	0.836920 ₅		
11	0	0.096623 ₀	0.195658 ₂	0.299860 ₇	0.412795 ₀	0.539629 ₅	0.688789 ₅	0.876019 ₀		
12	0	0.100574 ₉	0.203684 ₅	0.312215 ₇	0.429908 ₃	0.562190 ₅	0.717861 ₉	0.913449 ₂	1.186380 ₀	
13	0	0.104379 ₅	0.211406 ₉	0.324103 ₄	0.446369 ₆	0.583865 ₆	0.745806 ₈	0.949407 ₁	1.233721 ₇	
14	0	0.108052 ₁	0.218860 ₂	0.335571 ₁	0.462246 ₃	0.604774 ₇	0.772743 ₈	0.984054 ₂	1.279319 ₈	1.790849 ₃
15	0	0.111603 ₂	0.226068 ₈	0.346661 ₇	0.477594 ₈	0.624987 ₉	0.798773 ₇	1.017523 ₁	1.323353 ₄	1.853455 ₄
16	0	0.115045 ₃	0.233055 ₃	0.357408 ₉	0.492471 ₀	0.644566 ₄	0.823984 ₉	1.049929 ₀	1.365962 ₄	1.913985 ₂