



思维

“中环杯”中小学生思维能力训练活动核心内容解析（二）

潜能



“中环杯”思维能力训练活动编委会 编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



责任编辑 戴逸鸣
封面设计 陈燕静

思维潜能（中学版 第二册）



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-12131-8



9 787313 121318 >

定价：35.00元

思维潜能

(中学版第二册)

——“中环杯”中小学思维能力训练
活动核心内容解析(二)

“中环杯”思维能力训练活动编委会 编

上海交通大学出版社

内容提要

本书是中学版的第二册,按篇、章、节进行编写,内容主要包括“代数篇”、“几何篇”、“数论篇”及参考答案。每篇中部分内容包括“中环杯”中小學生思维能力训练活动举办至今的部分核心训练专题,每一专题都由专家举例并讲解,同时设计了具有针对性的训练内容,有助于学生开拓思维能力,掌握解题方法。

图书在版编目(CIP)数据

思维潜能:中学版.第2册/“中环杯”思维能力训练活动编委会编.

—上海:上海交通大学出版社,2014

ISBN 978-7-313-12131-8

I. ①思… II. ①中… III. ①中学数学课—初中—课外读物

IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 225709 号

思维潜能:中学版第二册

——“中环杯”中小学思维能力训练活动核心内容解析(二)

编 者:“中环杯”思维能力训练活动编委会

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

出 版 人:韩建民

印 制:上海交大印务有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

字 数:261 千字

版 次:2014 年 10 月第 1 版

书 号:ISBN 978-7-313-12131-8/G

定 价:35.00 元

地 址:上海市番禺路 951 号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:11

印 次:2014 年 10 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:021-54742979

前 言

“中环杯”中小学生思维能力训练活动由上海青少年思维能力训练活动组委会主办,从2001年举办至今。活动将思维训练和动手动脑紧密联系起来,让学生将课本知识和实践能力融会贯通,为提高中小学生的综合素质起到了十分重要的作用。活动举办至今,每年都受到学校、学生、家长及社会各界的普遍欢迎,在学生中引发了思维训练活动热潮。“中环杯”思维能力训练活动正在成为华东地区乃至全国青少年中有重要影响力的品牌活动。

为了能让更多的中小学生参与到此项活动中来,为他们提供参加活动和提高能力的参考,应广大中小学生、教师及家长的要求,我们邀请部分数学专家编写了《思维潜能》丛书。丛书分小学版和中学版,本书是中学版第二册。本书按篇、章、节进行编写,共有3篇。每篇中部分内容 by 专家对历届“中环杯”中学生思维能力训练活动的部分核心训练专题进行举例并作深入浅出的讲解,且很多例题中,一题多解,列举了多种形式的思维方式,有助于学生开拓思维能力,掌握新的解题方法。

本书还在每一章节最后精心设计了训练内容,相信通过这些核心知识的学习和训练,能引导学生作规律性的探讨,从中得到启迪,熟悉思维训练的方法。

本书在编写过程中难免会有不足之处,欢迎大家批评指正。

编者

目 录

代 数 篇

第一章	分数基础	1
第一节	基础知识与四则运算	1
第二节	分数的巧算	7
第三节	繁分数与连分数的运算	29
第二章	方程(组)	41
第一节	方程(组)的重要方法一 换元法	41
第二节	方程(组)的重要方法二 分类讨论	43
第三节	方程(组)的重要方法三 数形结合	46
第四节	不定方程	49
第三章	不等式	52
第一节	不等式(组)	52
第二节	几个重要的不等式	59
第三节	几何不等式	64

几 何 篇

第四章	相似三角形	71
第五章	圆	97

数 论 篇

第六章	最大公约数和最小公倍数	116
第一节	数的整除性	116
第二节	最大公约数和最小公倍数	121
参考答案		127

代数篇

第一章 分数基础

(本章内容适合所有年级学生)

第一节 基础知识与四则运算

一、分数的基础知识

1. 分数的定义、读法和意义

分数的定义:两个正整数 p 、 q 相除,可以用分数 $\frac{p}{q}$ 表示,即 $p \div q = \frac{p}{q}$,其中 p 称为分子, q 称为分母,“—”称为分数线。

分数的读法: $\frac{p}{q}$ 读作 q 分之 p 。

分数的意义:把单位“1”平均分成若干份,表示这样一份或者几份的数。强调如果单位“1”发生变化,那么结果也会变化,比如说 9 的 $\frac{1}{3}$ 与 3 的 $\frac{1}{3}$ 是不一样的,因为单位“1”变了。

2. 单位分数

把单位“1”平均分成若干份,表示这样一份的数称为单位分数(有些书称为分数单位)。比如: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 都是单位分数,而 $\frac{2}{3}$ 不是单位分数。

3. 数轴

三要素(原点,正方向,单位长度),介绍如何在数轴上画整数和分数。

4. 分数的基本性质

分数的分子和分母同时乘以或者除以相同的数(0 除外),分数的大小不变。

5. 最简分数

分子和分母互素的分数叫作最简分数。

6. 约分

把一个分数的分子和分母的公因数约去的过程,称为约分。说明:如果将最大公因数约去,那么留下的分数就是最简分数了。一般我们所说的约分,都是指将最大公因数约去。



$\frac{15}{30} = \frac{3}{6}$ 这是一个约分, $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ 这也是一个约分, 一般我们所说的都是针对 $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ 。

7. 通分

将异分母的分数分别化成与原分数大小相等的同分母的分数, 这个过程称为通分。通分时选用的公分母一般是原来几个分母的最小公倍数。

8. 真、假、带分数的相关知识

真分数: 分子比分母小的分数。

假分数: 分子大于或者等于分母的分数。

带分数: 一个正整数与一个真分数相加所成的数称为带分数, 往往这个加号可以省略。

(1) 有了带分数, 我们可以迅速估算出一个分数值的大小。

(2) 有了带分数, 如果是加减法运算的话, 推荐将原题中的假分数化为带分数来计算。

(3) 有了带分数, 如果分数的运算结果是假分数, 那么要求化为带分数。

二、分数的运算

1. 分数的加减法

(1) 同分母分数相加减, 分母不变, 分子相加减, 最后不要忘记化为最简分数。

(2) 异分母分数相加减, 先通分变为同分母后, 再分数相加减, 最后不要忘记化为最简分数。

(3) 分数与整数相加减, 将整数看成分母为 1 的分数。

(4) 含括号的分数加减运算:

处理方法一: 先计算括号内的结果, 然后再和外面相加减。

处理方法二: 直接去括号。

(5) 计算的时候可以先加后减。推论: 如果一个式子中只出现加法和减法的话, 可以将这加法减法任意调整位子。如果出现多个减法在一起的情况, 还可以通过加括号使之变成加法!

2. 分数的乘法

乘法公式: $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn} (qn \neq 0)$ 。

乘法意义: 以 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 为例, 假设有一个正方形, 其 $\frac{4}{5}$ 如图 1-1 所示, 在 $\frac{4}{5}$ 的基础上再找这部分的 $\frac{2}{3}$, 就是如图 1-2 所示。

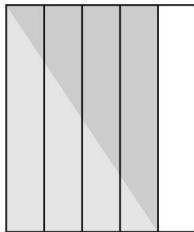


图 1-1

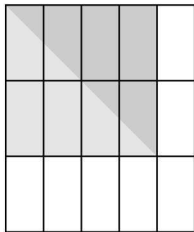


图 1-2



乘法的常用技巧:

(1) 对角相消(一个变种就是 $\frac{a \times b}{c \times d}$ 也可以相消,如 $\frac{3 \times 8}{4 \times 9}$, 或者 $\frac{3 \times 8 \times 39}{9 \times 13 \times 12}$)。

(2) 分数与整数乘积的时候,将整数看成分母为 1 的分数。

(3) 带分数化为假分数(和加减法正好反过来)。

3. 分数的除法

倒数:1 除以一个不为 0 的数得到的商,称为这个数的倒数。互为倒数的两个数的乘积为 1。

除法公式: $\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \times \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm}$ ($qmn \neq 0$), 文字描述:除以一个数,等于乘以其倒数。

除法意义:分数除法的意义与整数除法的意义相同,都是已知两个因数的积与其中的一个因数,求另一个因数的运算。

带分数的除法中,由于带分数是假分数的另一种表示形式,所以一般把带分数化成假分数后进行计算。

例 1 将 $\frac{629}{999}$ 进行约分,并化为最简分数。

解 $(999, 629) = (629, 370) = (370, 259) = 37$ 。即 $\frac{629}{999} = \frac{17}{27}$ 。

说明:利用辗转相除法 $(a, b) = (b, r)$ 来进行约分是一个很重要的技巧。

例 2 将 $\frac{1629}{1922}$ 进行约分,并化为最简分数。

解 因为 $(1922, 1629) = (1629, 293) = (293, 164) = (164, 129) = (129, 35) = 1$, 所以最简分数仍为 $\frac{1629}{1922}$ 。

说明:此题让同学们回忆辗转相除法求最大公约数的内容。

例 3 将 $\frac{16\ 666\ 666\ 666}{66\ 666\ 666\ 664}$ 进行约分,并化为最简分数。

解 直接计算比较麻烦,所以我们要寻找规律,先来看 $\begin{cases} 64 = 4 \times 16 \\ 664 = 4 \times 166 \end{cases}$, 从而可以类推推出 $66\ 666\ 666\ 664 = 4 \times 16\ 666\ 666\ 666$ 。于是得: $\frac{16\ 666\ 666\ 666}{66\ 666\ 666\ 664} = \frac{1}{4}$ 。

例 4 把 $\frac{3}{25}$ 的分子分母加上同一个数以后,正好可以约成 $\frac{2}{3}$, 求:这个加上去的数。

解 设这个数为 x , 则 $\frac{3+x}{25+x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(3+x) = 2(25+x) \Rightarrow x = 41$ 。

说明:通过此题,让同学了解到在分数中:①约分是一个保持分数值不变的过程,所以就相当于一个等号;②可以通过对角相乘来得到等式,证明的方法就回到除法。

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \div b = c \div d \Rightarrow a \div b \times b \times d = c \div d \times d \times b \Rightarrow ad = bc。$$

所以此题可以只要求同学列出方程,后面的题目才要求具体求解。



例 5 把一个最简分数的分子加上 1, 这个时候分子和分母就相等了; 如果把这个最简分数的分母加上 1, 约分后就等于 $\frac{8}{9}$, 求: 原分数。

解 设原分数的分子为 x , 那么分母就是 $x+1$ 。由于 $\frac{x}{x+2} = \frac{8}{9}$, 所以求得原分数为 $\frac{16}{17}$ 。

例 6 一个分数, 如果分子、分母同时加上 11, 约分后等于 $\frac{1}{4}$; 如果分子、分母同时加上 23, 约分后等于 $\frac{1}{3}$ 。那么分子、分母加上_____时约分等于 $\frac{1}{2}$ 。

解 设这个分数为 $\frac{a}{b}$, 根据题意, 我们有 $\begin{cases} \frac{a+11}{b+11} = \frac{1}{4} \\ \frac{a+23}{b+23} = \frac{1}{3} \end{cases}$, 解这个方程组得 $\begin{cases} a = 13 \\ b = 85 \end{cases}$ 。假

设分子分母同时加上 x 使得分数的值为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{13+x}{85+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 59$ 。

例 7 一个分数, 分母是 901, 分子是一个素数。现在有以下两种方法:

- (1) 分子分母各加上一个相同的一位数;
- (2) 分子分母各减去一个相同的一位数。

用其中的一种方法组成一个新的分数, 新分数约分后是 $\frac{7}{13}$ 。求: 原来分数的分子。

解 首先 $901 \div 13 = 69 \cdots 4$, 所以可以知道 $\frac{7}{13} = \frac{483}{897} = \frac{490}{910}$ 。

(1) 当改后的分数是 $\frac{483}{897}$ 时, 原分数为 $\frac{487}{901}$;

(2) 当改后的分数是 $\frac{490}{910}$ 时, 原分数为 $\frac{481}{901}$ 。

题目中要求分子是一个素数, 而 $481 = 13 \times 37$ 不是素数, 所以满足条件的就是分数 $\frac{487}{901}$ 。即原来分数的分子为 487。

例 8 计算: $2 \frac{6\ 209}{10\ 013} \times \frac{10\ 693}{22\ 869} \times \frac{33\ 337}{10\ 602}$ 。

解 $2 \frac{6\ 209}{10\ 013} \times \frac{10\ 693}{22\ 869} \times \frac{33\ 337}{10\ 602} = \frac{26\ 235}{10\ 013} \times \frac{10\ 693}{22\ 869} \times \frac{33\ 337}{10\ 602}$
 $= \frac{5 \times 9 \times 11 \times 53}{17 \times 19 \times 31} \times \frac{17 \times 17 \times 37}{3 \times 9 \times 7 \times 11 \times 11}$
 $\times \frac{9 \times 2 \times 19 \times 31}{17 \times 37 \times 53}$
 $= \frac{5 \times 3 \times 2}{7 \times 11}$
 $= \frac{30}{77}$ 。



例 9 计算: $1 \div \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \div \frac{4}{5} \div \dots \div \frac{19}{20}$ 。

解 $1 \div \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \div \frac{4}{5} \div \dots \div \frac{19}{20} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{20}{19} = 10。$

例 10 计算: $7 \frac{4\,480}{8\,333} \div \frac{21\,934}{25\,909} \div 1 \frac{18\,556}{35\,255}$ 。

解 $7 \frac{4\,480}{8\,333} \div \frac{21\,934}{25\,909} \div 1 \frac{18\,556}{35\,255} = \frac{62\,811}{8\,333} \times \frac{25\,909}{21\,934} \times \frac{35\,255}{53\,811}$
 $= \frac{3^2 \times 7 \times 997}{13 \times 641} \times \frac{13 \times 1\,993}{22 \times 997} \times \frac{641 \times 55}{27 \times 1\,993}$
 $= 5 \frac{5}{6}。$

例 11 计算: $(8 \frac{6}{13} + 2 \frac{5}{11} \div 1 \frac{17}{22}) \times (\frac{27}{32} - \frac{1}{6})$ 。

解 $(8 \frac{6}{13} + 2 \frac{5}{11} \div 1 \frac{17}{22}) \times (\frac{27}{32} - \frac{1}{6})$
 $= (\frac{110}{13} + \frac{27}{11} \times \frac{22}{39}) \times (\frac{81}{96} - \frac{16}{96})$
 $= (\frac{110}{13} + \frac{18}{13}) \times \frac{65}{96}$
 $= \frac{128}{13} \times \frac{65}{96} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3}。$

例 12 计算: $3 \frac{1}{8} \div [(4 \frac{5}{12} - 3 \frac{13}{24}) \times \frac{4}{7} + (3 \frac{1}{18} - 2 \frac{7}{12}) \times 1 \frac{10}{17}]$ 。

解 $3 \frac{1}{8} \div [(4 \frac{5}{12} - 3 \frac{13}{24}) \times \frac{4}{7} + (3 \frac{1}{18} - 2 \frac{7}{12}) \times 1 \frac{10}{17}]$
 $= \frac{25}{8} \div [(\frac{53}{12} - \frac{85}{24}) \times \frac{4}{7} + (\frac{55}{18} - \frac{31}{12}) \times \frac{27}{17}]$
 $= \frac{25}{8} \div (\frac{21}{24} \times \frac{4}{7} + \frac{17}{36} \times \frac{27}{17}) = \frac{25}{8} \div (\frac{1}{2} + \frac{3}{4})$
 $= \frac{25}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}。$

例 13 要使得算式 $\frac{1}{21} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{21} \times \frac{1}{5})$ 成立, 方框内应填的数是_____。

解 $\frac{1}{21} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{21} \times \frac{1}{5})$
 $\Rightarrow \frac{1}{21} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{4} \times \frac{104}{105}$
 $\Rightarrow \frac{1}{21} + \frac{1}{\square} = \frac{52}{210}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\square} = \frac{52}{210} - \frac{1}{21} = \frac{42}{210} = \frac{1}{5}。$



所以方框内应填的数是 5。

【实战练习 1-1】

1. 将 $\frac{1\ 351}{2\ 509}$ 、 $\frac{11\ 526}{21\ 131}$ 、 $\frac{7\ 116}{10\ 674}$ 进行约分,并化为最简分数。

2. 分数 $\frac{1\ 997}{2\ 000}$ 的分子和分母同时加上同一个自然数_____所得的新分数是 $\frac{2\ 000}{2\ 001}$ 。

3. 一个分数约分后的最简分数为 $\frac{3}{7}$,原分子、分母的和为 90,求:原分数。

4. 把一个分数约成最简分数后是 $\frac{7}{13}$,约分前分子与分母的和等于 200,求:约分前的分数。

5. 一个分数的分子、分母的和为 168,分子和分母都减去 6,分数可以约成 $\frac{5}{7}$,求:原来分数是多少?

6. 计算: $\frac{2}{13} + \frac{20}{13} + \frac{200}{13} + \cdots + \frac{200\ 000\ 000\ 000}{13}$ 。

7. 计算: $\frac{7}{16} \div \frac{15}{8} \times \frac{9}{39} \div \frac{33}{10} \times \frac{11}{21} \div \frac{35}{12} \times \frac{13}{20}$ 。

8. 计算: $24 \div \left[\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right) \times 3 \right]$ 。

9. 计算: $4 \frac{25}{72} - \left(\frac{5}{12} + \frac{11}{15} \right) \div \frac{46}{75}$ 。

10. 计算: $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) \div \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$ 。

11. 计算: $\frac{33}{38} \times \left(1 - \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} \right)$ 。

12. 计算: $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right) \times 160 \times \frac{1}{13}$ 。

13. 计算: $\frac{1}{8} \times \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} \right) \right]$ 。

14. 计算: $\frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \div \frac{1}{8}$ 。

15. 计算: $\frac{1}{4} \div \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right)$ 。

16. 计算: $\left(2 \frac{2}{5} + 1 \frac{1}{3} \times 5 \right) \div 3 \frac{2}{5} - 1 \frac{1}{3}$ 。

17. 计算: $21 \div \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) \times 30 \div \left(3 \frac{5}{42} - 2 \frac{5}{14} \right) \right]$ 。

18. 要使得算式 $\left[\left(9 \frac{1}{4} - 7 \frac{3}{5} \right) \div 2 \frac{3}{4} \right] \div \left[\left(\frac{1}{3} + \square \right) \times 1 \frac{5}{7} \right] = \frac{21}{25}$ 成立,方框内应填的数是_____。

19. 要使得算式 $1 \frac{7}{8} \div 3 \frac{3}{5} - \square \div 3 \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{11}{24}$ 成立,方框内应填的数是_____。



第二节 分数的巧算

1. 小数化分数

小数化分数(并不是所有情况下都化为分数计算。如果小数算起来很简单,就先计算小数;如果不简单,那就化为分数计算。例如计算: $2.37+1.75+1.63+1.25$, 将它化为分数反而不方便计算),约分要做好。

注意:这里所提的小数化分数是指的有限小数,无限循环小数的内容后面再提。

常用结论:

$$1. 0.5 = \frac{1}{2}, 0.25 = \frac{1}{4}, 0.75 = \frac{3}{4}.$$

$$2. 0.125 = \frac{1}{8}, 0.325 = \frac{3}{8}, 0.625 = \frac{5}{8}, 0.875 = \frac{7}{8}.$$

$$3. \overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1\,001$$

$$4. \overline{ababab} = \overline{ab} \times 10\,101$$

$$5. \underbrace{111\cdots 1}_{n\text{个}1} \times \underbrace{111\cdots 1}_{n\text{个}1} = 123\cdots n\cdots 321$$

例 1 计算: $\frac{0.003\,25 \div 0.013}{(0.22 - 0.206\,5) \div (3.6 \times 0.015)}.$

解 $\frac{0.003\,25 \div 0.013}{(0.22 - 0.206\,5) \div (3.6 \times 0.015)} = \frac{325 \times 36 \times 15}{135 \times 13 \times 100} = 1.$

例 2 计算: $\left[2\frac{2}{3} \times \left(1.875 - \frac{5}{6}\right)\right] \div \left[\left(0.875 + 1\frac{5}{6}\right) \div 3\frac{1}{4}\right].$

解
$$\begin{aligned} & \left[2\frac{2}{3} \times \left(1.875 - \frac{5}{6}\right)\right] \div \left[\left(0.875 + 1\frac{5}{6}\right) \div 3\frac{1}{4}\right] \\ &= \left[\frac{8}{3} \times \left(\frac{15}{8} - \frac{5}{6}\right)\right] \div \left[\left(\frac{7}{8} + \frac{11}{6}\right) \div \frac{13}{4}\right] \\ &= \left(\frac{8}{3} \times \frac{25}{24}\right) \div \left(\frac{65}{24} \times \frac{4}{13}\right) = \frac{25}{9} \div \frac{5}{6} \\ &= \frac{25}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

例 3 计算: $\left(6\frac{5}{18} - 5\frac{11}{15}\right) \div \left[2\frac{14}{15} + \left(4 - 2\frac{14}{25}\right) \div 1.35\right].$

解
$$\begin{aligned} & \left(6\frac{5}{18} - 5\frac{11}{15}\right) \div \left[2\frac{14}{15} + \left(4 - 2\frac{14}{25}\right) \div 1.35\right] \\ &= \left(6\frac{25}{90} - 5\frac{66}{90}\right) \div \left(2\frac{14}{15} + \frac{36}{25} \div 1\frac{7}{20}\right) \\ &= \frac{49}{90} \div \left(2\frac{14}{15} + \frac{36}{25} \times \frac{20}{27}\right) = \frac{49}{90} \div \left(2\frac{14}{15} + \frac{16}{15}\right) = \frac{49}{360}. \end{aligned}$$

例 4 计算: $\left[19.5 - \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \div \frac{1}{16}\right)\right] \times \frac{1}{2} \times \left\{\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times \left(1.27 - 1\frac{27}{100}\right) + 1\right] + \right.$



$$\frac{3}{2}\} + 0.0014.$$

解
$$\begin{aligned} & \left[19.5 - \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \div \frac{1}{16} \right) \right] \times \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times \left(1.27 - 1\frac{27}{100} \right) + 1 \right] + \frac{3}{2} \right\} + 0.0014 \\ &= \left(19.5 - 1\frac{1}{2} - 4 \right) \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 0 + 1 \right) + \frac{3}{2} \right] + 0.0014 \\ &= 14 \times \frac{1}{2} \times 2 + 0.0014 = 14.0014. \end{aligned}$$

例 5 要使得算式 $\left[26.5 \times 0.375 - \left(8.3 - 7\frac{37}{40} \right) + \square \div 2\frac{2}{3} \right] \times \frac{4}{45} + 50 = 51$ 成立, 方框内应填的数是_____。

解
$$\begin{aligned} & \left[26.5 \times 0.375 - \left(8.3 - 7\frac{37}{40} \right) + \square \div 2\frac{2}{3} \right] \times \frac{4}{45} + 50 = 51 \\ \Rightarrow & 26\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} - \left(8\frac{3}{10} - 7\frac{37}{40} \right) + \square \div 2\frac{2}{3} = \frac{45}{4} \\ \Rightarrow & \frac{53 \times 3}{16} - \frac{3}{8} + \square \div 2\frac{2}{3} = \frac{45}{4} \\ \Rightarrow & \square \div 2\frac{2}{3} = \frac{45}{4} - \frac{53 \times 3}{16} + \frac{3}{8} = \frac{180 - 159 + 6}{16} = \frac{27}{16} \\ \Rightarrow & \square = \frac{27}{16} \times \frac{8}{3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

例 6 计算: $\left(\frac{191\ 919}{989\ 898} + \frac{190\ 190}{980\ 980} + \frac{19\ 001\ 900}{98\ 009\ 800} \right) \div \frac{19}{98} \times \frac{9\ 898}{1\ 919}.$

解
$$\begin{aligned} & \left(\frac{191\ 919}{989\ 898} + \frac{190\ 190}{980\ 980} + \frac{19\ 001\ 900}{98\ 009\ 800} \right) \div \frac{19}{98} \times \frac{9\ 898}{1\ 919} \\ &= \left(\frac{19 \times 10\ 101}{98 \times 10\ 101} + \frac{190 \times 1\ 001}{980 \times 1\ 001} + \frac{1\ 900 \times 10\ 001}{9\ 800 \times 10\ 001} \right) \div \frac{19}{98} \times \frac{98 \times 101}{19 \times 101} \\ &= \left(\frac{19}{98} + \frac{19}{98} + \frac{19}{98} \right) \times \frac{98}{19} \times \frac{98}{19} \\ &= 3 \times \frac{19}{98} \times \frac{98}{19} \times \frac{98}{19} = \frac{294}{19} = 15\frac{9}{19}. \end{aligned}$$

例 7 计算: $1 - \left(\frac{101\ 010}{202\ 020} \right)^2 \times \left(\frac{202\ 020}{303\ 030} \right)^2 \times \left(\frac{303\ 030}{505\ 050} \right)^2 \times \left(\frac{555\ 555}{777\ 777} \right)^2.$

解
$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{101\ 010}{202\ 020} \right)^2 \times \left(\frac{202\ 020}{303\ 030} \right)^2 \times \left(\frac{303\ 030}{505\ 050} \right)^2 \times \left(\frac{555\ 555}{777\ 777} \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{3}{5} \right)^2 \times \left(\frac{5}{7} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}. \end{aligned}$$

例 8 计算: $\frac{341}{275} + 2 \times \frac{3\ 441}{2\ 775} + 3 \times \frac{34\ 441}{27\ 775} + \cdots + 8 \times \frac{3\ 444\ 444\ 441}{2\ 777\ 777\ 775} + 9 \times \frac{34\ 444\ 444\ 441}{27\ 777\ 777\ 775}.$

解 容易知道 $\frac{341}{275} = \frac{31 \times 11}{25 \times 11} = \frac{31}{25}, \frac{3\ 441}{2\ 775} = \frac{31 \times 111}{25 \times 111} = \frac{31}{25}, \frac{34\ 441}{27\ 775} = \frac{31 \times 1\ 111}{25 \times 1\ 111} = \frac{31}{25}, \cdots, \frac{34\ 444\ 444\ 441}{27\ 777\ 777\ 775} = \frac{31 \times 1\ 111\ 111\ 111}{25 \times 1\ 111\ 111\ 111} = \frac{31}{25},$ 即这 9 个数都等于



$\frac{31}{25}$, 所以

$$\begin{aligned} & \frac{341}{275} + 2 \times \frac{3441}{2775} + 3 \times \frac{34441}{27775} + \cdots + 8 \times \frac{344444441}{277777775} + 9 \times \frac{34444444441}{27777777775} \\ &= \frac{31}{25} + 2 \times \frac{31}{25} + 3 \times \frac{31}{25} + \cdots + 8 \times \frac{31}{25} + 9 \times \frac{31}{25} \\ &= \frac{31}{25} \times (1 + 2 + \cdots + 9) = \frac{279}{5}. \end{aligned}$$

2. 乘法分配律及其逆用

乘法分配律及其逆用: $\begin{cases} (a \pm b) \times c = a \times c \pm b \times c & \text{正用} \\ a \times c \pm b \times c = (a \pm b) \times c & \text{逆用} \end{cases}$ 。例如计算 $7.35 \times 99 +$

7.35 , $99.9 \times 999 + 99.9$, $3.74 \times 4.8 + 6.2 \times 3.74 - 3.74$ 的时候(逆用)(注意,减法也可以参与分配律);计算 46×101 , 7.2×9.9 的时候(正用)。应该学会巧算。

例 9 计算: $\frac{7}{15} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{15} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{15} \times 3\frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{7}{15} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{15} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{15} \times 3\frac{1}{2} &= \frac{7}{15} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{15} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{15} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{7}{30} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + 1 \right) \\ &= \frac{7}{30} \times \frac{15}{8} \\ &= \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

说明: 本题主要考察同学们到底能提取多少出来?

例 10 计算: $\left[7 - \left(1\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + 1\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \right) \right] \div 1.75$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left[7 - \left(1\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + 1\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \right) \right] \div 1.75 \\ &= \left[7 - 1\frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9} \right) \right] \div \frac{7}{4} \\ &= \left(7 - \frac{7}{4} \right) \times \frac{4}{7} \\ &= 7 \times \frac{4}{7} - \frac{7}{4} \times \frac{4}{7} \\ &= 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

例 11 计算: $\left(2\frac{1}{2003} \times 9\frac{5}{8} + 7\frac{2002}{2003} \times 9.625 \right) \div 96\frac{1}{4}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left(2\frac{1}{2003} \times 9\frac{5}{8} + 7\frac{2002}{2003} \times 9.625 \right) \div 96\frac{1}{4} \\ &= 9.625 \times \left(2\frac{1}{2003} + 7\frac{2002}{2003} \right) \div 96\frac{1}{4} \\ &= 96.25 \div 96\frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

**例 12** 计算:

$$\left(16 + \frac{7}{20} - \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) - \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times \left(15 + \frac{23}{20}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left(16 + \frac{7}{20} - \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) - \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times \left(15 + \frac{23}{20}\right) \\ & + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) + 1 \\ & = \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times \left(16 + \frac{7}{20} - \frac{2}{5} - 15 - \frac{23}{20} + 1 - \frac{4}{5}\right) + 1 \\ & = \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times \left(2 - \frac{6}{5} - \frac{16}{20}\right) + 1 \\ & = \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times \left(2 - \frac{6}{5} - \frac{4}{5}\right) + 1 \\ & = \left(\frac{1}{2\,009} + \frac{2\,001}{2\,010}\right) \times 0 + 1 \\ & = 1. \end{aligned}$$

例 13 计算: $\left(49 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \left(46 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \left(43 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times$ $\frac{1}{8}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left(49 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \left(46 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \left(43 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{8} \\ & = \left(49 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) + \left(46 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(1 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \\ & = (49 + 46 + \cdots + 1) \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 17 \\ & = 53 \frac{1}{8} - \frac{17}{64} \\ & = 52 \frac{55}{64}. \end{aligned}$$

例 14 计算: $\frac{1}{4} \times \left(4.85 \div \frac{5}{18} - 3.6 + 6.15 \times 3 \frac{3}{5}\right) + \left[5.5 - 1.75 \times \left(1 \frac{2}{3} + \frac{19}{21}\right)\right].$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{1}{4} \times \left(4.85 \div \frac{5}{18} - 3.6 + 6.15 \times 3 \frac{3}{5}\right) + \left[5.5 - 1.75 \times \left(1 \frac{2}{3} + \frac{19}{21}\right)\right] \\ & = \frac{1}{4} \times \left(4.85 \times \frac{18}{5} - 3 \frac{3}{5} + 6.15 \times 3 \frac{3}{5}\right) + \left[5 \frac{1}{2} - 1 \frac{3}{4} \times \left(1 \frac{2}{3} + \frac{19}{21}\right)\right] \\ & = \frac{1}{4} \times \left(4.85 \times \frac{18}{5} - 3 \frac{3}{5} + 6.15 \times 3 \frac{3}{5}\right) + \left[5 \frac{1}{2} - 1 \frac{3}{4} \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{19}{21}\right)\right] \\ & = \frac{1}{4} \times 3 \frac{3}{5} \times (4.85 - 1 + 6.15) + \left[5 \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \times 2 \frac{4}{7}\right] \\ & = \frac{1}{4} \times \frac{18}{5} \times 10 + \left[5 \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \times \left(2 + \frac{4}{7}\right)\right] \end{aligned}$$



$$= 9 + \left[5 \frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 1 \right]$$

$$= 9 + 1 = 10。$$

例 15 计算: $\left(11 \frac{2}{9} + 9 \frac{2}{11} \right) \div \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{11} \right)。$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \left(11 \frac{2}{9} + 9 \frac{2}{11} \right) \div \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{11} \right) &= \left(\frac{101}{9} + \frac{101}{11} \right) \div \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{11} \right) \\ &= 101 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) \div 2 \div \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{101}{2}。 \end{aligned}$$

说明:通过本题让同学们了解等比性质,如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 那么 $\frac{a+c}{b+d} = k$ 。换句话说如果分子中有 n 项,分母中也有 n 项,分子中的每一项都是分母中一项的 k 倍,那么最后分数的结果就是 k 。

例 16 计算: $\frac{786 \times 3 - 344 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}}。$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{786 \times 3 - 344 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}} &= \frac{(624 + 162) \times 3 - 344 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}} \\ &= \frac{624 \times 3 + 162 \times 3 - 344 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}} \\ &= \frac{624 \times 3 + 486 - 344 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}} \\ &= \frac{624 \times 3 + 142 - \frac{1}{1007}}{312 \times 3 + 71 - \frac{1}{2014}}。 \end{aligned}$$

由于分母中每一项都是分子的两倍,所以最后答案就是 2。

例 17 计算: $29 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 39 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 49 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 59 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}。$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 29 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 39 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 49 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 59 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \\ &= \left(30 - \frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{3} + \left(40 - \frac{2}{3} \right) \times \frac{3}{4} + \left(50 - \frac{3}{4} \right) \times \frac{4}{5} + \left(60 - \frac{4}{5} \right) \times \frac{5}{6} \\ &= \left(20 - \frac{1}{3} \right) + \left(30 - \frac{1}{2} \right) + \left(40 - \frac{3}{5} \right) + \left(50 - \frac{2}{3} \right) \\ &= (20 + 30 + 40 + 50) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$