学考加试

高校自主招生考试

直通车

应对高校自主招生最新政策

顺应学考加试理念方向

数学

抄袭必究

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

编著　张雪明

学考加试

高校自主招生考试直通车

数学

编著　张雪明

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以高中阶段的核心内容为载体,以提高解题能力和学科素养为目标.内容包括打开你的解题思路、能力型小题求解策略和能力型大题求解策略三个部分,选题范围广、难度大,对读者的要求高,顺应高校自主招生加试的理念和方向.

不追求对加试题的盲目预测,把重点落实在能力和思路的生成,从而实现以不变应万变的目标是本书的编写原则,也是本书的鲜明特色.

图书在版编目(CIP)数据

高校自主招生考试直通车学考加试.数学/张雪明
编著.—上海: 上海交通大学出版社,2014
ISBN 978-7-313-11606-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课-高中-升
学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第126768号

高校自主招生考试直通车学考加试·数学

编　　著: 张雪明
出版发行: 上海交通大学出版社　　地　　址: 上海市番禺路951号
邮政编码: 200030　　电　　话: 021-64071208
出 版 人: 韩建民
印　　制: 上海春秋印刷厂　　经　　销: 全国新华书店
开　　本: 787 mm×960 mm　1/16　　印　　张: 13.75
字　　数: 241千字
版　　次: 2014年7月第1版　　印　　次: 2014年7月第1次印刷
书　　号: ISBN 978-7-313-11606-2/G
定　　价: 34.00元

前 言

普通高中学业水平考试(以下简称“学考”)是对高中学生学业进行终结性评价的重要方式,是高中学生综合素质评价的重要组成部分,具有对高中教育教学质量统一检测与导向的功能,是深化高校自主招生、推动招生制度改革的基础性工作.

2013 年,教育部在全国实施普通高中学考制度,明确提出高中学考成绩是高校招生录取的重要参考依据,要求高校根据人才培养目标,明确提出学考成绩的基本要求,特别是与专业需求相关的科目要求.教育部对高校自主选拔录取改革试点也要求建立健全高校招生综合评价体系,在统一高考的基础上,积极探索建立符合高校自身培养目标和要求的创新人才选拔标准,完善高考、高校自主考核、普通高中学考和综合素质评价等多位一体的高校人才选拔综合评价体系.

上海市率先探索以学考制度为基础的高校招生考试制度的改革,并确定从 2016 年起全面实施.除了对考试时间进行调整,内容进行限定外,最突出的改革就是语文和数学学科增加附加题,附加题考试时间约 40 分钟.附加题考试范围限定在课程标准规定的高中前 5 个学期基础型和拓展型课程内容范围之内,不分文理,供有意参加自主招生考试的学生选考.附加题考试成绩不计入学考成绩之中,也不计入学考成绩单,为参与“高等学校自主选拔录取改革试点”的高校(以下简称“试点高校”)和“深化高等学校自主选拔录取改革试验”的高校(以下简称“试验高校”)开展自主招生,提供更加丰富的考生学业信息,作为高校招生的重要参考依据.

学考笔试成绩采用等第制,分为 A、B、C、D、F 五个等第,其中 F 等第为不合格,A 等第约占 20%,B 等第约占 30%,C 等第约占 25%.合格分数线以卷面成绩的标准分值划定.

在这样的政策指导下,高水平大学都在研究怎样结合本校相关学科、专业特色及培养要求,把高中学考成绩及相关科目附加题成绩作为学校自主招生初试的

依据.

例如,复旦大学公布了2016年度的自主选拔录取政策,将全面使用学考成绩作为考生的报考资格,要求报考考生: ① 学业水平考试的10门科目(9门笔试科目+信息科技)中不少于8门科目等第为A(具体视2014年学业水平考试情况而定);② 其中,语文、数学和外语科目等第必须为A;③ 文科考生的政治、历史和地理科目等第必须为A,理科考生的物理、化学和生物科目等第必须为A;④ 考生还必须参加语文和数学两名科目的附加题考试,且成绩达到一定要求(具体要求待考试方案确定后公布).

复旦大学将根据考生学业水平考试等第、附加题成绩以及其他报名申请材料对符合报名条件的考生进行综合评价,确定入围进一步选拔的考生名单,具体选拔方法和规定将在教育部审核后公布.

可以预见,高中学考成绩在高校招生中的应用会根据高校招生考试制度改革的进程逐步推进.针对这种局面,高校自主招生考试学考系列应运而生.

数学学科的学考系列分为《高校自主招生考试直通车学考冲A·数学》和《高校自主招生考试直通车学考加试·数学》.

关于数学学科的学考,各地区采取的测试方式会有差异,甚至题型、试卷结构也会有所不同,但考试的性质,目标是明确的,基本内容也是相通的,《高校自主招生考试直通车学考冲A·数学》从"数与计算"、"方程与代数"、"函数与分析"、"数据整理与概率统计"、"图形与几何"五个方面展开,按最新的学业水平考试大纲编写,选材注重针对性、系统性,目标定位高,指向A档,以满足选读该书的群体的客观需要.

对于数学学科的学考加试,无需在意其题型结构和试卷形式上的模式,需要的是对考试内容、范围及试题的特点的准确把握,而这可以从学考加试的定位——学业评价中增加选拔功能——中进行分析,这样的定位决定了试题的特点应具有良好的灵活性和区分度,指向能力和学科素养;而考试的内容和范围必然围绕高中所学的核心内容.《高校自主招生考试直通车学考加试·数学》以高中数学的核心内容为载体,以提高解题能力和学科素养为目标.包含"打开你的解题思路"、"能力型小题求解策略"、"能力型大题求解策略"三个部分,选题范围广、难度大,对读者的要求高,顺应高校自主招生加试的理念和方向.

本书也适合作为普通高考的复习指导材料.

目 录

1. 打开你的解题思路

1.1 解题思路的生成

一、名词解释

T——Tie [taɪ](联结)

L——Link [lɪŋk](联系)

A——Associate [ə'soʃɪet](联想)

1. Tie(联结)

现代汉语词典：结合在一起.

百度：结合，连接.如：画一条直线把这两点联结起来.

2. Link(联系)

现代汉语词典：彼此结上关系.

百度：广义而言，就是事物之间的有机关联，相互联络和结合.

3. Associate(联想)

现代汉语词典：由于某人或某物而想起其他相关的人或事物；由于某概念而引起其他相关的概念.

百度：联想是暂时神经联系的复活，它是事物之间联系和关系的反应.

联想的方法多种多样，把记忆的材料与自己体验过的事物联结起来，效果就很好.

(1) 相似联想：就是由某一事物或现象想到与它相似的其他事物或现象，进而产生某种新设想.

(2) 接近联想：是根据事物之间在空间或时间上的彼此接近进行联想，进而产生某种新设想的思维方式.

(3) 对比联想：是指对于性质或特点相反的事物的联想.例如，由沙漠想到森林，由光明想到黑暗等.

(4) 因果联想：因果律指对逻辑上有因果关系的事物产生的联想.

二、TLA(三联)解题思路生成法的核心理念

TLA 解题思路生成法，提倡：

——面对新颖的问题情景，强调构建生动的心智图像.

——分析过程中要善于捕捉问题的暗示信息.

——构造方法宜充分利用“原型”的启发功能.

——多进行一题多解、多题一解的尝试；多进行问题求解的最优化、简易化探索；跳出题海，追求问题解决的本质化方法，以不变应万变；以智慧战胜经验，以想法生成方法.

TLA 解题思路生成法的思维程序，如图 1.1 所示.

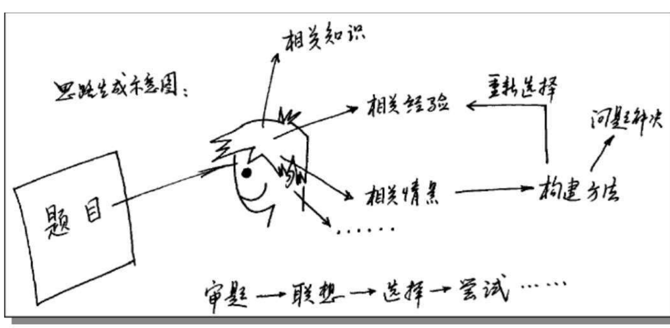

图 1.1

三、典型示例

1. 联结

问题 1 求值：

(1) $0.\dot{2}\dot{3}$；

(2) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}$;

(3) $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\cdots}}}}}}$;

(4) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$.

思路的生成:局部就是整体.

分析 (1) 令 $0.\dot{2}\dot{3}=x$,则两边同乘以 100 得 $100x=23+x$.

答案 $x=\dfrac{23}{99}$.

(2) 令 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}=x$,则两边平方得 $x^2=2x$ $(x\neq 0)$.

答案 $x=2$.

(3) 令 $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\cdots}}}}}}=x$,则两边六次方得 $x^6=24x$.

答案 $x=\sqrt[5]{24}$.

(4) 令 $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}=x$,则 $2+\dfrac{1}{x}=x$.

答案 $x=1+\sqrt{2}$.

2. 联系

问题 2 研究:线段、三角形、四面体的重心,如图 1.2 所示.

思路的生成:通过类比.

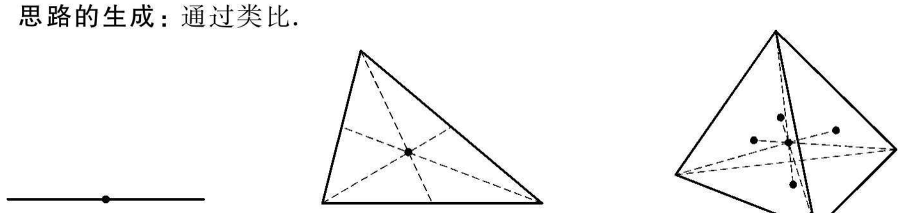

图 1.2

结论：见表1.1.

表 1.1

	线段的重心	三角形重心	四面体重心
定　义	线段的中点	三顶点与相应对边中点连线的交点	四顶点与相应对面重心连线的交点
性　质	分线段长度为 1∶1	分顶点与相应对边中点连线段长度为 2∶1	分顶点与相应对面重心连线段长度为 3∶1
坐标公式	$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$	$\begin{cases}x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\\y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\end{cases}$	$\begin{cases}x=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\\y=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)\\z=\frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)\end{cases}$
拓展结论	重心（点）两等分长度	重心与各顶点连线三等分面积	重心与各棱确定的面四等分体积

3．联想

问题 3　n 为常数（$n\in\mathbf{N}^*$），当 $k!(n-k)!$ 最小时，k 的值为____________________.

思路的生成：

从 $k!(n-k)!$ 联想到 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，问题转化为探寻“二项式系数最大”的问题.

根据二项式系数性质直接可解.

答案　n 为偶数时，k 的值为$\frac{n}{2}$；

n 为奇数时，k 的值为 $\frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{2}$.

问题 4　有一个三棱锥和一个四棱锥，它们的所有棱长都相等，现分别选择它们的完全相等的一个三角形面，将这个面完全黏合在一起，得到一个多面体，问这

个多面体有多少个面？说明理由.

思路的生成：如图 1.3 所示.

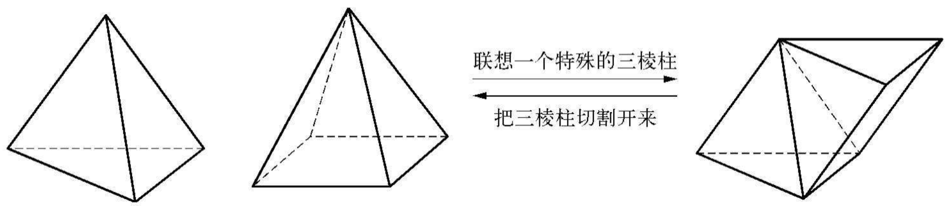

图 1.3

答案 5 个面.

4. 心智图像的合理性体现在直观性、简洁性和准确性

数学思路的生成通常需要借助合理的心智图像，需要学习者有条理地思考，所谓“从混沌中发现有序”就是这个道理.

问题 5 四个小孩玩球时打碎了玻璃.

老师：“是谁把玻璃打碎的？”

宝宝：“是可可.”

可可：“是毛毛.”

多多：“不是我.”

毛毛：“可可说谎.”

如果他们四个人中只有一人说的是真话，那么打碎玻璃的是谁？

思路的生成：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{可可}\\ \text{毛毛}\end{array}\right\}\text{说的话有且只有一个为真}\\ \qquad\text{四个人中只有一句真话}\end{array}\right\}\text{多多话为假}\xrightarrow{\text{结论}}\text{多多打碎了玻璃}$$

分析 数学是常识的精微化，要善于“数学地”思考……

答案 多多.

问题 6 判断方程 $x=\sin x$ 根的个数.

思路的生成：

在同一坐标系内画 $y=x$，$y=\sin x$ 图像可得：

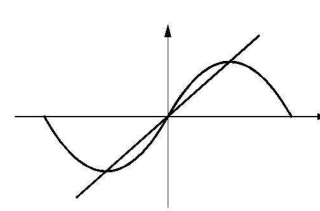

图 1.4

据图 1.4 可知方程有 3 个根.

这是真的吗？

这是假的！

事实上，如图 1.5 所示，在单位圆中，

若 $\angle BOC=x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $AC=\sin x$，$\overset{\frown}{BC}=x$，$BD=\tan x$.

由于 $S_{\text{三角形}OBC}<S_{\text{扇形}OBC}<S_{\text{三角形}OBD}$，

所以 $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x$，即 $\sin x<x<\tan x$.

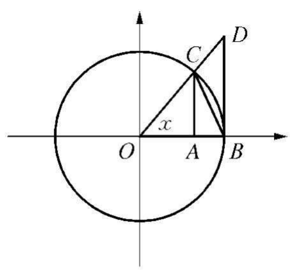

图 1.5

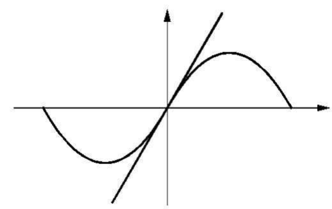
图 1.6

这是个很著名的三角不等式！

据此，正确的作图应为(见图 1.6)：

所以原方程的根是 1 个.

答案 1.

引申 1 判断方程 $\lg x=\sin x$ 根的个数.

思路的生成：

在同一坐标系内画 $y=\lg x$，$y=\sin x$ 图像可得：

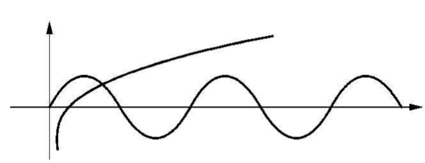
图 1.7

如图 1.7 所示，可知方程有 1 个根.

这是真的吗？

这是假的！

事实上,如图 1.8 所示,因为 $\lg \frac{5\pi}{2} < \lg 10 = 1 = \sin \frac{5\pi}{2}$,

且 $\lg \frac{9\pi}{2} > \lg 10 = 1 = \sin \frac{9\pi}{2}$,

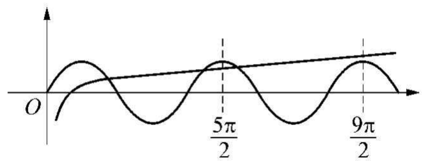

图 1.8

所以原方程的根是 3 个.

答案 3.

引申 2 判断方程 $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ 根的个数.

思路的生成:

在同一坐标系内画 $y = \log_{\frac{1}{16}} x$, $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ 图像可得图 1.9.

如图 1.9 所示,可知方程有 1 个根.

这是真的吗?

这是假的!

事实上,将 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ 分别代入原方程,均满足;

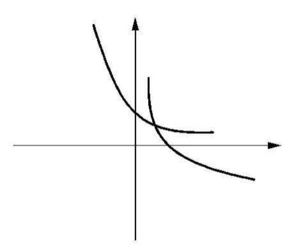
图 1.9

又 $y = \log_{\frac{1}{16}} x$, $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ 互为反函数,

所以必有一个在 $y = x$ 上的点是它们的公共点,其横坐标 x_3 也是原方程的根:

即 $x_3 = \log_{\frac{1}{16}} x_3 = \left(\frac{1}{16}\right)^{x_3}$,显然 $x_3 \neq x_1$, x_2,所以原方程至少有 3 个根!

可以证明,原方程不会再有其他根,这个讨论要求较高,我们略去.

所以原方程的根是 3 个.

对于本问题更一般的结论是:

对于方程 $\log_a x = a^x$,

当 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ 时有三个解；

当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leqslant a<1$ 时有一个解；

当 $1<a<+\infty$ 时无实数解.

答案 3.

在数学中，有时是眼见为虚，我们必须要用心（大脑）来“看”，正所谓“眼睛是心灵的窗口”，“数学是思维的体操”.

1.2　解题思路——联结

一、方法模型

模型 1 如图 1.10 所示.

图 1.10

模型 2 如图 1.11 所示.

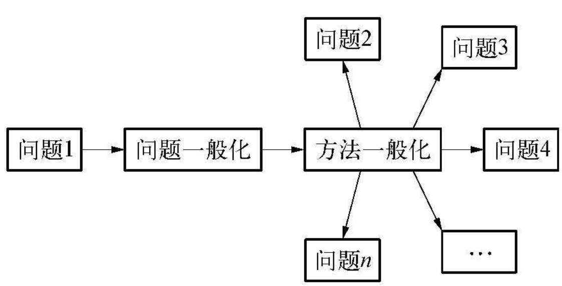

图 1.11

二、典型示例

问题 1　已知 $M(x_0, y_0)$是圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 内部一点,则直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 与此圆的位置关系是________.

思路的生成: 归结到一般方法——比较圆心到直线的距离 d 与圆半径 r 的大小.

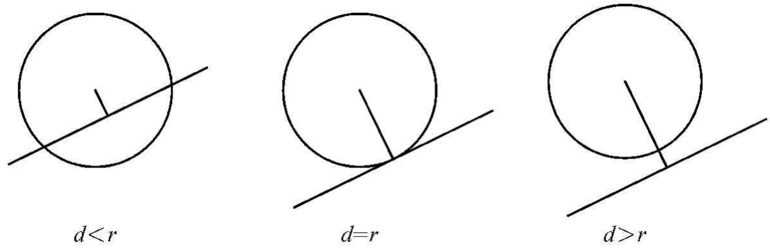

图 1.12

解析 因为 $d=\dfrac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>\dfrac{r^2}{r}=r$，所以直线与圆相离.

答案 相离.

说明(见表 1.2).

表 1.2

点 $M(x_0, y_0)$ 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 位置关系	直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 与此圆的位置关系
圆内	相离
圆上	相切
圆外	相交

问题 2 天安门广场，旗杆比华表高，在地面上，观察它们顶端的仰角都相等的各点所在的曲线是(　　).

A. 椭圆　　B. 圆　　C. 双曲线的一支　　D. 抛物线

思路的生成： 利用相似比，问题归结为：求平面内到两定点距离之比为定值的点的轨迹.

解析 设旗杆高为 m，华表高为 n，$m>n$，旗杆与华表的距离为 $2a$，以旗杆与地面的交点和华表与地面的交点的连线段所在直线为 x 轴、垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，如图 1.13 所示.

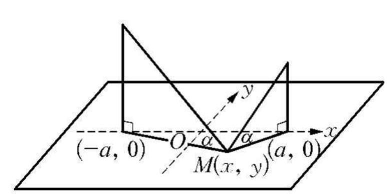

图 1.13

设曲线上任一点 $M(x, y)$，由题意 $\dfrac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\dfrac{m}{n}$，

即 $(m^2-n^2)x^2+(m^2-n^2)y^2-2a(m^2+n^2)x+(m^2-n^2)a^2=0$.