高等院校成人教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下）

主编 陈海波 严希文

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

高等院校成人教育“十二五”规划教材

高等数学

(下册)

陈海波　严希文　主编

对外经济贸易大学出版社
中国·北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下 / 陈海波，严希文主编．—北京：对外经济贸易大学出版社，2013

高等院校成人教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5663-0591-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①陈… ②严… Ⅲ．①高等数学－成人高等教育－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 265532 号

高等数学（下册）

陈海波 严希文 **主编**

责任编辑： 阮珍珍 郑 骞

对 外 经 济 贸 易 大 学 出 版 社

北京市朝阳区惠新东街 10 号 邮政编码：100029

邮购电话：010－64492338 发行部电话：010－64492342

网址：http://www.uibep.com E-mail：uibep@126.com

唐山市润丰印务有限公司印装 新华书店北京发行所发行

成品尺寸：185mm×230mm 29 印张 577 千字

2013 年 3 月北京第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5663-0591-6

印数：00 001－10 000 册 定价：64.00 元

高等院校成人教育“十二五”规划教材

编审委员会

总　　序

党的十八大报告中指出：要积极发展继续教育，完善终身教育体系。继续教育是我国高等教育的重要组成部分，是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展以成人教育为主的继续教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行继续教育制度，鼓励发展多种形式的继续教育，建立与完善终身教育体系，培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才，对于加强社会主义精神文明建设，促进社会进步和经济发展，都将起到十分重要的作用。

按照教育部关于成人高等教育人才的培养目标，构建适用的教材体系，是成人高等教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编审委员会、作者和出版社的共同努力，“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”将陆续出版，我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材，具有以下特点：

一是体例新颖。在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖教学大纲的重点或主要内容。教材中充分考虑到学生学习时可能遇到的问题，给他们以提示和建议。在章后和书后分别设置“同步测练与解析”和“综合测练与解析”栏目，涵盖本章及本书的重要知识点，并给出详尽的参考答案，对难题进行分析点评，列出解题思路与要点，以方便学生自学自测。

二是内容丰富、形式多样。教材内容既有基础知识、基本理论，又有基本技能的展示；既注重基本原理与应用知识的传授，又将纸质教材与多媒体教学资源、网络资源相结合，将与课程内容相关的法律法规、工具模板、操作范例等以多媒体网络资源的形式提供给学生。

三是实用性强。遵循成人高等教育人才培养模式与教学规律，在教材的编写上将理论与实际紧密结合，注重案例的引入，教材中尽可能多地安排案例，并进行详细的分析讲解。旨在通过案例教学，对课程重点难点进行深化分析和实操训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题以及动手操作的能力。

在此，我相信“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”的出版，对湖南建设教育强省这一目标的实现必将起到积极的推动作用。同时，继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各院校在使用教材过程中有什么问题和建议，请及时反馈编委会，以便改进编写工作，真正把我省成人教育的教材建设提高到一个新的水平。

湖南省教育厅副厅长：申纪云

2013 年 2 月于长沙

前　　言

高等数学是理工农医及经管类成人高等教育各专业的一门重要的基础理论课程，高等数学的教学对于各专业后续专业课程的学习及合格专门人才的培养起到非常重要的作用，而一本好的高等数学教材是促进高等数学教学、提高教学质量和实现教学目标的重要保障。

我们在教学过程中常常感到，由于受教材内容、学生认识能力、教学时数等诸多因素的影响，有些问题在课堂上顾不上讲，有的又暂时不宜讲解，有的虽能讲到，教材上又缺少相应归纳总结而不便学生复习和掌握。因此，编写一本能够紧密结合成人高等教育实际，遵循成人高等教育对高等数学课程的基本要求，在“教”与“学”两方面满足本专科层次成人高等教育的教学需求，既方便教学，又能帮助学生深入理解基本概念和基本理论，牢固掌握基本运算技能，适应性和针对性较强的成人高等教育高等数学教材，是我们长期以来的一个愿望。

近年来，我们结合自己成人高等教育高等数学教学经验，在对课堂教学讲义进行反复修改的基础上，编写了这套适合成人教育的高等数学教材。

首先，在教学内容上，本套教材力图处理好专科段和本科段数学知识的“接力”问题，既保证专科和本科段知识不能脱节，又避免两阶段知识内容的重复，做到内容全面，结构合理，逻辑清晰，方便教师根据本专科不同教学计划和学时要求选择教学内容。

其次，在每章每节对知识要点与重点难点进行了归纳总结，例题典型，解析详细，并配有大量习题，难易恰当，同时做到语言通俗，叙述清楚，方便学生自学。

教材分上下两册，全书为理工类和经管类成人学历教育（成人、网络、自学考试）高升本、专升本、专科（上册）通用教材，也可作为高职高专理工类和经管类参考教材。

上册内容是一元函数微积分学的基本知识，包括函数与极限，导数与微分，中值定

理与导数的应用，不定积分与定积分及其应用，微分方程等。

下册内容主要是多元函数微积分学，包括多元函数微分法及其应用，重积分与曲线积分及曲面积分，同时还介绍了空间解析几何与无穷级数的相关知识。

教材在编排上采用“内容提要与基本要求—基本内容叙述—典型例题解析—习题—本章基本知识体系（小结）”的章节结构，与之相适应的教学环节是“预习—系统面授—同步练习—每章归纳总结”。

全书由中南大学陈海波和严希文任主编，廖耘、史建权任副主编，参加编写的还有王俊杰、史红霞、周君君。

由于编者水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 1 月

目　　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数方法来研究几何问题，也就是通过建立坐标系，把点与有序数组,几何图形及解析表达式联系起来，并给予直观的几何意义.

§7.1　向量及其线性运算

一、内容提要与基本要求

内容提要	基本要求
1. 空间直角坐标系	完整地叙述空间直角坐标系的概念 用平行六面体表示空间一点的位置 根据已知点的坐标，作出此点的图形 根据空间两点的坐标，求出其间的距离 根据已知球心和半径，写出球面的方程，并通过坐标平移，使球面方程简化
2. 向量代数	牢固掌握向量、向量相等、向径、向量的模、单位向量、零向量和反向量的概念
3. 向量的运算	熟练掌握向量的运算
4. 加法	用平行四边形法则和三角形法则，作两个向量的加法运算
5. 向量加法的性质	用多边形法则，作多个向量的加法 用平行四边形法则证明：交换律和结合律
6. 减法	用向量的加法表示向量的减法
7. 数乘运算	弄清数量与向量的乘积的几何意义
8. 数乘的性质	从定义出发证明数乘的交换律、结合律以及分配律
9. 向量的坐标	熟练掌握用向量的坐标表示向量的加法和数乘 根据向量的坐标，求向量的模，向量的方向余弦和方向角

二、向量概念

既有大小，又有方向的量，例如位移、速度、加速度、力、力矩、这一类量叫做向量（或矢量）.

在数学上，往往用一条有方向的线段，既有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段来表示向量的方向，以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（图 7.1），

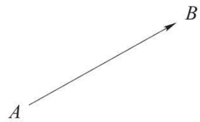

图 7.1

有时也用一个黑体字母（书写时，在字母上面加箭头）来表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{u},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{r}},\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{F}}$ 等等.

在实际问题中，有些向量与其起点有关（例如质点运动的速度与该质点的位置有关，一个力与该力的作用点的位置有关），有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，当遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 a 和 b 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 a 和 b 是相等的，记作 $a=b$，这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$，a，$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|a|$，$|\overline{a}|$，模等于1的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量，记作 0 或 $\vec{0}$，零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此，两向量平行，又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念，设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

三、向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 a 与 b，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=a$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=b$，连接 AC（图 7.2），那么向量 $\overrightarrow{AC}=c$ 称为向量 a 与 b 的和，记作 $a+b$，即

$$c=a+b$$

上述作出向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

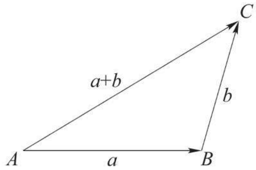

图 7.2

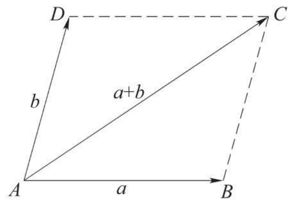

图 7.3

力学上有求合力的平行四边形法则，因此，我们也有向量相加的平行四边形法则，这就是：当向量 a 与 b 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（图 7.3），显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 a 与 b 的和 $a+b$.

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律　$a+b=b+a$；

（2）结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

这是因为，按向量加法的规定（三角形法则），从图 7.3 可见：

$$a+b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=c$$

$$b+a=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=c$$

所以符合交换律，又如图 7.4 所示，先作 $a+b$ 再加上 c，即得和 $(a+b)+c$，如以 a 与 $b+c$ 相加，则得同一结果，所以符合结合律.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$a_1+a_2+\cdots+a_n(n\geqslant 3),$$

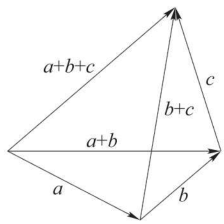

图 7.4

并由向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和，如图 7.5，有

$$s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

设 a 为一向量，与 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量，记作 $-a$，由此，我们规定两个向量 b 与 a 的差

$$b-a=b+(-a)$$

即把向量 $-a$ 加到向量 b 上，便得 b 与 a 的差 $b-a$［图 7.6（a）］.

特别地，当 $b=a$ 时，有

$$a-a=a+(-a)=0$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

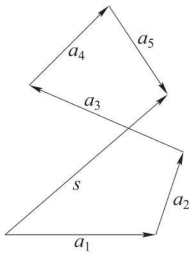

图 7.5

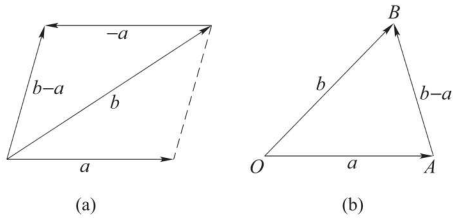

图 7.6

因此，若把向量 a 与 b 移到同一起点 O，则从 a 的终点 A 向 b 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 b 与 a 的差 $b-a$ ［图 7.6（b）］.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \quad 及 \quad |a-b| \leqslant |a|+|b|$$

其中等号在 a 与 b 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa，规定 λa 是一个向量，它的模

$$|\lambda a| = |\lambda||a|$$

它的方向当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.

当 $\lambda = 0$ 时，$|\lambda a| = 0$，即 λa 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda = \pm 1$ 时，有

$$1 \cdot a = a，（-1）a = -a$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律　$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu a)$，$\mu(\lambda a)$，$(\lambda\mu)a$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu||a|$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$$

（2）分配律

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a \tag{7.1}$$

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b \tag{7.2}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来说明，这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 7.7）.

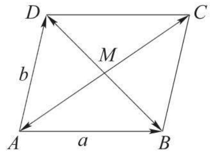

图 7.7

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$a+b=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

即
$$-(a+b)=2\overrightarrow{MA}$$

于是
$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(a+b)$$

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(a+b)$

又因 $-a+b=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(b-a)$

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(a-b)$

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量，设 e_a 表示与非零向量 a 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的规定，由于 $|a|>0$，所以 $|a|\mathrm{e}_a$ 与 e_a 的方向相同，即 $|a|\mathrm{e}_a$ 与 a 的方向相同，又因 $|a|\mathrm{e}_a$ 的模是

$$|a||\mathrm{e}_a|=|a|\cdot 1=|a|$$

即 $|a|\mathrm{e}_a$ 与 a 的模也相同，因此

$$a=|a|\mathrm{e}_a$$

我们规定，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\dfrac{a}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}a$，由此，上式又可写成

$$\frac{a}{|a|}=\mathrm{e}_a$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 λa 与 a 平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有

定理 1　设向量 $a\neq 0$，那么，向量 b 平行于 a 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $b=\lambda a$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $b/\!/a$，取 $|\lambda|=\dfrac{|b|}{|a|}$，当 b 与 a 同向时 λ 取正值，当 b 与 a 反向时 λ 取负值，即有 $b=\lambda a$，这是因为此时 b 与 λa 同向，且

$$|\lambda a|=|\lambda||a|=\frac{|b|}{|a|}|a|=|b|$$

再证数 λ 的唯一性，设 $b=\lambda a$，又设 $b=\mu a$，两式相减，使得

$$(\lambda-\mu)a=0\text{，即}\ |\lambda-\mu||a|=0$$

因 $|a|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

定理证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据，我们知道，给定一个点，一个方向及单位长度，就确定了一条数轴，由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 i 确定了数轴 Ox（图 7.8），对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}//i$，根据定理 1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=xi$（实数 x 叫做轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应，于是

$$\text{点 } P\leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=xi\leftrightarrow \text{实数 } x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系，据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=xi$$

图 7.8

四、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i、j、k，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称坐标轴，它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系或[O；i，j，k]坐标系（图 7.9），通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7.10.

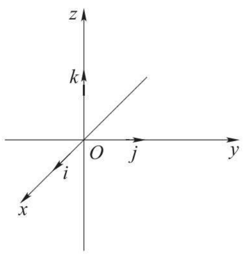

图 7.9

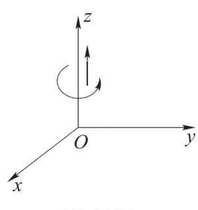

图 7.10

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的 3 个平面统称为坐标面，x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面，3 个坐标面把空间分面 8 个部分，每一部分叫做一个卦限，含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 I，II，III，IV，V，VI，VII，VIII 表示（图 7.11）.

任给向量 r，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=r$，以 OM 为对角线，三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$ 如图 7.12 所示，有

$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设
$$\overrightarrow{OP}=xi,\overrightarrow{OQ}=yj,\overrightarrow{OR}=zk$$

则
$$r=\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk$$

上式称为向量 r 的坐标分解式，xi，yj，zk 称为向量 r 沿三个坐标轴方向的分向量.

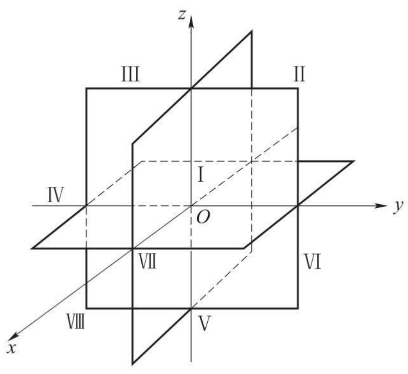

图 7.11

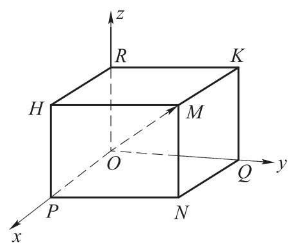

图 7.12

显然，给定向量 r，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，进而确定了 x,y,z 3 个有序数；反之，给定 3 个有序数 x,y,z，也就确定了向量 r 与点 M. 于是点 M、向量 r 与三个有序数 x,y,z 之间有一一对应的关系.

$$M\leftrightarrow r=\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk\leftrightarrow\{x,y,z\}$$

据此，定义：有序数 x,y,z 称为向量 r（在坐标系 $Oxyz$ 中）的坐标，记作 $r=\{x,y,z\}$；有序数 x,y,z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$ 中）的坐标，记作 $M=\{x.y.z\}$.

向量 $r=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径，上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标，记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.