理論力學习題集

（中　册）

北京农业机械化学院
理論力学教研組編
沈阳农学院翻印
1960

沈阳农学院

第九章 点的運动

§1. 运动学的基本問題

运动方程式

运动的軌跡

速度

加速度

§2. 决定点的运动方法

1. 矢量法：只要用一个矢量运动方程式

$$\bar{r}=\bar{r}(t)$$

亦可完全表明點的运动规律

因为用矢量表示一物理量时簡單明了，所以在理論推導时，被广泛的採用。

2. 座标法：常用的有兩种：

直角座标法：可用三个方程式：

$$\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases}$$

完全决定點的运动。上述方程式常常需要由机構的几何关系写出。从方程式中消去时間t，即可得軌跡方程。

$$\varphi_1(x, y)=0$$
$$\varphi_2(y, z)=0$$

極座标法：多用于點做平面曲綫运动时，由

$$r=r(t)$$
$$\varphi=\varphi(t)$$

来决定點的运动。

3. 自然法：要完全决定點的运动，須知道：

i 运动軌跡

ii 沿該軌跡的运动方程式：$S=f(t)$

座标法与自然法在具体問題的計算中有实用价值。

§3. 从直角座标运动方程式求点的速度与加速度

1. 将已知运动方程式：

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)。$$

对时間 t 取一次導数，即得速度在相应軸上的投影：

$$v=\frac{dx}{dt},\quad vy=\frac{dy}{dt},\quad vz=\frac{dz}{dt}$$

速度的大小： $v=\sqrt{v^2_x+v^2_y+v_z^2}$

其方向余弦： $\cos(\overline{v}\cdot\overline{i})=\frac{v_x}{v}$

$$\cos(\overline{v}\cdot\overline{J})=\frac{v_y}{v}$$

$$\cos(\overline{v}\cdot\overline{k})=\frac{v_z}{v}$$

2．将运动方程式对时間 t 取二次導数，即得加速度在相应軸上的投影：

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt},\quad w_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt},$$

$$w_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$$

加速度的大小： $w=\sqrt{w^2_x+w^2_y+w^2_z}$

其方向余弦： $\cos(w\cdot i)=\frac{w_x}{w}$

$$\cos(\overline{w}\cdot\overline{J})=\frac{w_y}{w}$$

$$\cos(\overline{w}\cdot\overline{k})=\frac{w_z}{w}$$

§4．自然法求速度加速度

1．在軌跡上的每一點，都可以画出与軌跡有直接联系的三根相互垂直的直綫：切綫，主法綫与付法綫；这些直綫就形成了所謂自然軸；其原點在动點上，且随其运动。

2．将运动方程式S＝x（t）对时間取一次導数，即得點沿軌跡的切綫方向的速度（代数值）：

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t)$$

3．因加速度永远位于密切面內，而付法綫是从軌跡上的动點对密切面所引的垂綫，所以$\overline{w}$在付法綫上的投影永为零。w在切綫与法綫上的投影分别为：

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

$$w_n=\frac{v^2}{p}$$

其中 p 为軌跡在該处的曲率半徑；如曲綫为圓时，p 即为圓的半徑。

由此得： $w=\sqrt{w^2_\tau+w^2_n}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{p}\right)^2}$

$$tg(w\cdot v)=\frac{w_n}{w_t}$$

4．由方程式：$\overline{w}=\frac{dv}{dt}=(v\cdot x)=\frac{dv}{dt}\overline{\tau}+\frac{\overline{v}^2}{p}n$ 的推導过程中可知：切向加速

度 $w_\tau=\frac{dv}{dt}$是改变速度大小的因素， 而法向加加速度$w_n=\frac{v^2}{\rho}$是改变速度方向的因素，由此可知：在直綫运动中，因軌跡方向永不改变即$\rho=\infty$。故$w_n=0$，所以切向加速度$\frac{dv}{dt}$就是全加速度。

5. 曲率半徑的一般求法。

如直角座标$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$，$z=f_3(t)$为已知，我們就可求出：

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$及$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}$，幷注意：$w_\tau=\frac{dv}{dt}$。所以可先求出。$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}$。但$w_n=\frac{v^2}{\rho}$所以：

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}$$

由以上关系式也可看出自然法与直角座标法的相互关系。

§5. 解題方法指示

1. 根据題目意思，先把質點的运动情况搞清楚，幷以簡單圖形表示出來。

2. 根据已知条件选擇解題的方法——自然法或座标法。

3. 最重要的是由點的运动几何关系找出點的运动方程式（已經給出更好）。然后用微分学的知識很容易求出它的速度和加速度。

4. 有时已知速度和加速度，要求的是运动方程式， 路程和軌跡， 这时需要用積分來求；不过，須先知道初始条件x_0和v_0，以便确定積分常数。初始条件$\overline{x}_0$、$\overline{v}_0$一般由質點的运动情况來判断

§6. 在本章里，建議解下列各題

243. 已知點的运动方程式，求其軌跡方程式：

a） $x=4t-2t^2$

$y=3t-1.5t^2$

b） $x=at^2$

$y=bt$

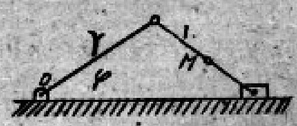
c） $x=5\cos t$

$y=3-5\sin t$

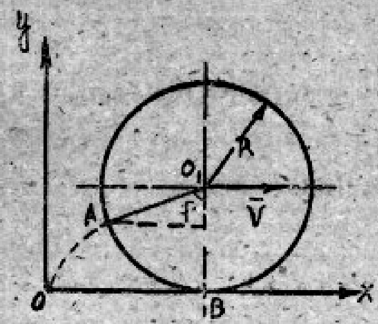
244. 自飛机上投下之重物按下列方程式运动：$x=40t$；$y=4.9t^2$（x，y以公尺計，t以秒計）。將重物投出之點取作座标原點，OX軸定为水平， Oy軸鉛垂向下，如飛机飛行高度$h=3000$公尺，求重物的軌跡方程式，幷求重物下落时間及其水平射程。

245. 曲柄OA以等角速度$\omega=10/$秒轉动，已知長度OA=AB=80公分，求連桿中點M的运动方程式及其跡軌，幷求滑块B的运动方程式，如在开始时，滑块在最右端位置。

246. 机車沿直綫軌道以等速20公尺/秒行駛，机車車輪半徑R=1公尺，如車輪僅滾动而不滑动，將點在軌道上的起始位置取为OX座标原點，將軌道取为軸， 求輪緣上一點的运动方程式及其軌跡。



題 245 圖



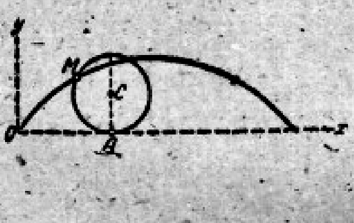
題 246 圖

247. 輪子沿直綫軌道滚动而不滑动，輪緣上點的运动方程式为：

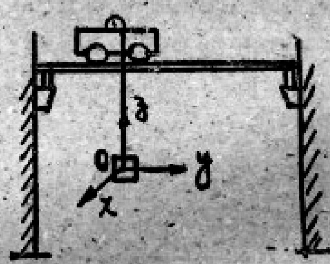
$$x=a\,(kt-\sin kt),\qquad y=a\,(1-\cos kt)$$

設y軸向上，問此點在何时位于軌跡的最底，中間及最高位置。

248. 桥式吊車按方程式$x=t$沿工場移动，而跑車按方程式$y=1.5t$沿吊車横向移动（與y以公尺計，t以秒計），鏈条以速度$v=0.5$公尺/秒收縮，求重物重心的軌跡，开始时重心位置至水平面OXY内，Oz軸的方向为鉛垂而向上。



題 247 圖



題 248 圖

249. 根据已知點的运动方程式，求其軌跡方程式，并从點的起始位置計算距離而求出點沿軌跡之运动規律。

a） $x=3\sin t$

$y=3\cos t$

b） $x=5\cos 5t^2$

$y=5\sin 5t^2$

250. 點依照$S=t^3+4t^2-2t$規律，沿直綫运动，S与t的單位各为公尺与秒，試求动點在1）第二秒末的速度。2）第三鐘內的位移。3）第四秒鐘內的平均速度。

251. 在曲柄連桿机構中$r=l=a$，$\varphi=\omega t$，其中ω是常数，求連桿中點M的速度及滑块的速度（参看題245圖）。

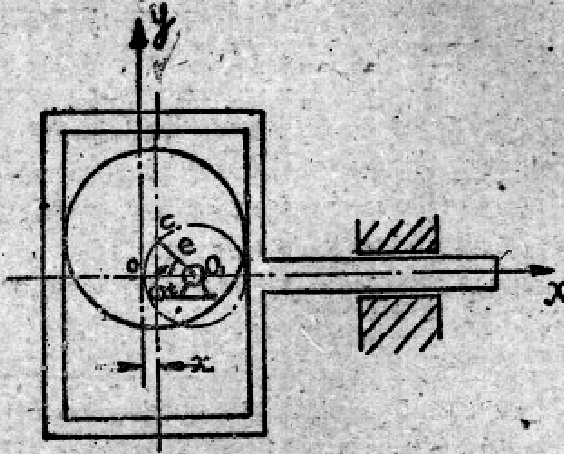
252. 已知压力机的圓偏心之外框的运动方程式为：

$x=e\,(1-\cos\omega t)$，其中x以公分計，t以秒計，e表示偏心率，ω表示偏心輪的角速度（e与ω是常数）。求i）在瞬时$t=0$以后改变运动方向的最初兩个瞬时，ii）速度到达最大值时的最初瞬时。

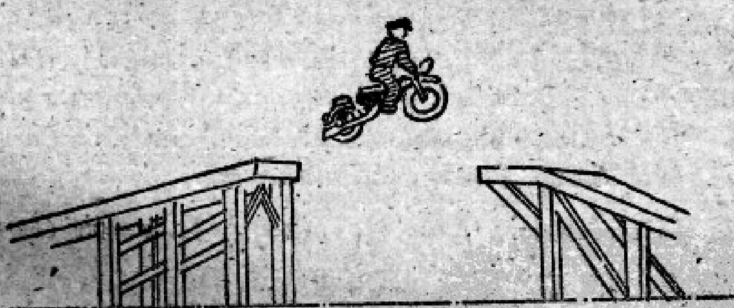
253. 二輪摩托作飛越断桥的战斗表演（如圖示）。已知断桥左部分傾斜$\alpha=30°$角，右

部分断桥面水平与左部分右端同高h＝1.8公尺，而中間断掉部分为4公尺（水平方向），試求摩托車越过断桥缺口时所需之初速度和时間（不計空气阻力）。

254. 掛在彈簧上的重物作直綫簡諧运动。如1)当t＝0时，$X_o＝0$，$V_o＝62.8$公分/秒。2）每分鐘振动的次数为120次。求重物的运动方程式，并画出重物的运动圖及速度圖。



題 252 圖



題 253 圖

255. 已知曲柄銷的运动方程式为:

$$x=15\sin\frac{\pi}{4}t,\qquad y=15\cos\frac{\pi}{4}t$$

（x、y以公分計，t以秒計，）当曲柄銷在座标軸上时，求速度在座标軸上的投影。

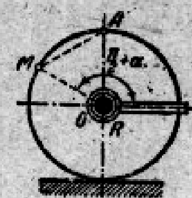
256. 自飛机上投下的重物按下列方程式运动:

$$x=v_o t,\ y=h-\frac{1}{2}gt^2$$

ox軸系水平方向，oy軸則鉛垂向上。求：1）軌跡方程式。2）重物与ox軸相交时的速度（大小及方向）。3）射程。

257. 机車車輪沿水平直綫軌道滚动不滑动，而輪軸的速度为V＝10公尺/秒，輪的半徑R＝1公尺，求距离軸s＝0.5公尺处O點运动的方程式。ox軸与軌道重合，oy軸与點在最初最低位置所在的半徑重合，又当該點所在的車輪直徑具有水平与鉛垂位置，求該點的速度（参看題246圖）。

258. 机車速度v_0=72公里/小时；輪的半徑R=1公尺，車輪沿直綫軌道滾动而不滑动，求輪緣上M點〔过此點的半徑与速度v_0的方向成角（$\frac{\pi}{2}+\alpha$）〕的速度v的大小。



題 258 圖

259. 汽車在作制动試驗，試驗开始时， 車速为54公里/小时，制动后汽車滑行了20公尺（制动距离），如設其減速度为常数求此減速度。

260. 汽車以60公里/小时的速度前進， 当駕駛員看到停車的信号时即用剎車使停止，設由于剎車，汽車可能获得的減速度为 8 公尺/秒^2，而这駕駛員的"反应时間"为0.7秒，試求从看到停車信号起至汽車停止所駛过的路程。

（反应时間：为从看到停車信号到使用剎車时的一段时間）。

261. 已知錘子打击桩柱后，即与桩柱一起等減速运动，并經0.02秒而停止，此时桩陷入地 6 公分。

求：桩运动的初速度。

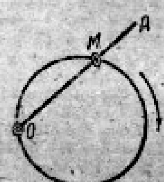
262. 为測定井的深度，我們用一石块以初速度为0投入井內，5秒后听到了石块打水的声音，設声音的速度为v=350公尺/秒。試决定井的深度。

263. 在半徑为10公分的鉄圈上，套一小环M，有桿OA穿过小环M，并繞鉄圈上一點O轉动，其角速度相当于在 5 秒鐘轉一直角。求小环的速度V与加速度W。

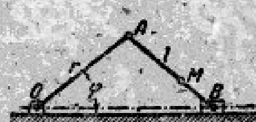
264. 飛輪加快轉动时，其輪緣上一點按方程式$S=0.1t^3$而运动（t以秒計， S以公尺計），飛輪的半徑为2公尺，求当此點的速度V=30公尺/秒时， 此點的法向与切向加速度。

265. 蒸汽机开动时其曲柄銷的运动方程式为：$X=75\cos 4t^2$，$y=75\sin 4t^2$（x，y以公分計，t以秒計）。求銷的速度、切向加速度与法向加速度。

266. 如在曲柄連桿机構中r=l=60公分， $MB=\frac{1}{3}l$，$\varphi=4\pi t$（t以秒計）， 求当$\varphi=0$时，M點的速度、加速度及其軌跡的曲率半徑。



題 263 圖



題 266 圖

267. 东方紅牌拖拉机的起动小引擎，飛輪直徑設为0.1公尺， 在起动时繩繞于其上而人以手拉繩， 此拉繩之运动方程設为$S=10t^2$， 求轉动飛輪边緣上一點在轉动后1秒鐘时的加速度。

268. 多鏵犁地輪半徑为R，被拉着在直綫軌道上等速滾动，以直軌为x軸， 运动开始时，輪緣上一點M与座标原點重合，此后某瞬时OM与x軸成$\varphi=\omega t$，而ω为常数，求i) 此时M點的运动方程式。ii)其切向与法向加速度的大小。iii)証明點在最低位置时的速度等于零（参看題247圖）。

269. 列車沿半徑R=800公尺的圓弧軌道等減速行駛， 走过一段路程S=800公尺，其

初速$V_0=54$公里/小时， 而其末速$V=18$公里/小时， 求列車在路程的起點与末點时之加速度，并求在此圓弧軌道上运动的时間。

270. 汽車从車站出發行駛于曲率半徑$\rho=600$公尺之道路上，其速度均匀增加，三分鐘后行駛路程为1620公尺。求此时的切向、法向与全加速度。

271. 拖拉机以匀加速行駛在曲率半徑为$R=300$公尺的路上，軌道的曲綫部分長$l=200$公尺，拖拉机开始走上曲綫的瞬时速度$V_0=12$公里/小时， 在离开曲綫的瞬时速度$v=18$公里/小时。求此拖拉机走上曲綫与离开曲綫时的加速度W。

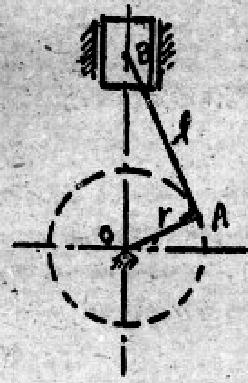
272. 苏联于1957年10月4日發射了第一顆人造地球衛星， 它的平均速度为8000公尺/秒，它离地面的高度約为900公里，若我們把它看作为均速圓周运动，試求它繞过地球一周所需的时間及其加速度（已知地球半徑为6400公里）。

273. 高速柴油机， 其曲軸轉数$n=1500$轉/分， 曲柄半徑$R=oA$，連桿長度$l=AB=160$公厘，二者之比$\lambda=\frac{R}{l}=\frac{1}{4}$求此發动机活塞的运动（运动方程，速度，加速度）参看題274圖）。

（提示：$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{4}\lambda^2\sin\varphi+\cdots\cdots$）

274. KД—35型拖拉机曲軸轉速$n=1400$轉/分，曲柄半徑$oA=r=65$公厘， 連桿長度$AB=l$，二者的比值$\lambda=\frac{r}{l}=\frac{1}{4}$求此拖拉机活塞的运动方程、速度、加速度。

（提示：同上題）



題274圖

275. 點运动的極座标方程式为：$r=ae^{t}$及$\varphi=Kt$， 其中a与为已知常数，求以向徑r的函数來表示的軌跡方程式、速度、加速度及其軌跡的曲率半徑。

第十章　剛体運动的基本形式

§1. 剛体的平行移动:

如剛体运动时，剛体內的所有各直綫均作平行于自身的运动，这种运动就称为剛体的平行移动，簡称为移动。

在剛体移动时，其上所有各點均走出一完全相同的軌跡（空間的或平面的）。在每一已知瞬时，各點的速度和加速度大小方向也完全相同。因此，在研究剛体的移动时，完全可以拿點的运动学（通常以物体的重心）來研究。

§2. 剛体的定軸轉动:

当剛体运动时，其体內有一直綫靜止不动，这种运动称为剛体繞定軸轉动。此直綫称为轉动軸。当剛体做定軸轉动时，剛体上所有的點均走出一个圓周軌跡，圓的平面垂直于轉动軸，而圓心在轉动軸上。

Ⅰ. 一般情况下的轉动:

轉动方程式为: $\varphi = f(t)$ 剛体的角速度为:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t)$$

剛体的角加速度为:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t)$$

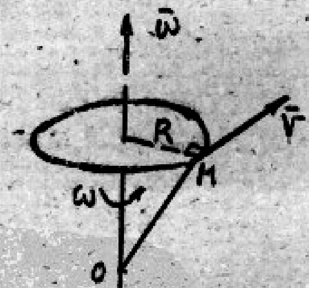


圖 10—1

剛体上任一點的綫速度的大小为:

$$v = R\omega$$

其方向沿軌跡的切向、指向轉动的一方。

該點的切向加速度按大小为:

$$W_t = R\varepsilon$$

其方向沿軌跡的切向，指向应与角加速度一致。

該點的法向加速度按大小为:

$$W_n = R\omega^2$$

其方向沿着半徑R，永远指向轉动軸。

于是該點的全加速度大小为:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

其方向由下式決定:

$$tg(\bar{w}, \bar{w}_n) = \frac{w_t}{w} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Ⅱ. 等速轉动和等變速轉动的情况:

剛体在等速轉动时，角速度和每分鐘的轉速有下列重要关系：

$$\omega=\frac{\pi n}{30}$$

运动方程式为

$$\varphi=\varphi_o+\omega t$$

剛体在等变速轉动时，其运动方程式和角速度变化为：

$$\varphi=\varphi_o+\omega_o t\pm\frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

$$\omega=\omega_o\pm\varepsilon t$$

上式中的正負号是这样決定：　如剛体为等加速轉动时用正号，　如为等減速轉动时用負号。

Ⅲ. 輪系的轉动：

物体之間的运动轉換（用在轉动机構中），主动輪一般都是等速轉动的情况。通常用主动輪和被动輪的角速比表示其轉动比，用i表示。如用m代表外接副的数目，　其傳动比可表示为：

$$i_{1-m}=\frac{\omega_1}{\omega_m}(-1)^m=\frac{r^{2\prime}r^{3\prime}\cdots\cdots r_m{}^{\prime}}{r_1r_2\cdots\cdots r_{m-1}}(-1)^m$$

$$=\frac{z_2{}^{\prime}z_3{}^{\prime}\cdots\cdots z^{m\prime}}{z_1z_2\cdots\cdots z_{m-1}}(-1)^m$$

$$=\frac{\text{被动齒輪半徑（或齒数）的乘積}}{\text{主动齒輪半徑（或齒数）的乘積}}(-1)^m$$

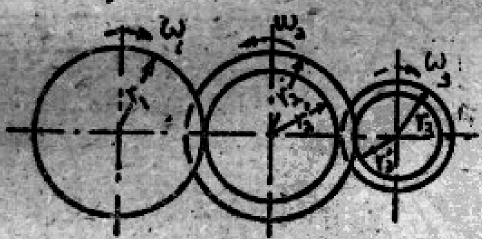


圖 10—2

Ⅳ. 矢量表示法：

为了簡捷的表示轉动剛体內各點的速度加速度，　力学上常用矢量表示：以矢徑r（自轉軸上任一點作出）表示剛体內任一點的位置，$\overline{\omega}$表示角速度矢量（沿轉軸），$\overline{\varepsilon}$表示角加速度的矢量，則剛体內任一點的綫速度和加速度与剛体的轉动速度有下列重要关系：

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}$$

$$\overline{w}_\tau=\overline{\varepsilon}\times\overline{r}$$

$$\overline{w}_n=\overline{\omega}\times\overline{v}$$

$$\overline{w}=\overline{\varepsilon}\times\overline{r}+\overline{\omega}\times\overline{v}$$

§3. 小結

以后我們就会看到：剛体的任何复雜运动，都可以分解为上述兩种基本运动——剛体的

移动和轉动——來研究。这就是研究本章的重大价值。

§4. 解題方法指示:

在解剛体轉动問題时，大致可分为下面三种类型:

1. 已知剛体的轉动規律$\varphi=f(t)$，求其角速度和角速度。解这类問題就是利用微分学的知識。有时要求某指定瞬时的角速度和角加速度，这时須先由轉动方程$\varphi=f(t)$求出任意瞬时的ω和ε通式，最后再代入指定的瞬时値便得。

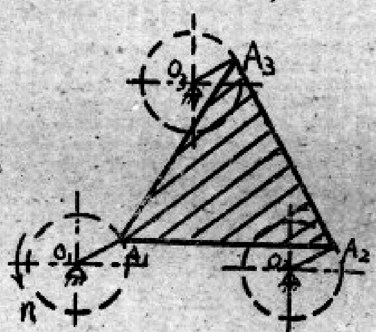
如求剛体內某一點的綫速度和加速度，須先求出剛体的角速度和角加速度。

2. 已知剛体的角速度和角加速度，求其轉动規律。解这类問題，就是利用積分学的知識；兩積分常数，須由初始条件φ_0、ω_0來確定。初始条件φ_0、ω_0一般由所研究物体的运动情况來判斷。

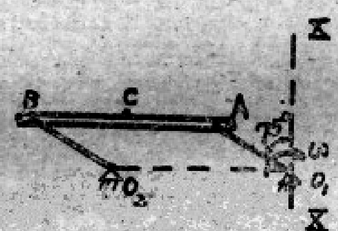
3. 在解輪系傳动时，主要是求其傳动比，这时要注意各輪間的联接关系，并要注意其傳动方向。

§5. 在本章里建議下列各題:

276. 竪固的三角形藉助于三个相等且又平行的曲柄使其轉动，已知曲柄$\overline{O_1A_1}=\overline{O_2A_2}=\overline{O_3A_3}=15$公厘，且以等速$n=320$轉/分鐘轉动，試求其上任一點點之速度与加速度。



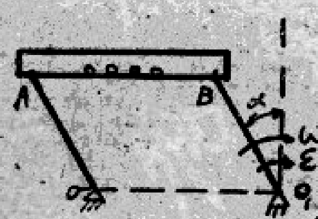
題 276 圖



題 277 圖

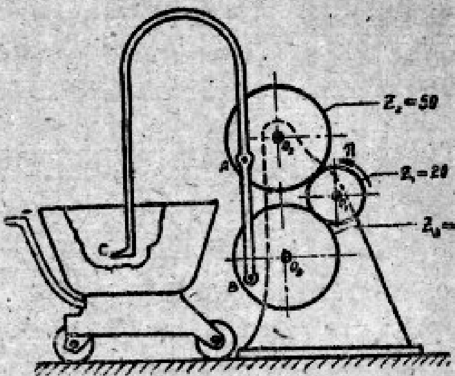
277. C—10脫谷机上之逐槀器，由等長而平行的双曲柄帶动其鏈AB运动，兩曲柄分別繞O_1、O_2以等速$\omega 1$/秒轉动。已知$O_1A=O_2B=60$公厘，当O_1A轉至圖示位置时，求附着于AB中點麥桿C之速度与加速度。

278. 在輸送散粒的擺动式运輸机中，$OO_1=AB$，$OA=O_1B=l$，如某瞬时曲柄O_1B与鉛垂綫成α角，且該瞬时其加速度与角加速度分別为ω_0及ε_0。(方向如圖)。試求輸送槽上顆粒M的速度与加速度，設該瞬时顆粒是隨着在槽上。

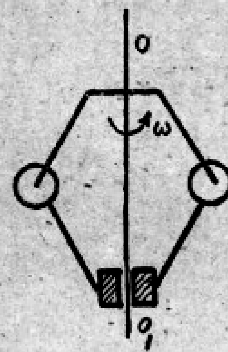


題 278 圖

279. 攪拌机由主动軸O_1同时帶动齒輪O_2、O_3轉动，攪棍ABC用銷釘A、B和O_2、O_3輪相連，若已知主动輪轉动角速度为$n=950$轉/分，$AB=O_2O_3$，$O_2A=O_2B=25$公分，各輪之齒数如圖所示。求攪桿端點C的速度及軌跡。



題 279 圖

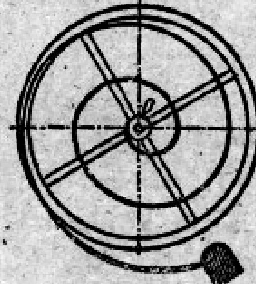


題 281 圖

280. 如已知蒸汽渦輪机在發动时，其动輪的轉角与时間的立方成正比，又当$t=3$秒时，动輪的角速度相当于$n=870$轉/分鐘。求动輪的轉动方程式。

281. 瓦特离心調速器的擺球繞鉛垂軸OO_1作$n=120$轉/分鐘的轉动，在初瞬时其轉角为$\frac{\pi}{6}$弧度，求經过$t=\frac{1}{2}$秒后，擺球的总轉角与角位移。

282. 鐘表擺盤作周期为$T=\frac{1}{2}$秒的簡諧扭轉擺动。擺动边緣上一點离开其平衡位置最大的角偏度为为$\alpha=\frac{\pi}{2}$弧度。求自平衡位置开始运动后2秒时擺盤的角速度与角加速度。



題 282 圖

283. 一軸以等角加速度从靜止狀态开始轉动，在最初5秒鐘內轉了12.5轉，問在5秒末之角度度如何？

284. 烏尔苏斯拖拉机之飛輪以等角加速度从靜止狀态开始轉动，10分鐘后，飛輪具有120轉/分鐘的角速度。問在这10分鐘飛輪轉过多少轉？

285. 繞定軸轉动的輪子以初角速度为2π1/秒轉动，由于軸承中的摩擦，輪子轉了10轉后即行停止，求角加速度ε（假定其为常数）。

286. 在拖拉机發动机停車时，其內風扇以相当于$n=1200$轉/分鐘的角速度轉动。轉过80轉而停止。如風扇轉动可視为等減速者，問从發动机停車作停止轉动共經过多少时間？

287. 發动机的轉速$n=1200$轉/分，由于負荷的增加，在1.5分鐘降低到800轉/分。試計算其角加速度（假設为常数）及在所述时間間隔內發动机所作的轉数。

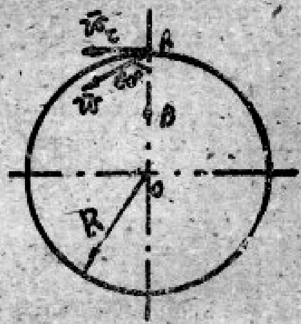
288. 一通風器每分鐘轉数4200轉，如通風器圓周速度限定不能超过88尺秒，問其直徑能有多大？

題 289 圖

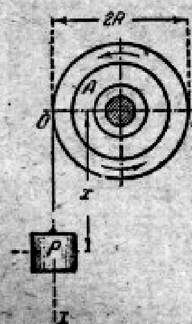
289. 皮帶輪边緣上一點A以50公分/秒的速度运动，而和A點在同一半徑上之某點B以10公分/秒的速度运动，距离AB=20公分，求知帶輪的速度ω及其直徑。

290. 飛輪半徑$R=2$公尺，以等加速由靜止狀态开始轉动，經过10秒后在輪緣上之點获得綫速度$v=100$公尺/秒，求$t=15$秒时，飛輪边緣上一點的速度，切向与法向加速度。

291. 飛輪边緣上之點的全加速度与半徑成傾斜角60°，在該瞬时點的切向加速度为$w_t=10\sqrt{3}$公尺/秒²．求离轉动軸距离$r=0.5$公尺处之點的法向加速度。飛輪半徑$R=1$公尺。



題 291 圖



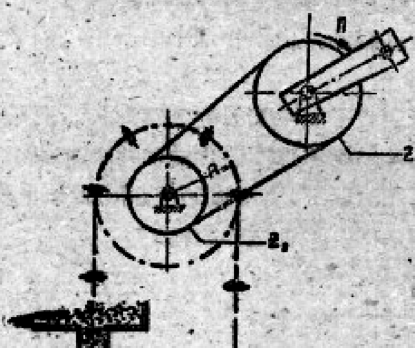
題 292 圖

292. 半徑为$R=10$公分的軸A由用綫掛在其上的重錘帶动而轉动。重錘的运动由方程式$X=100t^2$表示，其中X为重錘到水平固定軸的距离OO_1，以公分計，t以秒計算。求該軸的角速度ω与角加速度ε，幷求在瞬时t；該軸表面上一點的全加速度。

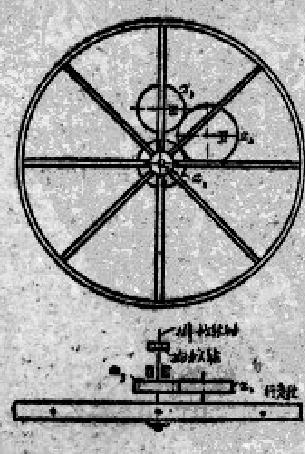
293. 礦山升降机，从靜止狀态开始以等加速度2米/秒²上升。問运动开始后4秒起重裝置上的鼓輪之相应轉速为每分鐘多少轉？又鼓輪边上的一點的加速度等于多少？鼓輪的直徑$d=5$米。

284. 圖示为河南省修武縣怀凤乡星火農業社用解放式水車改裝的手搖水車。若已知$Z_1=12$，$Z_2=8$，$R=0.5$公尺，$d=7.5$公分，（圓形管）$n=50$轉/分鐘。求每小时出水多少噸？（水的重度为1噸/米³）。

295. 在測定播种机之播种量时，需考慮行走輪軸Ⅰ到內槽种輪軸之傳动比，現已知六行播种机之傳动如圖，系由行走輪帶动Ⅰ軸和其上有Z_1齒的齒輪傳动，Z_1再与軸Ⅱ上具有Z_2齒



題 294 圖

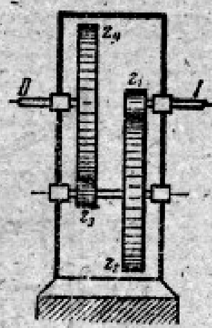


題 295 圖

的齒輪嚙合，Z_2又与軸Ⅲ上具有Z_3齒的齒輪嚙合，以使軸Ⅲ上之構种轉动。

問：（1）已知Z_1，Z_2，Z_3，求Ⅰ到Ⅲ軸之傳动比i_{1-3}。

（2）如Z_2为已知，要使$i_{1-3}=1$，則Z_1和Z_3应等于什么？



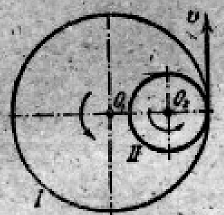
題 296 圖

296. 时鐘內由秒針A到分針的齒輪傳动机構是由四个齒輪所組成，其齒数各为：

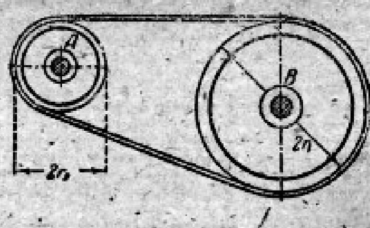
$Z_1=8$，$Z_2=60$，$Z_4=64$，求齒輪Ⅲ的齒数。

297. 直徑$D_1=360$公厘的齒輪Ⅰ作$n_1=100$轉/分鐘的轉动，問与齒輪Ⅰ相內嚙合而每分鐘作300之齒輪Ⅱ的直徑該有多大？

298. 蒸汽机皮帶輪B上的皮帶帶动發电机上之皮帶輪A轉动，兩皮帶輪的半徑分別为：$r_1=75$公分，$r_2=30$公分。蒸汽机开动后，其角加速度为$0.4\pi 1/秒^2$，如不計皮帶輪与皮帶間之滑动，問經多少秒后發电机作300轉/的轉动？

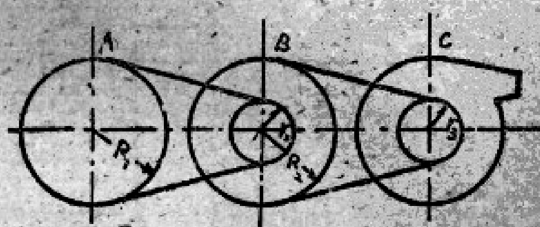


題 279 圖



題 298 圖

299. 手搖鼓風机的傳动簡圖如圖示，A、B为相同的一对塔輪，如$R_1=R_2=80$公分，$r_2=10$公分，$r_3=5$公分，如使鼓風机C获得每分鐘1408轉的轉速，問塔輪A应有多大轉数。

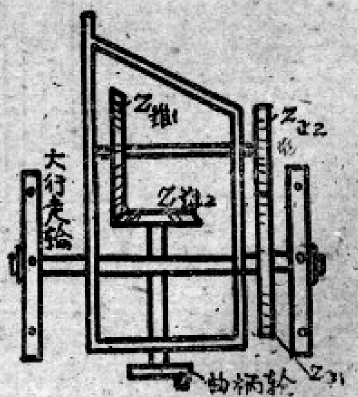


題 299 圖

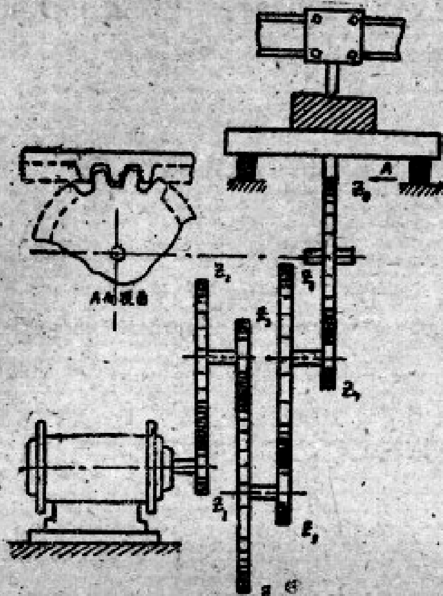
300. 圖示为用収鋒犁改装小麥收刈机，在切刈时設机架前進速度为1公尺/秒，設行走輪的直徑是0.5公尺。求帶动刈刀的曲柄輪的轉数（齒数分別为：z正$_1$=60，z正$_2$=13，z錐$_1$=39，z錐$_2$=12）

提示：行走輪的角速度 $\omega=\frac{1}{0.25}=4 1/秒$

301. 已知龍門鉋床切削速度$v=10$尺分/公，傳动齒輪的齒数为：$z_1=15$，$z_2=47$，$z_3=22$，$z_4=58$，$z_5=18$，$z_6=58$，$z_7=14$，$z_8=46$，齒輪8的直徑$D_8=50$公分。試求电动机轉速。

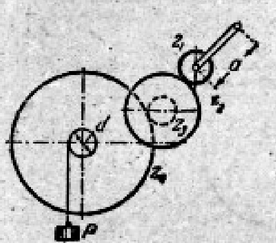


題 300 圖

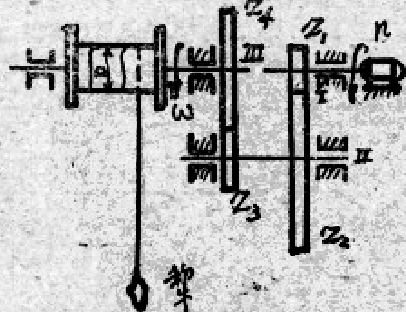


題 301 圖

302. 如圖示的絞車机構中，把柄a長为400公厘，当其轉动时，重物p作鉛垂方向之移动。由于制动机構故障的緣故，重物突然地开始下降，重物的运动方程式为：$X=5t^2$公分（t以秒計），OX軸沿繩索而向下，鼓輪直徑d＝200公厘。絞車机構的齒輪为：$Z_1=13$，$Z_2=39$，$Z_3=11$，$Z_4=77$。求把柄在开始运动后經过兩秒鐘其頂端的速度与加速度。

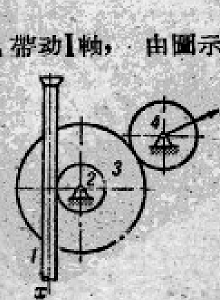


題 302 圖



題 303 圖

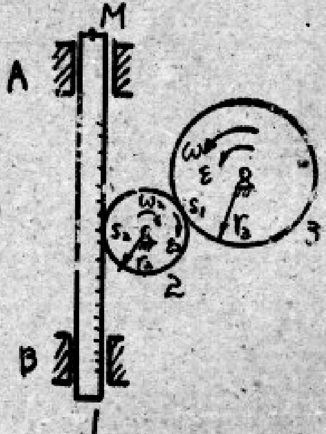
303. 黑龍江造双馬达电力繩索牽引机，用n＝1500轉/分鐘电机帶动Ⅰ軸，由圖示之$Z_1=20$，$Z_2=120$，$Z_3=16$，$Z_4=96$之齒輪傳动，帶动Ⅲ軸轉动，而使鋼絲繩繞在D＝240公厘之圓筒　。求圓筒輪緣上一點之速度与加速度，并求鋼絲繩牽引的犁的速度与加速度。



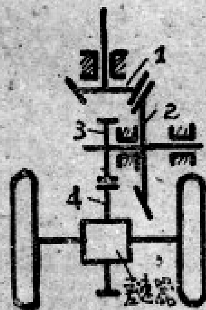
題 304 圖

304. 如圖所示之指針指示器机構中，齒条1帶动齒輪2，在齒輪2主軸上裝一与齒輪4相嚙合的齒輪3，齒輪4帶有一指針。如已知齒条的运动方程式为X＝asinkt，且各齒輪的半徑分为r_2、r_3与r_4。求指針的角速度。

305. 齒輪3与齒輪2相嚙合，而齒輪2則帶动一約束于軸承A，B上运动的齒条1。求当齒輪3之角速度$\omega=2\pi\, 1/秒$，角加速度$\varepsilon=\frac{\pi}{2}\, 1/秒^2$时，齒条上端點M之速度、加速度之大小与方向。已知齒輪2、3之半徑分别为$r_2=4$公分，$r_3=6$公分。



題 305 圖



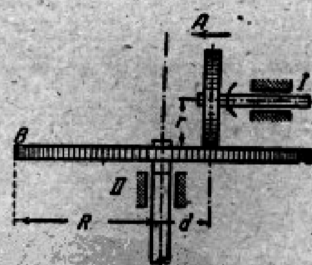
題 306 圖

306. 某一汽車后桥之主傳动器系双級減速式如圖所示，各齒輪之齒数为：$Z_1=11$，$Z_2=25$，$Z_3=16$，$Z_4=50$，求其傳动比。

307. 摩擦傳动的主軸I作600轉/分鐘的轉动，其接触點按箭头所示之方向而作移动，其距离按規律$d=(10-0.5t)$公分（t以秒計）而变化。

求：1) 以距离d的函数表示軸II的角加速度。

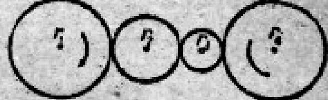
2) 当$d=r$时，輪B边緣上一點的全加速度。已知摩擦輪的半徑为：$r=5$公分，$R=15$公分。

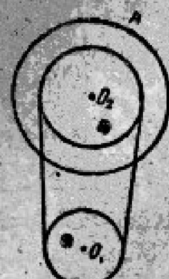


題 307 圖

308. 半徑为r_1、r_2，r_3，r_4的四齒輪，其接触情况如圖所示。求此輪系之角速比$K=\frac{\omega_4}{\omega_1}$（輪系値）。

309. 滑輪O_1之半徑为r_1，并已知其运动規律为$\varphi=10t^2$，今以首尾相接的皮帶使它和半徑$r_2=\frac{3}{2}r_1$的滑輪O_2連接起來。求当$t=10$秒时，O与O_2輪固結的半徑$r_A=2r_1$的輪A边緣上一點M的速度和加速度。


題 308 圖



題 309 圖

第十一章　点的复合運动

有些點的运动要直接求出其絕对运动是困难的，或者求某點相对于另一运动物体的运动也是困难的，这时我們可利用运动分解的办法來处理。

§1. 运动分解:

如一动點相对一动座标系（代表某一物体）而运动，此动座标系本身又在运动，我們称此动點做复雜运动。在此情况下，动點对于动座标系的运动称为相对运动，动點随同动座标系的运动称为牽連运动，而动點相对于定座标系的运动則称为絕对运动。

§2. 相对运动方程式和軌跡:

由于动點做相对运动，所以它在动系中的座标位置都是时間的函数：$x'=f_1(t)$，$y'=f_2(t)$，$z'=f_3(t)$。这就是點的相对运动方程。

从这些方程中消去时間 t，即得相对軌跡方程式:

$$\varphi_1(x', y')=0 \qquad \varphi_2(y', z')=0$$

整个相对軌跡随同动座标系一起运动着。

§3. 速速的合成:

既然运动区分为相对、牽連和絕对运动，則速度也应区分为相对、牽連和絕对速度。动點对于动座标系的速度（我們站在动座标系上所看到的）称为相对速度，用v_r表示。在某瞬时动座标系上与动點相重合的一點（可理解动點这时固結在动座标系上）的絕对速度，称为點的牽連速度，用v_e表示。动點对定座标系的速度称为絕对速度，用v_a表示。根据速度合成定理，它們有下列关系:

$$\overline{v}_a=\overline{v}_e+\overline{v}_r$$

有时已知絕对速度和牽連速度，要求相对速度，就用下列公式:

$$\overline{v}_r=\overline{v}_a-\overline{v}_e=\overline{v}_a+(-\overline{v}_e)$$

§4. 加速度的合成

求复合运动加速度的合成，有下列兩种情况：1.牽連运动为移动时；2.牽連运动为轉动时。

在第一种情况，絕对加速度为:

$$\overline{w}_a=\overline{w}_r+\overline{w}_e$$

在第二种情况，絕对加速度为：　$\overline{w}_a=\overline{w}_r+\overline{w}_e+\overline{w}_K$

其中$\overline{w}_K$为科氏（或附加）加速度，其大小和方向由下列矢量式确定:

$$\overline{w}_K=2\overline{\omega}\times\overline{v}_r$$

其中$\overline{\omega}$为牽連轉动之角速度矢量。