高等数学习题选解

韩婵 张彦 主编

西北大学出版社

高等数学习题选解

（理工类）

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题选解:理工类/韩婵,张彦主编. —西安:西北大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5604-2161-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①韩… ②张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 080168 号

高等数学习题选解 理工类

主　　编:韩　婵　张　彦
出版发行:西北大学出版社
地　　址:西安市太白北路 229 号
邮　　编:710069
电　　话:029-88302825
印　　装:陕西向阳印务有限公司
开　　本:787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张:6.75
字　　数:200 千字
版　　次:2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5604-2161-2
定　　价:14.00 元

目录

CONTENTS

第 1 章　函数、极限与连续 ……………………… /1
习题 1－1 ……………………………………… /1
习题 1－2 ……………………………………… /2
习题 1－3 ……………………………………… /3
习题 1－4 ……………………………………… /5
习题 1－5 ……………………………………… /6
自测题(一) ……………………………………… /7
综合题(一) ……………………………………… /8
第 2 章　导数与微分 ……………………… /12
习题 2－1 ……………………………………… /12
习题 2－2 ……………………………………… /13
习题 2－3 ……………………………………… /14
习题 2－4 ……………………………………… /15
习题 2－5 ……………………………………… /17
自测题(二) ……………………………………… /18
综合题(二) ……………………………………… /20
第 3 章　微分中值定理与导数的应用 ………… /23
习题 3－1 ……………………………………… /23
习题 3－2 ……………………………………… /24
习题 3－3 ……………………………………… /25
习题 3－4 ……………………………………… /26
习题 3－5 ……………………………………… /28
习题 3－6 ……………………………………… /29
自测题(三) ……………………………………… /29
综合题(三) ……………………………………… /30
第 4 章　不定积分 ……………………… /32
习题 4－1 ……………………………………… /32
习题 4－2 ……………………………………… /32
习题 4－3 ……………………………………… /33
习题 4－4 ……………………………………… /34
习题 4－5 ……………………………………… /35
自测题(四) ……………………………………… /37
综合题(四) ……………………………………… /38
第 5 章　定积分 ……………………… /40
习题 5－1 ……………………………………… /40
习题 5－2 ……………………………………… /40
习题 5－3 ……………………………………… /41
习题 5－4 ……………………………………… /42
习题 5－5 ……………………………………… /43
习题 5－6 ……………………………………… /44
自测题(五) ……………………………………… /44
综合题(五) ……………………………………… /45
第 6 章　向量代数与空间解析几何 ………… /48
习题 6－1 ……………………………………… /48
习题 6－2 ……………………………………… /48
习题 6－3 ……………………………………… /49
习题 6－4 ……………………………………… /51
习题 6－5 ……………………………………… /51
自测题(六) ……………………………………… /52
综合题(六) ……………………………………… /53
第 7 章　多元函数的微分法及其应用 ………… /55
习题 7－1 ……………………………………… /55
习题 7－2 ……………………………………… /56
习题 7－3 ……………………………………… /56
习题 7－4 ……………………………………… /57
习题 7－5 ……………………………………… /59
习题 7－6 ……………………………………… /60
习题 7－7 ……………………………………… /61
自测题(七) ……………………………………… /63

综合题(七) ………………………………… /64

第 8 章　重积分 ………………………………… /67

习题 8 - 1 ………………………………… /67

习题 8 - 2 ………………………………… /67

习题 8 - 3 ………………………………… /71

习题 8 - 4 ………………………………… /72

自测题(八) ………………………………… /75

综合题(八) ………………………………… /76

第 9 章　曲线积分与曲面积分 ………………………………… /78

习题 9 - 1 ………………………………… /78

习题 9 - 2 ………………………………… /78

习题 9 - 3 ………………………………… /79

习题 9 - 4 ………………………………… /81

习题 9 - 5 ………………………………… /82

习题 9 - 6 ………………………………… /83

自测题(九) ………………………………… /85

综合题(九) ………………………………… /86

第 10 章　微分方程 ………………………………… /88

习题 10 - 1 ………………………………… /88

习题 10 - 2 ………………………………… /88

习题 10 - 3 ………………………………… /91

习题 10 - 4 ………………………………… /91

自测题(十) ………………………………… /93

综合题(十) ………………………………… /94

第 11 章　无穷级数 ………………………………… /96

习题 11 - 1 ………………………………… /96

习题 11 - 2 ………………………………… /97

习题 11 - 3 ………………………………… /98

习题 11 - 4 ………………………………… /99

习题 11 - 5 ………………………………… /100

自测题(十一) ………………………………… /102

综合题(十一) ………………………………… /102

第 1 章　函数、极限与连续

习题 1－1

2. 解不等式，并将不等式的解集用区间表示：(3) $2<|3-2x|\leqslant 3$.

解　(3) 由 $2<|3-2x|\leqslant 3$，知 $\begin{cases}-3\leqslant 3-2x\leqslant 3\\ 3-2x>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-3\leqslant 3-2x\leqslant 3\\ 3-2x<-2\end{cases}$，

即 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ x>\dfrac{5}{2}\end{cases}$，用区间表示为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},3\right]$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$，$f(x+1)$.

解　$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$，$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\dfrac{-x}{x+2}$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$g(x)=x+2$；　　(4) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x^2+1}$，$g(x)=\ln(x+1)-\ln(x^2+1)$.

解　(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 2\}$，$g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，所以两者不同.

(4) 因为两者的定义域均为 $\{x\mid x>-1\}$，且 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x^2+1}=\ln(x+1)-\ln(x^2+1)=g(x)$，所以两者相同.

5. 求下列函数的定义域.

(3) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$；　(4) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+6}$；　(5) $y=\sqrt{\lg x-2}$；　(7) $y=\lg[\lg(x-1)]$.

解　(3) 因为 $\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ 2-x\geqslant 0\end{cases}$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x=2\}$.

(4) 因为 $\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}>0\\ x+6\geqslant 0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x<1\\ x\geqslant -6\end{cases}$，所以定义域为 $[-6,1)$.

(5) 因为 $\begin{cases}\lg x-2\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x\geqslant 100\\ x>0\end{cases}$，所以定义域为 $[100,+\infty)$.

(7) 因为 $\begin{cases}x-1>0\\ \lg(x-1)>0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x>1\\ x>2\end{cases}$，所以定义域为 $(2,+\infty)$.

9. 下列函数哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(3) $y=\sin(\sin x)$；　(6) $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$；　(8) $y=\sin x-\cos x+1$；　(10) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(3) 因为定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sin\sin(-x)=\sin(-\sin x)=-\sin(\sin x)=-f(x)$，所以函数为奇函数.

(6) 因为定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=(-x)\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$，所以函数为偶函数.

(8) 因为定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq -f(x)$ 且 $\neq f(x)$，所以函数为非奇非偶函数.

(10) 因为定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$$，所以函数为奇函数.

10. 假设下面所考虑的函数是定义在$(-a,+a)$内的，证明：(2) 两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数，偶函数与奇函数的积是奇函数.

证 (2)① 设$f(x),g(x)$是偶函数，则$f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$，所以$f(x)g(x)$是偶函数.

② 设$f(x),g(x)$是奇函数，则$f(-x)g(-x)=[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)g(x)$，所以$f(x)g(x)$是偶函数.

③ 设$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，则$f(-x)g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)$，所以$f(x)g(x)$是奇函数.

12. 证明函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证 在$(-\infty,+\infty)$内，$1+x^2\geqslant 2x$，即$\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

13. 验证下列函数在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的：(2)$y=\lg x+x$.

证 设$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，$f(x)=\lg x+x$，则$\dfrac{x_1}{x_2}<1$，$\lg\dfrac{x_1}{x_2}<0$，$x_1-x_2<0$，且

$f(x_1)-f(x_2)=\lg x_1+x_1-(\lg x_2+x_2)=\lg\dfrac{x_1}{x_2}+(x_1-x_2)<0$，所以$f(x_1)<f(x_2)$，

即函数在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

提示 用定义证明单调性.

14. 求下列函数的反函数(不用求反函数的定义域).

(3)$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$；　(4)$y=1+\lg(x+2)$.

解 (3) 由$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$，知$\dfrac{y-1}{2}=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$，$\dfrac{x-1}{x+1}=\arcsin\dfrac{y-1}{2}$，$x-1=(x+1)\arcsin\dfrac{y-1}{2}$，

$x\arcsin\dfrac{y-1}{2}-x=-\arcsin\dfrac{y-1}{2}-1$，$x=\dfrac{\arcsin\dfrac{y-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$，所以反函数为$y=\dfrac{\arcsin\dfrac{x-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$.

(4) 由$y=1+\lg(x+2)$，知$y-1=\lg(x+2)$，$10^{y-1}=x+2$，$x=10^{y-1}-2$，所以反函数为$y=10^{x-1}-2$.

小结 由已知解出x，即用y表示x，最后将y变为x，x变为y即可.

15. 对于下列函数$f(x)$与$g(x)$，求复合函数$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(2)$f(x)=\sqrt{x-1}$，$g(x)=x^4$；　(3)$f(x)=2^x$，$g(x)=\sin(x+1)$.

解 (2)$f[g(x)]=\sqrt{x^4-1}$，定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；$g[f(x)]=(x-1)^2$，定义域为$[1,+\infty)$.

(3)$f[g(x)]=2^{\sin(x+1)}$，定义域为$\mathbf{R}$；$g[f(x)]=\sin(2^x+1)$，定义域为$\mathbf{R}$.

20. 以下各对函数$y=f(u)$与$u=g(x)$中，哪些可以复合成复合函数$f[g(x)]$？哪些不能复合？为什么？

(2)$y=\arccos u$，$u=\dfrac{x}{1+x^2}$；　(4)$y=\ln(1-u)$，$u=\sin x$.

解 (2) 因为$y=\arccos u$要求$|u|\leqslant 1$，又因为$|u|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}<1$，

所以$f[g(x)]$能复合.

(4) 因为$y=\ln(1-u)$要求$u<1$，又因为$-1\leqslant u=\sin x\leqslant 1$，所以$-1\leqslant u<1$，所以$f[g(x)]$能复合.

习题 1-2

1. 观察数列的变化趋势，判断下列数列哪些有极限？若有极限，求出其极限值.

(3)$x_n=\dfrac{(-1)^n n}{n^3+1}$；　(5)$x_n=\dfrac{n-3}{n+1}$；　(6)$x_n=n(-1)^n$.

解　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\dfrac{1}{n}}=0.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$

(6) 因为 $|x_n|=n$ 无界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 无极限.

2. 根据数列极限的 ε-N 定义证明：(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}.$

证　(2) 对于任意 $\varepsilon>0$，因为 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{4n+2}$，要使 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{4n+2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$. 若取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，所以由极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}.$

4. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-5}-\sqrt{n})$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+5}$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5}-n)$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right].$

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n-5}-\sqrt{n})(\sqrt{n-5}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n}}=0.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{1}{2}.$

(5) 提示：做法同(1)，采用分子有理化.

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{n+1}\right]=1.$

习题 1－3

3. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$，问 X 应为何值，才能使 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$?

解　由于 $|y-1|=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\left|\dfrac{-4}{x^2+3}\right|=\left|\dfrac{4}{x^2+3}\right|$，

要使 $|y-1|<0.01$，即 $\left|\dfrac{4}{x^2+3}\right|<0.01$，$x^2+3>\dfrac{4}{0.01}=400$，$x>\sqrt{397}$，

令 $X>\sqrt{397}$，可使 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$，并说明 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 的存在性.

解　提示：先计算 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，否则不存在.

9. 计算下列函数的极限

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；　(6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$；　(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$；　(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x}{(x-1)^2}$；

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-1}-3x)$；　(18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^{10}(2x-3)^{10}}{(3x-5)^{20}}.$

解　(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=\dfrac{0}{2}=0.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$.

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-3}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3}=\dfrac{0+0-3}{0+0+3}=-1$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1+x+x^2)(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=-1$.

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-x-(1+x)}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-2x}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=\dfrac{-2}{(1+1)(\sqrt{3-1}+\sqrt{1+1})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(12) 原式 $=\infty$(因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x^3+2x}=0$).

(17) 提示:乘以 $\sqrt{9x^2-1}+3x$,再除以 $\sqrt{9x^2-1}+3x$.

(18) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2-5x+3)^{10}}{(3x-5)^{20}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}}{\left(3-\dfrac{5}{x}\right)^{20}}=\dfrac{2^{10}}{3^{20}}$.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+6}{x-1}=-5$,求 a 的值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,又因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+6}{x-1}=-5$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-ax+6)=0$,即 $1-a+6=0$,所以 $a=7$.

11. 根据两个重要极限计算下列函数的极限.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; (6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; (9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sin 2(x-1)}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; (12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$; (16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x^2}$; (19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$; (20) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

解 (2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x\cos 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{1}{\cos 4x}\right)=4$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\cdot\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{2\cdot\dfrac{x-a}{2}}=\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}=\cos a$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot 2(x-1)}{\sin 2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}}=\dfrac{1}{2}$.

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1$.

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{x}\right)^{\frac{x}{-1}}\right]^{-1}=e^{-1}$.

(14) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5=e\cdot 1=e$.

(16) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1-1}{-1}}\right]^{-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{1+x}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{-1}\left(1+\dfrac{-1}{1+x}\right)=e^{-1}.$

(18) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-1}}\right]^2=\left(\dfrac{e}{e^{-1}}\right)^2=e^4.$

(19) 令 $\cos x=t,\sec x=\dfrac{1}{t}$,故原式 $=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot3}=e^3.$

(20) 令 $3\tan^2x=t,\tan^2x=\dfrac{t}{3}$,所以 $\cot^2x=\dfrac{3}{t}$,故原式 $=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=e^3.$

提示　利用两个重要极限求极限是一种常用方法,这两个重要极限主要解决含有三角函数的$\dfrac{0}{0}$型及幂指函数的 1^∞ 型极限.用两个重要极限求极限时,往往用三角公式或代数公式进行恒等变形或作变量代换,使之成为重要极限的标准形式.

习题 1-4

3.下列变量中哪些是无穷小量?哪些是无穷大量?

(2) $\dfrac{200}{\sqrt{x}}(x\to0+)$;　(4) $e^{\frac{1}{x}}-1(x\to+\infty)$;　(5) $(-1)^n\dfrac{n^2}{n+3}(n\to\infty)$;　(8) $2^x-1(x\to0)$.

解　(2) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{200}{\sqrt{x}}=200\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\infty$, 故$\dfrac{200}{\sqrt{x}}$是无穷大量.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to+\infty}1=1-1=0$, 故 $e^{\frac{1}{x}}-1$ 是无穷小量.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{1+\dfrac{3}{n}}=\infty$, 故 $(-1)^n\dfrac{n^2}{n+3}$ 是无穷大量.

(8) $\lim\limits_{x\to0}(2^x-1)=\lim\limits_{x\to0}2^x-\lim\limits_{x\to0}1=1-1=0$,故 2^x-1 是无穷小量.

5.当 $x\to1$ 时,无穷小$\dfrac{1-x}{1+x}$与 $1-\sqrt{x}$ 相比哪个是更高阶的.

解　因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$,所以$\dfrac{1-x}{1+x}$与 $1-\sqrt{x}$ 在 $x\to1$ 时是等价无穷小量.

6.当 $x\to1$ 时,无穷小 $1-x$ 和(1) $1-\sqrt[3]{x}$;(2) $2(1-\sqrt{x})$ 是否同阶?是否等价?

解　(1) 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3$,

所以,当 $x\to1$ 时,$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小,但不等价.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}=1$,

所以,当 $x\to1$ 时,$2(1-\sqrt{x})$ 与 $1-x$ 是等价的.

7.利用等价无穷小的性质,求下列函数的极限.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$;　(5) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}(\alpha\neq0)$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$;　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$;　(9) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\cot^2x$;　(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 (3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x\cdot\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\dfrac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{e}-1+1\right)}{e\left(\dfrac{x}{e}-1\right)}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\dfrac{x}{e}-1}{e\left(\dfrac{x}{e}-1\right)}=\dfrac{1}{e}.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha.$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1-(e^{\beta x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\beta x}-1}{x}=\alpha-\beta.$

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin^2 x+e^x}{e^x}}{\ln\dfrac{x^2+e^{2x}}{e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sin^2 x}{e^x}+1\right)}{\ln\left(\dfrac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{e^x}}{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^x}\right)=1.$$

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x^2\ \dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}.$

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x^2)}{x^2\cdot\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^4}{x^2\cdot x^2}=1.$

习题 1－5

3. 求 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因为初等函数在其定义域内均连续，由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$，即 $x\neq 1$ 或 2 时连续，所以连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$. 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=f(0)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4. 求下列函数的间断点，并说明该间断点的类型. 如果是可去间断点，则补充或改变函数定义使之连续.

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　　(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1\\ 3-x, & x>1\end{cases}$；　　(6) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>1\\ 0, & x=1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\end{cases}$.

解 (2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，可补充 $f(0)=1$ 即可.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，可补充定义 $f(1)=-2$，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，$x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(3-x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x-1)=0$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x-1)=1$，$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$，但 $f(1)=0$，

所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 改令 $f(1)=1$，则 $f(x)$ 连续.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ k, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x<0\end{cases}$，问 k 为何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？为什么？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}+1)=0+1=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1$，令 $f(0)=k=1$，则 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上连续.

6. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x}+1}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\ln(3\sin 2x)$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{x}{\sin x}$.

解　(1) 原式 $=\dfrac{e^6+1}{3}$.

(3) 原式 $=\ln\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(3\sin 2x)\right]=\ln\left[3\sin\dfrac{\pi}{4}\right]=\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{(-2\cos x)}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{-2\cos\dfrac{\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) 原式 $=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)=\ln 1=0$.

8. 证明：方程 $\ln x=x-e$ 在 $(1,e^2)$ 内必有实根.

证　设 $f(x)=\ln x-x+e$，则初等函数 $f(x)$ 在 $(1,e^2)$ 内连续.

因为 $f(1)=\ln 1-1+e=e-1>0$，$f(e^2)=\ln e^2-e^2+e=2-e^2+e<0$，

所以由零点定理可知，在 $(1,e^2)$ 内至少有一个 ξ，使 $f(\xi)=0$.

即 $\ln\xi-\xi+e=0$，故方程 $\ln x=x-e$ 在 $(1,e^2)$ 内必有实根.

9. 证明：方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的实根.

证　设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 内连续.

因为 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$.

(1) 当 $f(a+b)=0$ 时，$a+b$ 是原方程的正根，所以至少有一个不超过 $a+b$ 的实根.

(2) 当 $f(a+b)>0$ 时，由于 $f(0)$ 与 $f(a+b)$ 异号，故 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，

即 $\xi=a\sin\xi+b$，即 ξ 是方程 $x=a\sin x+b$ 的根，所以无论如何至少有一个不超过 $a+b$ 的实根.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$f(0)=f(a)=0$，当 $0<x<a$ 时，$f(x)>0$，L 为 $(0,a)$ 内任一点，证明至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+L)$.

证　设 $F(x)=f(x)-f(x+L)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a-L]$ 上连续. 且

$F(0)=f(0)-f(L)=-f(L)<0$　　$F(a-L)=f(a-L)-f(a)=f(a-L)>0$

由零点定理可知，$F(x)$ 在 $(0,a-L)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+L)$.

自测题(一)

4. 已知 $f(x)=\sqrt[x]{1-2x}$，试计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=e^{-2}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

提示　乘以 $(\sqrt{x^2+1}+x)$，再除以 $(\sqrt{x^2+1}+x)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0 \\ \ln(x+1), & -1<x<0 \end{cases}$,求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点的类型.

解 由题意可知,$x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点,$x=1$ 处无定义,故 $x=0,x=1$ 为 $f(x)$ 的可疑间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\ln(x+1)=0$,$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$,故 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0+}f(x)$,所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点.因为 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$,所以 $x=1$ 为第二类间断点.

9. 设 $f(x)$ 对任意 x_1,x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,证明函数 $f(x)$ 在任意 x_0 点连续.

证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f[(x-x_0)+x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)+\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)$,令 $t=x-x_0$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)=\lim\limits_{t\to0}f(t)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(0)+f(x_0)=f(0+x_0)=f(x_0)$,

所以 $f(x)$ 在任意点 x_0 连续.

10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$,证明:在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证 设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$,则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

因为 $F(0)=f(0)-f(a)$,$F(a)=f(a)-f(0)$,

(1) 若 $f(0)-f(a)=0$,则 $f(0)=f(a)=f(2a)$,所以当 $\xi=a$ 时,$f(\xi)=f(\xi+a)$.

(2) 若 $f(0)-f(a)\neq0$,则 $F(0)\cdot F(a)<0$,由零点定理可知,至少存在一点 $\xi\in(0,a)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综上,在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

11. 设 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

解 因为 $S_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{1}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)=1$.

综合题(一)

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant2\\2, & |x|>2\end{cases}$,求 $f[g(x)]$,$g[g(x)]$.

解 先求 $f[g(x)]$.当 $|x|\leqslant2$ 时,$g(x)=2-x^2$,此时 $-2\leqslant2-x^2\leqslant2$.结合 $f(x)$ 的定义分两种情况讨论:

当 $|2-x^2|\leqslant1$ 时,即 $-1\leqslant2-x^2\leqslant1$,亦即 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$,故 $f[g(x)]=1$;

当 $|2-x^2|>1$ 时,即 $2-x^2>1$ 或 $2-x^2<-1$,亦即 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$,故 $f[g(x)]=0$;当 $|x|>2$ 时,$g(x)=2$,此时 $|2|>1$,故 $f[g(x)]=f(2)=0$.

综上所述,有 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant\sqrt{3}\end{cases}$.

同理,对于 $g[g(x)]$,当 $|x|\leqslant2$ 时,$g(x)=2-x^2$,所以 $|2-x^2|\leqslant2$,

故 $g[g(x)]=g(2-x^2)=2-(2-x^2)^2$.

当 $|x|>2$ 时,$g(x)=2$,此时 $|2|=2$,故 $g[g(x)]=g(2)=2-2^2=-2$.

所以 $g[g(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\leqslant2\\-2, & |x|>2\end{cases}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,$x_1>0,x_2>0$,证明若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为单调减少函数,则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

解 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为单调减少函数,$x_1>0,x_2>0$,则有 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}\geqslant\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$,即

$$f(x_1)\geqslant\frac{[f(x_1)+f(x_2)]\cdot x_1}{x_1+x_2}. \qquad ①$$

同理，$\frac{f(x_2)}{x_2} \geqslant \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，即 $f(x_2) \geqslant \frac{[f(x_1)+f(x_2)]\cdot x_2}{x_1+x_2}$　②

由 ① + ②，可得 $f(x_1)+f(x_2) \geqslant f(x_1+x_2)$，即 $f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

6. 设 $\varphi(x) = \sqrt[n]{1-x^n}\,(x>0)$，试证明 $\varphi[\varphi(x)] = x$，并求 $\varphi(x)$ 的反函数.

解　因为 $\varphi(x) = \sqrt[n]{1-x^n}$，所以 $\varphi[\varphi(x)] = \sqrt[n]{1-[\varphi(x)]^n} = \sqrt[n]{1-[\sqrt[n]{1-x^n}]^n} = \sqrt[n]{1-(1-x^n)} = x$.

由题设可知 $x^n = 1-[\varphi(x)]^n$，即 $x = \sqrt[n]{1-[\varphi(x)]^n}$，所以 $\varphi(x)$ 的反函数仍为 $\varphi(x)$.

7. 设 $f(x), g(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试分析 $f[f(x)], g[f(x)], f[g(x)], g[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇偶性.

解　当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，由题意知 $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$.

(1) $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$，所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

提示　(2)(3)(4) 做法相同，用奇、偶函数的定义求解.

10. 设 $x_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{n}}}}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

证　因为 $x_n = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdots 2^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}} = 2^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

15. 设 $\lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = 4$，求 a, b 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3} = 0$，但 $\lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = 4$，

所以 $\lim\limits_{x\to1}(a+b)x+b = 0$，即 $a+2b = 0$.　①

因为 $4 = \lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{2x-2}\cdot \lim\limits_{x\to1}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})$

$= \lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{2x-2}\cdot 4$，

所以 $\lim\limits_{x\to1} \frac{(a+b)x+b}{2x-2} = 1$.　②

由 ① 可知 $a = -2b$，代入 ② 式，有 $\lim\limits_{x\to1} \frac{(-2b+b)x+b}{2x-2} = \lim\limits_{x\to1} \frac{-bx+b}{2x-2} = 1$，所以 $b = -2, a = 4$.

16. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4f(x)+5$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4f(x)+5$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-4)f(x) = 5$，

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{3x-4} = 0$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \frac{4}{3}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

17. 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}\,(a>0)$.

解　设 $t = a^x-1$，则 $x = \log_a(1+t)$，当 $x\to0$ 时，$t\to0$，从而有

$\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ (a, b, c 为正的常数).

解　令 $u = \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\ln u = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\ln \frac{a^x+b^x+c^x}{3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3}\right]$.

由 $\ln(1+x) \sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\ln u = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\,\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3}$. 由 17 题可知，

$\lim\limits_{x\to0}\ln u = \frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c) = \ln(abc)^{\frac{1}{3}}$，从而可得 $\lim\limits_{x\to0} u = e^{\lim\limits_{x\to0}\ln u} = e^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}} = (abc)^{\frac{1}{3}}$.

20. 已知当 $x\to 0$ 时,无穷小$\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}$与 $b-\cos x$ 是等价无穷小,求 a,b 的值.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,所以 $b=1$.

因为 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$,所以 $a=4$.

21. 已知当 $x\to 1+0$ 时,$\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x$ 与$(x-1)^n$ 是同阶无穷小,求 n 的值.

解 因为 $1=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}\ln x}{(x-1)^n}\xlongequal[x-1=t]{\text{令 } x=1+t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{3t^2+4t}\cdot t}{t^n}=\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{\dfrac{3t^2+4t}{t^{2(n-1)}}}$,

所以 $2(n-1)=1$,故 $n=\dfrac{3}{2}$.

22. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{\sin 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos 3x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$(等价无穷小替换).

(2) 提示:利用等价无穷小,$e^u-1\sim u$,$1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$ 求解.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1-\sin^2 ax}}{\ln\sqrt{1-\sin^2 bx}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2 ax)}{\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2 bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 ax}{-\sin^2 bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(ax)^2}{(bx)^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

(4) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\ln e}=e$.

23. 设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

24. 指出 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$($n$ 为正整数,$-\infty<x<+\infty$)的间断点,判断间断点的类型,并写出 $f(x)$ 的连续区间.

解 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\begin{cases}1, & |x|>1\\ \dfrac{1}{x}, & |x|<1\\ 2, & x=1\\ 0, & x=-1\end{cases}$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

所以 $x=0$ 是无穷间断点.

因为 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}1=1$,$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x}=1$,故 $f(1+0)=f(1-0)\neq f(1)=2$,

所以 $x=1$ 是可去间断点.

因为 $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1-0}1=1$,$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x}=-1$,故 $f(-1-0)\neq f(-1+0)$,

所以 $x=-1$ 是跳跃间断点.

所以 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

25. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{tx}-1}{e^{tx}+1}$,求 $f(x)$ 的表达式,并求其间断点.

解 因为 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{tx}-1}{e^{tx}+1}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$

所以 $f(0-0)=-1$,$f(0+0)=1$,所以 $f(0-0)\neq f(0+0)$,所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

27. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=f(1)$,证明:一定存在 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+\dfrac{1}{2})$.

解 令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$,则 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 上连续.

由 $F(0)=f(0)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)=-\left[f(0)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ 可知,

若 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,则可取 $x_0=0$ 或 $x_0=\dfrac{1}{2}$;

若 $f(0)\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,则 $F(0)\cdot F\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$,由零点定理可得,

至少存在一点 $\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$,使 $F(\xi)=f(\xi)-f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)=0$,即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$.

若取 $x_0=\xi$,则有 $f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)$,$x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

综上所述,一定存在 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$,使得 $f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)$.

第 2 章　导数与微分

习题 2 - 1

1. 举例说明函数的可导性和连续性之间的关系.

解　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续,但反之,连续不一定可导.例如,函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续,但它在 $x=0$ 处不可导.若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处一定不可导.

4. 设 $y=x^2+3x+9$,根据导数的定义求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+9]-(x^2+3x+9)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+3+\Delta x)=2x+3.$$

6. 已知 $f'(x_0)$ 存在,求下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;　　(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

解　(1) 原式 $=2\cdot\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$.

(3) 原式
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).$$

8. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性:(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

解　(2) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

又因为 $f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

9. 设 $f(x)=|x-2|$,$g(x)=|(x-1)^2(x-2)|$.试用导数的定义讨论 $f(x)$ 在 $x_0=2$,$g(x)$ 在 $x_0=1$,$x_1=2$ 处的可导性.

解　$f(x)$ 在 $x_0=2$ 处的左导数和右导数分别为

$f'_-(2)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$,$f'_+(2)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

由于 $f'_-(2)\neq f'_+(2)$,所以 $f(x)$ 在点 $x_0=2$ 处不可导.

$g(x)$ 在 $x_0=1$ 处的导数为 $g'(1)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(1+\Delta x)-g(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot(1-\Delta x)=0$,所以 $g(x)$ 在 $x_0=1$ 处可导.

$g(x)$ 在 $x_1=2$ 处的左、右导数分别为 $g'_-(2)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{g(2+\Delta x)-g(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}-(1+\Delta x)^2=-1$,

$g'_+(2)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(2+\Delta x)-g(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}(1+\Delta x)^2=1$.由于 $g'_-(2)\neq g'_+(2)$,故 $g(x)$ 在 $x_1=2$ 处不可导.

10. 设某产品生产 x 个单位时的总收入为 $R(x)=200x-0.01x^2$,求生产 100 个产品时的总收入、平均收入及当生产第 100 个产品时,总收入的变化率.

解　$R(100)=20\ 000-100=19\ 900$,$\overline{R(100)}=\dfrac{19\ 900}{100}=199$,