概率论基础与数理统计
习题解答

（复旦大学编）

一九六六年六月

第一章　事件与概率

1．在某城市中，共发行三种报纸A、B、C，在这城市的居民中，订购A的占45%，订购B的占35%，订购C的占30%，同时订购A及B的占10%，同时订购A及C的占8%，同时订购B及C的占5%，同时订购A、B、C的占3%，试求下面百分率．

（1）只订购A的；　　（2）只订购A及B的；

（3）只订购一种报纸的；（4）正好订购两种报纸的；

（5）至少订购一种报纸的；（6）不订购任何报纸的．

解：（1）"只订购A的"这一事件为：$A\bar{B}\bar{C}$，其百分率

$$P = P(A\bar{B}\bar{C}) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$$
$$= 45\% - 10\% - 8\% + 3\%$$
$$= 30\%$$

（2）"只订购A及B的"这一事件为：$AB\bar{C}$，其百分率：

$$P = P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC)$$
$$= 10\% - 3\% = 7\%$$

（3）"只订购一种报纸的"这一事件为：$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

$$P = P(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C)$$
$$= P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$$
$$= 30\% + 23\% + 20\% = 73\%$$

（4）"正好订购两种报纸的"这一事件为：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$

$$P = P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC)$$
$$= 7\% + 5\% + 2\% = 14\%$$

（5）"至少订购一种报纸的"这一事件为：$A\cup B\cup C$，

$$P = P(A\cup B\cup C)$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$= 90\%$$

（6）"不订购任何报纸的"这一事件为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$$P = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1-P(A\cup B\cup C)$$
$$= 10\%$$

2．若 A、B、C是随机事件，说明下列关系式的概率意义：

（1）$ABC = A$；　　（2）$A\cup B\cup C = A$；

（3）$AB\subset C$；　　（4）$A\subset \overline{BC}$．

解．（1）$ABC=A$，则$A\subset ABC$（$ABC\subset A$，按积的定义是必然的）。这说明当$\omega\in A$时，必有$\omega\in B$与$\omega\in C$，于是$A\subset BC$，说明A的发生是在B、C同时发生的条件下发生．若有$A\subset BC$，$ABC=A$，$P(ABC)=P(A)$．

（2）$A\cup B\cup C=A$，则$A\cup B\cup C\subset A$，即$\omega\in A\cup B\cup C$时，包括$\omega\in A$，$\omega\in B$或$\omega\in C$时，总有$\omega\in A$，故$B\cup C\subset A$这说明B或C的发生是在A发生的条件下才能发生，也就是说B或C发生，A必发生。

（3）$AB\subset C$，则若A且B发生，必有C发生，或者若$\omega\in A$，且$\omega\in B$，则必有$\omega\in C$，即A，B同时发生，C必发生；也可说成，在C发生下，A，B方能同时发生．

（4）$A\subset\overline{BC}$，若$\omega\in A$，则必有$\omega\in\overline{BC}=\bar{B}\cup\bar{C}$，这说明当A发生时，必有$\bar{B}$或$\bar{C}$发生，即B、C不能同时发生．

3．试把$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots A_n$表示成n个两两互不相容事件的和．

解：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n$

$= A_1 \cup (\bar{A}_1 A_2) \cup (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \cup \cdots\cdots \cup (\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots\cdots \bar{A}_{n-1} A_n)$

4．在某班学生中任选一个同学，以事件A表示选到的是男同学，事件B表示选到的人不喜欢唱歌，事件C表示选到的人是运动员．（1）表述$AB\bar{C}$及$A\bar{B}C$；（2）什么条件下成立$ABC=A$；（3）何时成立$\bar{C}\subset\bar{B}$；（4）何时同时成立$A=B$及$\bar{A}=C$．

解：（1）$AB\bar{C}$表示选的是一位男同学，不是运动员也不喜欢唱歌．

$A\bar{B}C$表示选的是一位男同学，喜欢唱歌，是运动员．

（2）$ABC=A$，则$A\subset ABC$，于是$A\subset BC$，"某班男同学是运动员，不喜欢唱歌的条件下"有$ABC=A$．

（3）$\bar{C}\subset B$，选到不是运动员的就一定不喜欢唱歌．

（4）由$A=B$，得$\bar{A}=\bar{B}$，再考虑到$\bar{A}=C$，于是$\bar{A}=\bar{B}=C$即$A=B=\bar{C}$，表明是男生就一定不喜欢唱歌，也一定不是运动员或者是运动员的不喜欢唱歌的是男同学．

5、用摸球模型造一例，指出样本空间及各种事件这种

解：（略）

6．若A、B、C、D是四个事件，试用这四个事件表示下列各事件：（1）这四个事件至少发生一个，

（2）恰好发生两个；

（3）A、B都发生，C，D都不发生；

（4）这四个事件都不发生，

（5）这四个事件中至少发生一个．

解：（1）$A\cup B\cup C\cup D$

（2）$AB\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD$

（3）$AB\bar{C}\bar{D}$

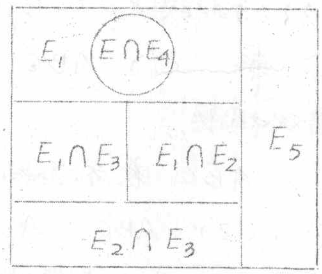
（4）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

（5）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

7、从0，1，2，……9中随机地取出5个（可重复），以E_i记某些数正好出现i次这一事件（例如52353都属于E_1，也属于E_2及E_0），试用文图表示$E_0, E_1, \cdots, E_6$的关系。

解：分析一下E_i之间的关系：

$E_0=\Omega$



① 任一个样本点 $\omega\in E_0$，

∴ $E_0=\Omega$.

② 样本点 $\omega\in E_5$，则$\omega\notin E_j$，

其中 $j=1,2,3,4,6$.

③ 如果样本点 $\omega\in E_4$，必有$\omega\in E_1$，于是$E_4\subset E_1$，$\omega\notin E_2$，$\omega\notin E_3$.

④ 如果 $\omega\in E_3$，则有可能 $\omega\in E_2$，或也有可能 $\omega\in E_1$，但 $\omega\notin E_1E_2$.

⑤ E_6为不可能事件，记作Φ，Φ可以属于任何E_i，E_6不包括任何样本点.

8、证明下列等式

（1）$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

（2）$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=0$

（3）$\sum_{K=1}^{a-r}\binom{a}{K+r}\binom{b}{K}=\binom{a+b}{a-r}$

证明：（1）已知$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$，而

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$$

$$=\frac{n}{1!}+2\frac{n(n-1)}{2!}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+n\frac{n!}{n!}$$

$$=n\left[1+\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\right]$$

$$=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right]=n2^{n-1}$$

（2）已知 $(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}$$

$$=n\left[1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\right]$$

$$=n\left[\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]$$

$$=n\cdot 0=0$$

（3）已知 $\binom{n}{K}=\binom{n}{n-K}$ 而

$$S=\sum_{K=0}^{a-r}\binom{a}{K+r}\binom{b}{K}=\sum_{K=0}^{a-r}\binom{a}{a-K-r}\binom{b}{K}$$

$$=\binom{a}{a-r}\binom{b}{0}+\binom{a}{a-r-1}\binom{b}{1}+\cdots+\binom{a}{0}\binom{b}{a-r}$$

$$\because \binom{a}{0}\binom{b}{0}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$$

$$\therefore S=\binom{a+b}{a-r}$$

9、袋中有白球5只，黑球6只，陆续取出三球，求顺序为黑白黑的概率.

解：总的基本事件数 $n=A_{11}^3=11\times10\times9=990$，事件A包含的点数 $m=A_6^2\times C_5^1=6\times5\times5=150$，所以

$$P(A)=\frac{150}{990}=\frac{15}{99}\doteq0.15$$

或 $$P(A)=\frac{(C_6^2/C_3^2)C_5^1}{C_{11}^3}=\frac{C_6^2\cdot C_5^1}{C_{11}^3\cdot C_3^2}=\frac{5}{33}\doteq0.15$$

10、一部五本头的文集，按任意次序放到书架上去，试求下列概率：

（1）第一卷出现在旁边；

（2）第一卷和第五卷出现在旁边；

（3）第一卷或第五卷出现在旁边；

（4）第一卷及第五卷都不出现在旁边；

（5）第五卷正好在正中

解：总的点数 $n = A_5^5 = 5! = 120$

（1）"第一卷出现在旁边"这一事件A所含点数 $m = 2A_4^4 = 48$，$P(A) = \frac{48}{120} = 0.4$

（2）"第一卷及第五卷出现在旁边"这一事件A所含点数 $m = 2 \cdot A_3^3 = 12$，所以 $P(A) = \frac{12}{120} = 0.1$

（3）"第一卷或第五卷出现在旁边"这一事件A所含点数 $m = 2A_4^4 + 2A_4^4 = 4A_4^4 = 96$，所以

$$P(A) = \frac{96}{120} = 0.8$$

（4）"第一卷及第五卷都不出现在旁边"这一事件A所含点数 $m = A_3^2 \times A_3^3 = 6 \times 6 = 36$，所以

$$P(A) = \frac{36}{120} = 0.3$$

（5）"第五卷正好在正中"这一事件A所含点数 $m = A_4^4 = 24$.

$$P(A) = \frac{24}{120} = 0.2$$

11．把1，2，3，4，5诸数各写在一个小纸片上，任取其三张排成自左向右的次序，求所得数是偶数的概率

解：1至5个数字不重复的任取其三，排列的总数 $n = A_5^3$，排成偶数时，个位数有两种取法，2，4当它取定之后，前面二位数可从其余4个数字中取2个来排列，于是排列的种数 $m = 2A_4^2$，所以 $P = 2A_4^2 / A_5^3 = \frac{24}{60} = 0.4$．

12．在一个装有n只白球，n只黑球，n只红球的袋中，任取m只，求其中白、黑、红球分别有 $m_1, m_2, m_3 (m_1 + m_2 + m_3 = m)$ 只的概率．

解：总点数 $n=\binom{3n}{m}$ 事件A所含点数 $m=\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{n}{m_3}$ 所以

$$P(A)=\frac{\binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}\binom{n}{m_3}}{\binom{3n}{m}}$$

13、甲袋中有3只白球，7只红球，15只黑球，乙袋中有10只白球，6只红球，9只黑球，现从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率

解：总的点数 $n=\binom{25}{1}\binom{25}{1}=625$

A所含点数 $m=\binom{3}{1}\binom{10}{1}+\binom{7}{1}\binom{6}{1}+\binom{15}{1}\binom{9}{1}$

$=30+42+135=207$

所以 $P(A)=\frac{207}{625}=0.33$

14．由盛有号码1，2……N的球的箱子中，有放回地摸了n次球，依次记下其号码，试求这些号码按严格上升次序排列的概率．

解：总的点数 $n=N^n$，A含点数 $m=\binom{N}{n}$，所以

$$P(A)=\frac{\binom{N}{n}}{N^n}$$

15、在上题中这些号码按上升（不一定严格）次序排列的概率．

解：总点数 $n=N^n$

A含点数 $m=C_{n-1}^{0}C_N^{1}+C_{n-1}^{1}C_N^{2}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}C_N^{n-1}+C_{n-1}^{n-1}C_N^{n}$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{n-1}^{0}C_N^{1}+C_{n-1}^{1}C_N^{2}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}C_N^{n-1}+C_{n-1}^{n-1}C_N^{n}}{N^n}$$

注：理解的思路：当取出n个数全部相同时，可看成中间没有间壁，间壁数为0，

当n个数为两样数构成时，看成间壁数为1，

n个格子($n-1$个间壁)n个点

而间壁的位置有C_n^1种取法，……，当n个数均为不同的数字构成时，有$n-1$个间壁，有$n-1$个取法(如图)，而C_N^1表示n个数全相同的不同取法，C_N^2表示n个数由两样数构成的不同取法，……。

16．任意从数列1，2，……，N中不放回地取出n个数并按大小排列成$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_m < \cdots\cdots < x_n$，试求$x_m = M$的概率，这里$1 \leq M \leq N$。

解：由于取数是不放回的，故样本点的总数为C_N^n，取出来的数有$m-1$次取到$<M$的有C_{M-1}^{m-1}种可能的取法，大于M的有C_{N-M}^{n-m}种可能的取法，而等于M的只有一种取法，所以，可能的取法共有C_{M-1}^{m-1}，C_{N-M}^{n-m}种，于是所求概率为

$$P(A) = \frac{C_{M-1}^{m-1}\ C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

或者为$P(A) = C_n^{m-1} \cdot C_{n-m+1}^{n-m} A_{M-1}^{m-1} A_{N-M}^{n-m} \ / \ A_N^n$

17．上题中，若采用有放回取数，这时$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$试求$x_m = M$的概率。(参孜：王梓坤．概率论基础及其应用第一章13题)

解：由于每次抽取都可以从N个数中任取一个，故取n次所有可能的取法有N^n种，取出来的数有三类：$<M$；$=M$；$>M$．

如果我们固定K_1次取到$<M$的数．固定K_2次是取到$>M$的数，当然其余的数一定是取到M的．当次数固定后，$<M$的

有$(M-1)^{K_1}$种可能的取法，$>M$的有$(N-M)^{K_2}$种可能的取法，而$=M$的只有一种取法，即全是M，所以，可能的取法共有$(M-1)^{K_1}\cdot(N-M)^{K_2}$种，另一方面，次数可以有不同的固定方式，共有$C_n^{K_1}C_{n-K_1}^{K_2}$种，因此，$K_1$次取到$<M$的数，$K_2$次取到$>M$的数的可能的取法共有

$$C_n^{K_1}\cdot C_{n-K_1}^{K_2}(M-1)^{K_1}\cdot(N-M)^{K_2}\text{种}$$

设A表示事件"从小到大第n个数等于M"，事件A出现也就是K_1次取到$<M$的数，K_2次取到$>M$的数，$0\leq K_1\leq m-1$，$0\leq K_2\leq n-m$，因此，A包含的所有可能取法有

$$\sum_{K_1=0}^{m-1}\sum_{K_2=0}^{n-m}C_n^{K_1}C_{n-K_1}^{K_2}(m-1)^{K_1}(N-M)^{K_2}\text{种}$$

$$\therefore P(A)=\sum_{K_1=0}^{m-1}\sum_{K_2=0}^{n-m}C_n^{K_1}C_{n-K_1}^{K_2}(M-1)^{K_1}(N-M)^{K_2}/N^n$$

18、从6双不同的手套中任取4只，问其中恰有一双配对的概率是多少？

解：总点数$n=C_{12}^4=12\times11\times10\times9/4!=495$

A含点数$m=6\cdot4\cdot C_5^2=240$

$$\therefore P(A)=240/495=16/33$$

19、从n双不同的鞋子中任取$(2r<n)$只，求下列事件发生的概率.

（1）没有成对的鞋子；（2）只有一对鞋子；

（3）恰有两对鞋子；（4）有r对鞋子.

解：（费勒，概率论及其应用，P_{59}第26题）

总点数 $n=C_{2n}^{2r}$

（1）设A表"没有成对的鞋子"，A含点数$m=2^{2r}C_n^{2r}$，

所以，$P(A)=2^{2r}\cdot C_n^{2r}/C_{2n}^{2r}$

（2）设A表示"只有一对娃子"A含点数 $m=nC_2^2C_{n-1}^{2r-2}$

$2^{2r-2}=n\cdot 2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}$

$P(A)=n\cdot 2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}$

（3）设A表"恰有两对娃子"，A含点数 $m=C_n^2\cdot$

$C_{n-2}^{2r-4}\cdot 2^{2r-4}$

$P(A)=2^{2r-4}C_n^2\cdot C_{n-2}^{2r-4}/C_{2n}^{2r}$

（4）设A表"有r对娃子"，A含点数 $m=C_m^r\cdot C_n^{2n-2r}\cdot$

$2^{2r-2r}=C_n^r$

$P(A)=C_n^r/C_{2n}^{2r}$

20、袋中有n只球，记有号码1，2，…，n，求下列事件的概率.

（1）任意取出2球，号码为1，2；

（2）任意取出3球，没有号码1；

（3）任意取出5球，号码1，2，3中至少出现一个

解.（1）设A表"任意取出2球，号码为1，2"总的点数 $n=C_n^2$，A含点数 $m=1$，所以

$P(A)=1/C_n^2$

（2）设B表为"任取3球，没有号码1"，总的点数 $n=C_n^3$，B含点数 $m=C_{n-1}^3$，所以

$P(B)=C_{n-1}^3/C_n^3$

（3）设A表"任意取出5球，号码1，2，3中至少出现一个"，总样本点数 $N=C_n^5$，A所含点数 $m=C_n^5C_{n-3}^5$，故所求概率为：

$$P(A)=\frac{C_n^5\cdot C_{n-3}^5}{C_n^5}$$

21、袋中装有1，2，…，N号的球各一个，采用（1）有放回；（2）不放回方式摸球，试求在第K次摸球时首次摸到1号球的概率.

解：（1）有放回，总的样本点数 $n=N^K$，A含点数 $m=(N-1)^{K-1}$

$$\therefore P(A)=\frac{(N-1)^{K-1}}{N^K}$$

（2）不放回，总点数 $n=A_N^K$，A含点数 $m=A_{N-1}^{K-1}$

$$\therefore P(A)=A_{N-1}^{K-1}/A_N^K$$

22、甲有 $n+1$ 个硬币，乙有 n 个硬币，双方投掷之后进行比较，求甲掷出的正面比乙掷出的正面多的概率.

解：投掷硬币后数正面，甲有 $n+1$ 个硬币，投掷后出现正面的个数可能是0，1，2，…，$n+1$，可能性共是 $n+2$ 种，乙有 n 个硬币，投掷后出现正面的个数可能是0，1，2，…，n，可能结果共有 $n+1$ 种，甲、乙投出正面个数的组合数为总点数.

总的点数 $N=(n+1)(n+2)$

A含点数 $m=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n+2}{2}(n+1)$

$$\therefore P(A)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big/(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}$$

23、（De·Mé ré 问题），一颗骰子投4次至少得到一个六点与两颗骰子投24次至少得到一个双六这两件事那一种有更多的机会遇到？

解：（1）一颗骰子投4次，可能出现的总点数 $n=6^4=1296$．设A表"一颗骰子投4次，至少得到一个六点"，$\bar{A}$表"一颗骰子投4次，没有得到一个六点"。

$\because\ P(A) = 1 - P(\bar{A})$

而 $P(\bar{A}) = (\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296}$

$$P(A) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.5178$$

(2) 设B表"两颗骰子投24次，至少得到一个双六"，$\bar{B}$ 表"两颗骰子投24次，没有得到一个双六"。

两颗骰子投一次的可能结果为 (1, 1), (1, 2), …, (2, 1), (2, 2), …, (6, 5), (6, 6)，共36种数对

$$1 - P(B) = P(\bar{B}) = (\frac{35}{36})^{24}$$

$$\lg P(\bar{B}) = 24(\lg 35 - \lg 36) = 24(1.5441 - 1.5563)$$

$$= -0.2928 = \bar{1}.7072$$

$$P(\bar{B}) = 0.5059$$

$$\therefore P(B) = 1 - 0.5059 = 0.4905$$

故 $P(B) < P(A)$.

答：一颗骰子投4次，至少得到一个六点比两颗骰子投24次至少得到一个对六有更多的机会迁到

24、从52张扑克牌中任意取出13张来，问有5张黑桃，3张红心，3张方块，2张草花的概率。

解：（参考费勒、概率论及其应用，P_{48}，例）

事件的总点数　$n = C_{52}^{13}$

A含点、　$m = C_{13}^{5} \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{2}$

$$\therefore P(A) = C_{13}^{5} \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{2} \Big/ C_{52}^{13}$$

25．桥牌游戏中（四人各以从52张纸牌中分得13张）求4张A集中在一个人手中的概率.

解：设B表示"游戏中4张A集中在一个人手中"，C表

示“游戏中4张A集中在指定的一人手中”.

$$P(B)=C_4^1\,P(C)$$

$$P(C)=C_4^4\cdot C_{48}^9\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\Big/C_{52}^{13}\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}=\frac{C_4^4\,C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$$

$$=C_{48}^9\,/\,C_{52}^{13}$$

$$\therefore\ P(B)=4C_{48}^9\Big/C_{52}^{13}$$

另一思考方法，若把四个人排列次序，第一人拿到4张A的概率就是

$$P_1=C_4^4\cdot C_{48}^9\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\Big/C_{52}^{13}\,C_{39}^{13}\,C_{26}^{13}=\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$$

第二人得到4张A的概率为

$$P_2=C_4^4\cdot C_{48}^{13}\cdot C_{35}^9\cdot C_{26}^{13}\Big/C_{52}^{13}\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}=\frac{C_{48}^{13}\,C_{35}^9}{C_{52}^{13}\,C_{39}^{13}}$$

$$=\frac{48\times\cdots\times36\times35\times\cdots\times27}{9!\cdot13!}\Big/C_{52}^{13}\cdot C_{39}^{13}=\frac{48\times\cdots\times40\times39\times\cdots\times27}{9!\qquad13!}\Big/C_{52}^{13}\,C_{39}^{13}$$

$$=C_{48}^9\Big/C_{52}^{13}$$

同样可证第三人得到4张A的概率：

$$P_3=\frac{C_{48}^{13}C_{35}^{13}C_4^4C_{22}^9}{C_{52}^{13}\,C_{39}^{13}\,C_{26}^{13}}=\frac{48\times\cdots\times36\times35\times\cdots\times23\times22\times\cdots\times14}{13!\qquad13!\qquad9!}\Big/C_{52}^{13}\,C_{39}^{13}\,C_{26}^{13}$$

$$=\frac{C_{48}^9\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}\quad C_{39}^{13}\quad C_{26}^{13}}=\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$$

同样可证

$$P_4=C_{48}^9\Big/C_{52}^{13}$$

故

$$P(B)=P_1+P_2+P_3+P_4=4C_{48}^9\Big/C_{52}^{13}$$

26. 在扑克牌游戏中(从 52 张牌中任取 5 张)求下列事件的概率:

(1)以 A 打头的同花顺次 5 张牌;

(2)其它顺次 5 张牌;

(3)有 4 张同点牌;

(4)三张同点数且另外两张也同点数;

(5)5 张同花;　(6)异花顺次 5 张牌;

(7)三张同点数,另外两张不同点数;

(8)5 张中有两对;(9)5 张中有一对;

(10)其它情况

解.(参孜.费勒.概率论及其应用第一章第 45 题)

(1)设 B 表示"A 打头的同花顺次 5 张牌"(顺次可理解为顺次连续),总点数 $n = C_{52}^{2}$,B 所含点数 $m = 4$,即为:黑桃 A,2,3,4,5;红心 A,2,3,4,5;方块 A,2,3,4,5;草花 A,2,3,4,5.故

$$P(B) = 4 / C_{52}^{5}$$

(2)设 C 表示"其它顺次 5 张牌"这一事件包括 2 为头,3 为头,…,9 为头顺次 5 张牌的情形.C 所含点数 $m = 4 \times 8 = 32$.

$\therefore P(C) = 32 / C_{52}^{5}$

(3)设 B 表示"有 4 张牌同点数" B 含点数 $m = C_{13}^{1} C_{4}^{4} C_{48}^{1}$

$\therefore P(B) = C_{13}^{1} C_{4}^{4} C_{48}^{1} / C_{52}^{5} = 13 \times 4 \times 12 / C_{52}^{5} = \frac{1}{4165}$

(4)设 A 表示"三张同点数且另两张也同点数",三张同点数的取法有 $C_{13}^{1} C_{4}^{3} = 13 \times 4$,另两张同点数的取法有 $C_{12}^{1} C_{4}^{2} = 12 \times 6$,A 含点数 $m = 13 \times 4 \times 12 \times 6$

$\therefore P(A) = 13 \times 4 \times 12 \times 6 / C_{52}^{5} = \frac{6}{4165}$

（5）设A表示"五张同花"，A含点数 $m = C_4^1 \cdot C_{13}^5$

$\therefore P(A) = C_4^1 \cdot C_{13}^5 / C_{52}^5$

（6）设A表示"异花顺次5张牌"，可以考虑为5张牌的顺次连续，但不考虑花色。

某花色顺次5张牌的取法有9种，如不考虑花色，共有 $9 \cdot 4^5$ 种取法。但同花顺次5张牌的取法种数为 $4 \times 9 = 36$

故A含点数 $m = 36 \times 15$，所以

$P(A) = 36 \times 15 / C_{52}^5$

（7）设B表示"三张同点数，另外两张不同点数，三张同点数的取法为 $C_{13}^1 \cdot C_4^3$，另两张不同点数是从三张点外的12点数中取两点数，如为不同花色，则共有 $C_{12}^2 C_4^1 C_4^1$.

$\therefore P(B) = C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^2 C_4^1 C_4^1 \Big/ C_{52}^5 = 13 \times 66 \times 4 \times 4^2 \Big/ C_{52}^5 = \frac{88}{4165}$

（8）设D表示"五张中有两对"

B 含点数 $m = C_{13}^2 C_4^2 C_4^2 C_{11}^1 C_4^1$

$\therefore P(B) = C_{13}^2 C_4^2 C_4^2 C_{11}^1 C_4^1 / C_{52}^5 = \frac{198}{4165}$

（9）设A表示"五张中有一对".

A 含点数 $m = C_{13}^1 C_{12}^3 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1$

$\therefore P(A) = C_{13}^1 C_{12}^3 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1 \Big/ C_{52}^5 = \frac{1760}{4165}$

（10）设 $\bar{A}$ 表示"其它情况"，则

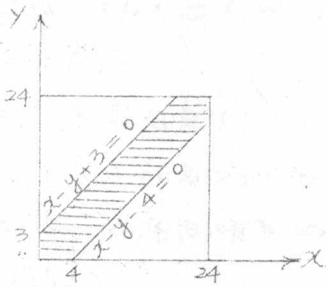
$P(\bar{A}) = 1 - P$

其中P为除（1）、（2）以外其它7种概率的和（$\because$（1）（2）蕴含于（5））

27、某码头只容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船且在24小时内各时刻来到的可能性都相等，如果它们需要停靠

的时间分别为3小时及4小时，试求有一船要在江中等待的概率。

解：（参考王梓坤，概率论基础及其应用，第一章17题）设x，y为两船到达的时间，由题意，一切可能的值为 $0 \le x$，$y \le 24$，若用x，y同时表示二只船，这相当于点（x，y）落在边长为24的正方形中，故所有基本事件可用此正方形之面积来表示。



如果船不等候码头空出，则当甲船先到时，乙船应迟到来3小时以上即$y-x=3$，或$y \ge x+3$，当乙船先到时，甲船应迟到4个小时以上即$x-y=4$，或$y \le x-4$，也就是说，点（x，y）应在直线$y=x+3$之上，在直线$y=x-4$之下。而一船要在江中等待，则

$y-x \le 3$ 或 $y \le x+3$

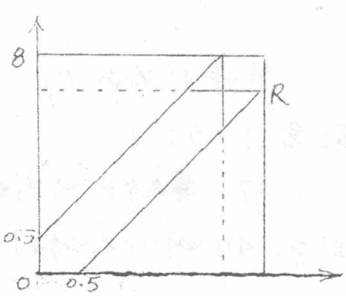
和$x-y \le 4$ 或 $y \ge x-4$

故有利的基本事件可用图中阴影部分表示，所以

$$P=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{24^2-\left[\frac{(24-4)^2}{2}+\frac{(24-3)^2}{2}\right]}{24^2}$$

$$=1-\frac{400+441}{2\times 24^2}=1-0.73=0.27$$

28. 两个人约定于7点到8点在某地会面，试求一人要等另一人半小时以上的概率。



解：（参考王梓坤，概率论基础及其应用，第一章18题）用x，y分别表示二人到达的时刻，则由题意 $7 \le x$，$y \le 8$，