数理经济学与
经济控制论基础

杨小凯 编

武汉大学经济管理系

一九八二年

数理经济学与经济控制论基础

目　　录

上　册　数理经济学

第一篇　经济规律的定性定量描述

第二篇　最优经济效果分析

第一篇　经济规律的定性定量描述

第一章　微观经济规律的定性定量描述

所谓微观经济学(microeconomics)并不仅指小范围内的经济问题研究。台湾将其译为个体经济学。实际上微观经济学研究不同经济体制下（例如完全竞争、垄断竞争、寡头独占）厂商和消费者的经济行为规律。所谓厂商是指一批厂商。例如价格问题是微观经济学研究的中心问题之一，微观经济学不但研究个别厂商的定价技巧，而且研究整个市场均衡价格的确定，这就不是小范围和个别厂商的行为规律，而是大范围的总规律了。所以微观经济学与企业管理虽有共通之处，但二者又有区别。实际上微观经济学与我们常说的经济体制问题及物质刺激下人的行为规律等问题有密切关系。

（一）需求函数

需求函数是基于以下普遍规律而设计的，即商品价格上升时，商品的销售量会下降。利用商品价格与销售量的统计数据可以用经济计量学中的回归分析方法搞出数学模型。这是一种实证的分析，究其然而不究其所以然。探究其所以然的基本上有三种观点，一种认为商品之间有一种替代作用，例如多吃梨少吃苹果与多吃苹果少吃梨可以有同样的效用，梨与苹果之间就有替代作用。若苹果涨价，则人们会尽量利用这些替代作用，用别的较便宜商品代替苹果，以便在有限的收入水平下达到较高的效用水平，或在效用水平不变的情况下使支出最少。我们在后文中将专门证明需求函数是消费者行为最优化总规律的数量表现。第二种观点是只分析某种商品对每个人的效用（即马克思所说的使用价值），认为随着人均消费量的增加，一种商品的边际效用递减，这种假定影响需求对价格的反应，例如价格较高时，降价能使需求量明显上升，但需求上升到一定程度，由于边际效用递减的作用，价格继续下降，需求量却不能无限制上升。第三种观点认为价格是分工协作的产物，自给自足的社会中，没有分工，没有交换，也就无所谓价格。而分工协作的社会中，每人只生产一种商品或少数几种商品，但却消费成千上万种商品，这种生产的专业化与消费的多样化之间的矛盾，只能通过交换来协调，交换的产品比例就是比价。分工协作可以使人们用同样多的劳动力和资源比自给自足时生产更多的财富，但是交换比价不同，则分工创造的增加价值在协作各方分配的比重就不同。若价格太高，买方通过分工协作所得的收入比自给自足时就少，而价格太低，卖方通过分工协作得到的收入也比自给自足时低，这两种情况中的任一种出现时，就会有一方拒绝分工协作，减少对专业产品的需求量，使分工的市场缩小，而回到自给自足、大而全、小而全的态度去。

我们假定在正常情况下，某种商品的需求量 x 为其价格的单调递减单值连续函数，对连续性的假定，并不是指价格可以连续变化，实际上价格只能间断地跳着变。我们所说的连续是指可以指定任一价格，而有相当的销售量与之对应。论斤称两的商品之销售量也符合这种连续性假定。但是衣服、鞋袜只能一件件一双双卖，它们的销售量不具备连续性，不过对于一个庞大的市场来说，我们可以近似地视销售量为连续函数。当然经济中有不合这种情况的特例，我们可以专门对其另作研究，在此我们只讨论正常的一般规律。设需求函数为

$$x=f(p)$$

其反函数为

$$p=f^{-1}(x)$$

它也是一单调递减函数。下面我们分节讨论各种不同的需求函数。

§1 线性需求函数

$$x=a-bp \tag{1.1.1}$$

其反函数为

$$p=\frac{a}{b}-\frac{1}{b}x \tag{1.1.2}$$

其中 $a>0, b>0$. 函数图形如图1.1.1. a 点为直线与 x 轴的交点，其经济学意义是价格为 0 时市场对商品的绝对饱和需求量。$\frac{a}{b}$为直线与 p 轴的交点，其经济学意义是销售量为 0 时，价格的数值，即当价格大于或等于这一数值时，商品一点也卖不出去。直线斜率为 $-b$，表示价格每提高 1 单位，销售量降低的数量。如果某种商品的市场销售价格和销售量有不少统计数字，则可以利用最小二乘法算出参数 a 和 b. 有了这个具体的模型可以预测需求，制定最优价格和产销计划等等。

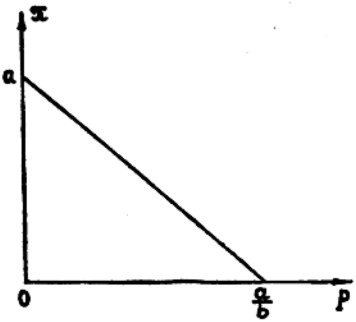


图 1.1.1

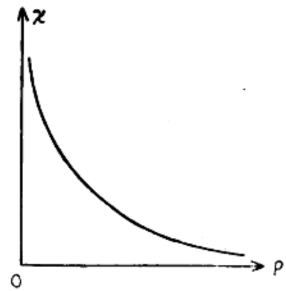


图 1.1.2

§ 2 双曲需求函数

很多商品的销售量与价格之间的关系不是直线关系，例如某些商品的价格无限降低时，需求不会很快饱和，而是不断上升，其绝对饱和需求量几乎是无穷大，用数学语言来说就是存在着渐近线，当价格趋于 0 时，需求量趋于无穷大。而有些商品是人类绝对必需的，不管其价格涨到多高，购买量也不等于 0，这里存在着平行于横轴的渐近线。存在渐近线的情况，用双曲线来描述还是比较合适的，于是我们有下面两种双曲线需求函数。

（1） $$x=\frac{a}{p+c}-b \tag{1.1.3}$$

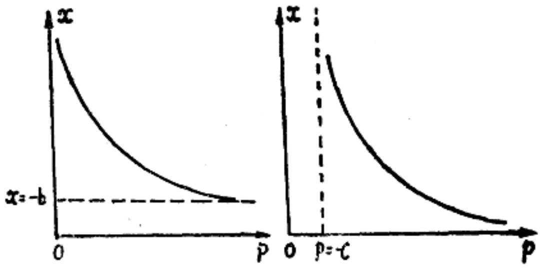
其反函数为
$$p=\frac{a}{x+b}-c \tag{1.1.4}$$

这种需求函数曲线的渐近线为 $x=-b$ 和 $p=-c$，$a>0$。当 b，c 取不同值域时有如下几种不同的情况：

（i） $b=0$，$c=0$。

曲线以横坐标和纵坐标为渐近线，$b=0$ 的经济学意义表示价格升高时虽然需求量会减少，但不管价格怎样高，此种商品总有人要。$c=0$的经济学意义表示人类对此种商品的绝对需求量是无止境的，只要免费赠送，社会对其需求量趋于无穷大，如图1.1.2所示。

（ii） $b<0$，$c<0$ 则渐近线在坐标的第一象限内，$b<0$表示此种商品为绝对必需品，社会至少需要一个最低限度数量 $x=-b$，否则不能活命。如图1.1.3中(a)所示。$c<0$表示只要此种商品的价格降低到 $p=-c$，则需求量就趋近于无穷大。这多指某种效用潜力极大的商品，如图1.1.3中的(b)所示。



(a)$b<0$，　(b)$c<0$

图 1.1.3

（iii） $b>0$，$c>0$。

这时渐近线不在第一象限，如图1.1.4所示。$c>0$ 的经济学意义表示此种商品有一饱和需求

量 $x=\frac{a}{c}-b$，但若免费赠送外，还附加 $p=-c$ 量的鼓励，则需求将趋于无穷大。$b>0$的意义表示当价格提高到 $p=\frac{a}{b}-c$ 时，需求量为 0 。若 $b>0$ 而 $c=0$，则曲线的渐近线为 $x=-b$ 和 $p=0$，也就是说价格趋于 0 时，需求量趋于无穷大。若某种商品代替其他商品的能力很强，就会出现这种情况。例如塑料可代替钢铁、木材、搪瓷、纸张、天然纤维，所以只要塑料价格大大下降，对其需求量可以不断增加，曲线以纵轴为渐近线。

（2）第二类描述需求与价格关系的双曲线为如下形式

$$x=\frac{b}{p^a-e}+c \tag{1.1.5}$$

其反函数为

$$p=\left(\frac{b}{x-c}+e\right)^{\frac{1}{a}} \tag{1.1.6}$$

其渐近线为

$$x=c,\quad p=e^{\frac{1}{a}} \tag{1.1.7}$$

令(1.1.5)式中的 $a=1$，則与(1.1.3)式基本类同，但这种双曲线中的 p 加上选择余地更大的指数参数 a 后便于描述多种需求规律。

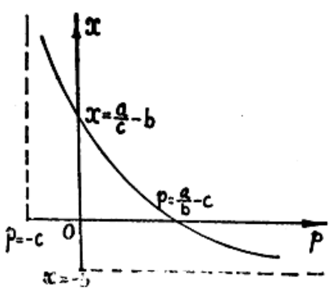


图 1.1.4

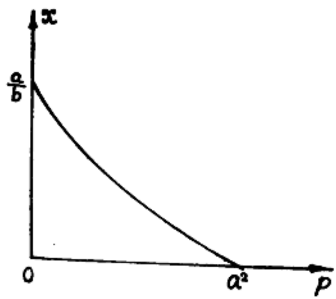


图 1.1.5

§ 3 抛物线需求函数

抛物线的特点是没有什么渐近线，因此它表示的需求函数总有一个使销售量为 0 的价格上限和有一个绝对饱和的销售量上限。抛物线需求函数有如下几种：

（1）
$$x=\frac{a-\sqrt{p}}{b} \tag{1.1.8}$$

其反函数为

$$p=(a-bx)^2 \tag{1.1.9}$$

最大饱和需求量为 $x=\frac{a}{b}$，价格上限为 $p=a^2$，其中 $a>0, b>0$。从图1.1.5可看出其形状类似与两坐标轴相交的双曲线。将(1.1.3)和(1.1.8)对 p 求导数，分别得到

$$\frac{dx}{dp}=\frac{-a}{(p+c)^2}<0 \tag{1.1.3$'$}$$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{1}{2b\sqrt{p}}<0 \tag{1.1.8$'$}$$

对(1.1.3′)和(1.1.8′)再求导一次，则

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{2a}{(p+c)^3}>0 \tag{1.1.3$''$}$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{1}{4p^{\frac{3}{2}}}>0 \tag{1.1.8$''$}$$

可见这两类需求函数都是向上凹的（二阶导数大于0），也就是说价格越高，提高单位价格，减少的销售量越少。

抛物需求曲线与双曲需求曲线的差别在于其反函数之导数有不同特性。

将(1.1.4)和(1.1.9)对 x 求导数，则

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{a}{(x+b)^2} \tag{1.1.4$'$}$$

$$\frac{dp}{dx}=-2ab+2b^2x \tag{1.1.9$'$}$$

再求一次导数，则

$$\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{2a}{(x+b)^3} \tag{1.1.4$''$}$$

$$\frac{d^2p}{dx^2}=2b^2 \tag{1.1.9$''$}$$

可见双曲需求曲线当销售量 x 变化时，价格对销量变化率递减，而对于抛物需求曲线来说，当销量变化时，价格对销量的二阶变化率为不变常数。

（2）有些商品价格很高时，提高价格会使销量下降得越来越快，这就不便于用向上凹的曲线来描述需求与价格之间的关系。我们可以考虑用二阶导数小于0，即向上凸的抛物曲线来描述这类需求函数。

$$x=\frac{a-p^2}{b} \tag{1.1.10}$$

其中 $a>0, b>0$，反函数为

$$p=\sqrt{a-bx} \tag{1.1.11}$$

将(1.10)对 p 求导数，则

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2p}{b}<0$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=-\frac{2}{b}<0$$

所以曲线是向上凸的，也就是的，价格越低时，提高单位价格减少的销售量越少，而价格越高时，提高单位价格，减少的销售量越多。这类曲线适于描述人均需求量对价格的反应规律，而向上凹的曲线适于描述庞大市场的需求规律，因为在一个大市场中，价格下降时，购买的人数会增多，所以销售量越来越多，而对某种商品的人均需求量却很容易饱和。

这种抛物需求曲线，使销售量为 0 的价格上限为 $p=\sqrt{a}$，价格为 0 的绝对饱和需求量为 $x=\frac{a}{b}$，这种需求函数不存在渐近线，即没有无穷大的绝对需求量，也没有价格趋于无穷大时的最低限度需求量。图1.1.6为这种需求函数图形。

（3）另一种向上凸的抛物需求曲线如图1.1.7所示，其解析式为

$$x=\sqrt{\frac{a-p}{b}} \tag{1.1.12}$$

其中 $b>0$，$a>0$。相应的反函数为

$$p=a-bx^2$$

最大饱和需求量为 $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$，需求量为 0 时的最高价格限度为 $p=a$。

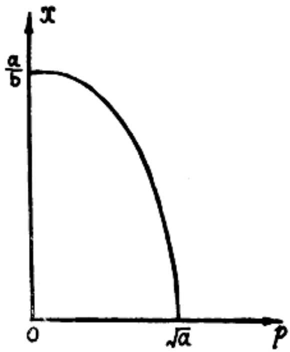


图 1.1.6

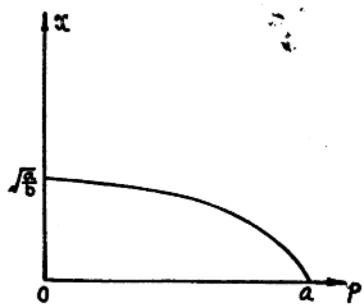


图 1.1.7

(1.1.2)对 p 的导数为

$$\frac{dx}{dp}=\frac{1-}{2\sqrt{b(a-p)}}<0$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{-b}{4\sqrt{[b(a-p)]^3}}<0$$

所以曲线在有意义的条件下是递减且向上凸的。

从图1.1.6和图1.1.7不难看出这两种向上凸的需求曲线之差别，图1.1.6中的函数曲线是开口向下的抛物线，而图1.1.7中的函数曲线是开口向左的抛物线，可见这两种函数描述的销量与价格之间的关系在价格高与价格低时，其特点正好相反。我们在选择模型时，必须将所研究的商品在坐标纸上点出其价格和销售量决定的点，看点的分布更接近于哪种曲线，才能确定以哪种模型为基础进一步用经济计量学算出模型参数。

§4 指数需求函数

$$x=\frac{a}{e^{bp}} \qquad (1.1.14)$$

其中 $a>0$，$b>0$，相应的反函数为

$$p=\frac{1}{b}\ln\frac{a}{x} \qquad (1.1.15)$$

渐近线为 $x=0$，即没有价格上限，绝对饱和需求量为 $x=a$。将(1.15)对 p 求导数可得

$$\frac{dx}{dp}=-abe^{-bp}>0$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=ab^2e^{-bp}>0$$

所以曲线是向上凹的，与前几种向上凹的需求函数之差别是其导数也是指数函数，而且需求

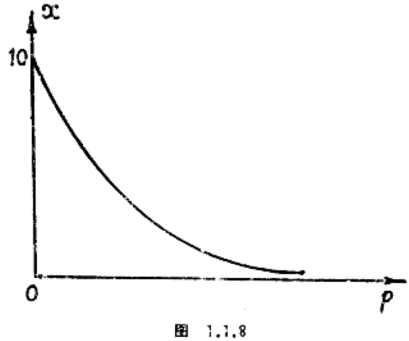


图 1.1.8

量增长率对价格增长率之比（即后文中将介绍的需求弹性）就是指数 bp。图1.1.8是一个具体的需求函数 $x=10e^{-0.3p}$ 之图形。

§5 有拐点的需求函数

某些商品的价格与销售量之间的关系与上述所有需求函数描述的规律都不同，上述函数的特点是，其二阶导数符号不变，或者总是大于0，曲线向上凹，或者总是小于0，曲线向上凸。有的商品其价格下降时，销量猛增，但达到一定限度，价格再下降，需求量就增加得较少了，不过若价格达到另一更低水平，再下降时，需求量又猛烈上升。这种需求规律在直角坐标系中点出来，呈现出凹凸相间的曲线，即需求函数的二阶导数既有大于0的时候，也有小于0的时候。下面我们就介绍两种这样的需求函数。

（1）
$$x=ap^3+bp^2+cp+e \tag{1.1.16}$$

其中 $a<0$，$b>0$，$c<0$，$e<0$。

求 x 对 p 的二阶导数且令其等于0，则可解出拐点坐标：

$$\frac{d^2x}{dp^2}=-6ap+2b=0$$

$$p^*=\frac{-b}{3a}$$

当 $p>\frac{-b}{3a}$时，$\frac{d^2x}{dp^2}>0$，曲线向上凹，当 $p>\frac{-b}{3a}$时，$\frac{d^2x}{dp^2}<0$，曲线向上凸

绝对饱和需求量为 $x=e$，需求量为 0 的价格上限由三次方程 $ap^3+bp^2+cp+e=0$ 决定，将此式用 a 除，且令

$$p=y-\frac{b}{3a}$$

则三次方程化为

$$y^3+\alpha y+\beta=0$$

解出价格上限为

$$p=\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}}-\frac{b}{2a}$$

其中 $$\alpha=\frac{3b^2}{a^2}+\frac{c}{a}-\frac{2b^2}{3a^2},\quad \beta=\frac{b^2}{9a^2}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3-\frac{bc}{3a^2}+\frac{c}{a}.$$

例如某种电视机的需求量与价格之间的关系为 $x=-0.5p^3+1.2p^2-p+1$，其中 p 的单位为千元，x 的单位为千万台，函数关系可以用下表描述，相应的曲线如图1.1.9所示。

价格 p（千元）	.2	.4	.6	.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	1.9
需求量 x（千万台）	.84	.76	.72	.71	.70	.66	.58	.42	.17	0

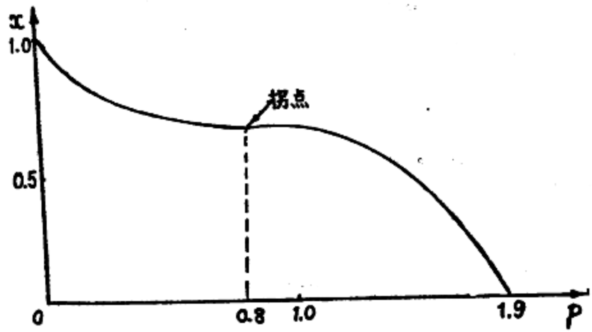


图 1.1.9

将 $a=-0.5$，$b=1.2$ 代入拐点计算公式

$$p=-\frac{b}{3a}=0.8$$

再代入（1.16），则求得拐点之销售量为 $x=0.712$，价格上限为 $p=1.9$，绝对饱和需求量 $x=e=1$，函数之一阶导数

$$\frac{dx}{dp}=-1.5p^2+2.4p-1>0$$

这类需求函数是种最重要的需求函数，很多耐用高档商品的需求函数都有拐点，价格下降时时，销量迅速上升，上升到接近拐点时，市场呈现饱和迹象，价格继续下降，也不能使需求量增加多少，这时千万不能将这种相对饱和视为绝对饱和，实际上价格再有一个较大的下跌时，销售量又会猛烈上升。例如当每家都有了一台电视机时，市场呈现饱和迹象，价格下降，需求也难以上升。但价格再有大幅度下降时，家庭成员会渴望一人有台电视机，对教学电视、各种监视电视的需求都会上升，有些商品的需求函数可能还不止一个拐点，这就要用高次多项式函数来描述，这种函数要用多元线性回归方法来搞出模型，把价格 p_i 的统计数据加工后变成 p_i，p_i^2，p_i^3，p_i^4 等多个数据，然后用多元线性回归算出 p，p_2，p^3，p^4 的系数即常数项。

（2）有拐点的另一种需求函数是

$$x=Ae^{-p^a} \tag{1.1.17}$$

其中 $a>0$，A 为绝对饱和需求量，渐近线为 $x=0$，将 x 对 p 求导数，则

$$\frac{dx}{dp}=-aAp^{a-1}e^{-p^a}<0$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} = aA(a-1)p^{a-2}e^{-p^a} + a^2A^2p^{a-1}e^{-p^a}$$

令二阶导数等于0，可解出拐点坐标为

$$p^* = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}, \quad x^* = Ae^{\frac{1}{a}-1} \tag{1.1.8}$$

当 $p<p^*$ 时，二阶导数小于0，曲线向上凸，当 $p>p^*$ 时，二阶导数大于0，曲线向上凹，如图1.1.10所示。

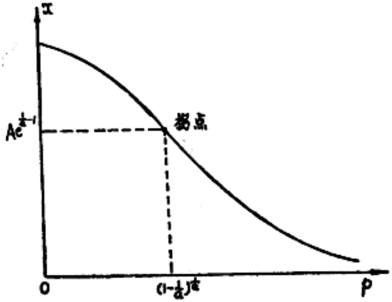


图 1.1.10

比较图1.1.9和图1.1.10不难看出这两种函数的差别。图1.1.9所示的函数其二阶导数随着 p 的增加从正变到负，所以曲线先是向上凹，后是向上凸，而图1.1.10表示的函数，其二阶导数随着 p 的增加从负变到正，所以曲线先是向上凸，过了拐点则向上凹。图1.1.10所示的需求函数之特点是，当价格非常高时，降低一点价格，需求量增加得不多，当价格降低到拐点左右的区域时，需求量爆炸性上升，过了这个区域，若继续降价，需求量的上升又减缓了。函数一阶导数（即曲线之切线斜率）之绝对值两头小中间大，即曲线两头平缓，中间陡；而图1.1.9表示的函数正好相反，其一阶导数绝对值两头大中间小，也就是说曲线两头陡，中间平缓。

其他需求函数还有

$$x = p^{-a}e^{-b(p+c)} \tag{1.1.19}$$

其中 $a>0$，$b>0$。

数理经济学用严谨的方法证明了需求函数间接反映了效用函数的特性。所以它是对效用的定量描述，而商品的效用（即使用价值）是经济活动追求的主要目标，所以需求函数是最重要的经济函数。

例如，若需求函数有平行于纵轴的渐近线，说明此种商品代替其他商品的能力很强，或者其效用潜力极大；若绝对饱和需求量低，则说明此种商品代替其他商品的能力差，或者其

效用潜力很小，如果需求函数有平行于横轴的渐近线，则其他商品代替此种商品的潜力极小，它具有某种不可替代的使用价值。反之，若价格上限很低，则此种商品很容易被其他商品所替代，或者其独特的效用不大，所以需求函数的具体形式从质和量上反映了一种商品的效用，并且反映了其他商品与此种商品在效用上的可比性及可替代程度的大小。

（二）供给函数及均衡交易量和均衡价格

§1 供给函数

供给函数描述商品的供应量与价格之间的关系，一般情况下，它的图形正好与需求函数相反，价格越高，供给量越多，用数学语言来说，即供给函数是单调递增的，其一阶导数大于0。

价格提高时，由于生产方收入增多，因而刺激了增加生产的积极性，同时也使生产者有财力改进技术，提高效率，挖掘潜力，扩大生产规模；另一方面，价格提高后会使其他厂商转而生产此种商品，使供应增加。

供给函数除反映了某种商品生产潜力的大小，也反映了经济体制的特点。一般数理经济学假定供给函数以完全竞争或有效率竞争为条件，但是如果市场竞争不是十分有效，例如存在着某种卖方垄断，则价格上升时，其他企业不能自由进入这种产品的生产，生产者为了保持高价，不愿迅速扩大供给量，这时利用统计数据搞出的供给函数其弹性较小，即供给量对价格反应不灵敏，所以这种供给函数反过来定量反映了经济体制对价格体制的反应能力。供给函数主要有如下几种形式

（1） $x=ap-b$，相应的反函数 $p=\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$ （1.2.1）

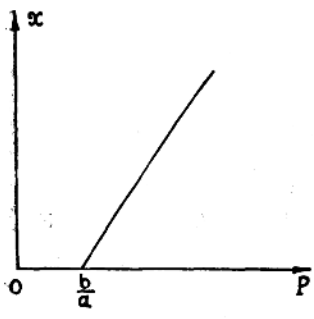


图 1.2.1

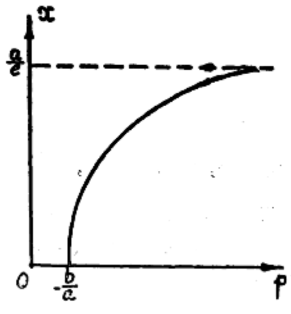


图 1.2.2

其中 $a>0$，$b>0$，$\frac{b}{a}$为价格的最低限，只有大于这一价格时，才有供应量。a 为价格每提高 1 单位，供给量增加的值。

（2） $$x=\frac{ap+b}{ep+c}，反函数\ p=\frac{b-cx}{ex-a} \qquad (1.2.2)$$

其中 $a>0$，$b<0$，$e>0$，$ac>be$。价格的最低限为 $-\frac{b}{a}$。渐近线 $x=\frac{a}{e}$ 平行于 p 轴，这就是供应能力的极限，因为 $\lim\limits_{p\to\infty}x=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{ap+b}{ep+c}=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{a+\frac{b}{p}}{e+\frac{c}{p}}=\frac{a}{e}$。函数的一阶导数为

$$\frac{dx}{dp}=\frac{ac-be}{(c+ep)^2}$$

它随 p 的增加而单调递减，即二阶导数小于0，曲线向上凸。

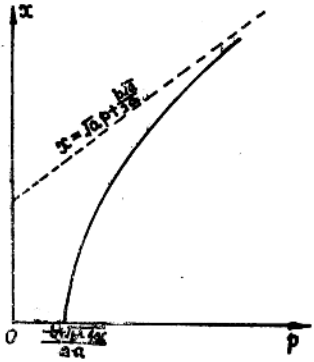


图 1.2.3

（3） $$x=\sqrt{ap^2+bp+c}$$

其中 $a>0$，$b>0$，$b^2>4ac$，最低价格限制为 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。现在我们来求渐近线。根据求渐近线的一般方法，先求 $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{x}{p}=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\sqrt{ap^2+bp+c}}{p}=\lim\limits_{p\to\infty}\sqrt{a+\frac{b}{p}+\frac{c}{p^2}}=\sqrt{a}$，然后求 $\lim(x-\sqrt{a}\,p)=\lim(\sqrt{ap^2+bp+c}-\sqrt{a}\,p)$ 这是求 $\infty-\infty$ 的极限问题，我们可以变换一下，使

$$\sqrt{ap^2+bp+c}-\sqrt{a}\,p=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{ap^2+bp+c}}}-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}\,p}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a}\,p}-\frac{1}{\sqrt{ap^2+bp+c}}}{\frac{1}{\sqrt{ap^2+pq+c}\sqrt{a}\,p}}$$

然后利用罗必塔法则，将分子分母不断求导数然后求出极限

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sqrt{ap^2+bp+c}-\sqrt{a}\right)=\frac{b}{2a}\sqrt{a}$$

所以渐近线方程为

$$x=\sqrt{a}\;p+\frac{b}{2a}\sqrt{a}$$

其一阶导数为

$$\frac{dx}{dp}=\sqrt{a}$$

（1.2.3）的导数为

$$\frac{dx}{dp}=\frac{2ap+b}{2\sqrt{ap^2+bp+c}}>0,$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{2a\sqrt{ap^2+bp+c}-(2a+b)^2/2\sqrt{ap^2+bp+c}}{2(ap^2+bp+c)}<0$$

所以曲线是向上凸且渐增的。

（4） $$x=ap^2+bp+c \tag{1.2.4}$$

其中 $a>0$，$b>0$，$c<0$，$b^2>4ac$，价格的最低限为 $p=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。函数没有渐近线，随着价格的提高，供给量可以无限制的增加，这类商品的生产潜力极大，市场竞争也很有效。函数之二阶导数为

$$\frac{d^2x}{dp^2}=a>0,$$

所以曲线是向上凹的，随着价格的提高，供给量对价格的变化率越来越大，也就是说价格越高，则提高一点价格可使供应量增加得越多。

§2 单一商品的市场的均衡交易量和均衡价格

现在我们假设需求函数和供给函数为如下形式的线性函数

$$x=-ap+b \tag{1.2.5}$$

$$x'=a'p-b' \tag{1.2.6}$$

a，b，a'，b' 都大于0，其中 x 为需求量，x' 为供给量。若要供求均衡，则下式必须成立：

$$x=x' \tag{1.2.7}$$

将（1.2.5）和（1.2.6）代入（1.2.7），则

$$-ap+b=a'p-b'$$

于是可解出

$$\bar{p}=\frac{b+b'}{a+a'} \tag{1.2.8}$$

这就是均衡价格，代入（1.2.5）或（1.2.6）则可解出均衡交易量

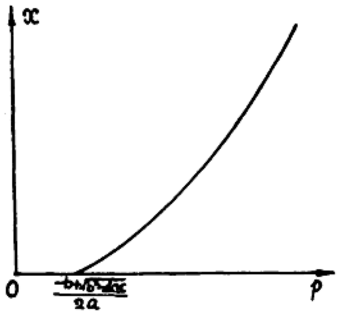


图 1.2.4

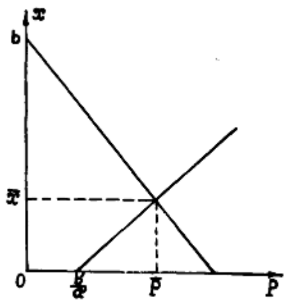


图 1.2.5

$$\bar{x}=\frac{b'(b-a)}{a-a'} \tag{1.2.9}$$

§ 3 多种商品的市场均衡

现在我们考虑两种商品的供求均衡问题。两种商品分别用脚码1，2表示，x_1，x_2 分别表示对两种商品的需求量，x'_1，x'_2 分别表示两种商品的供给量，p_1，p_2 分别表示两种商品的价格。设有需求函数

$$x_1=a_0+a_1p_1+a_2p_2 \tag{1.2.10}$$

$$x_2=\alpha_0+\alpha_1p_1+\alpha_2p_2 \tag{1.2.11}$$

其中 $a_1<0$，$\alpha_2<0$，$a_2>0$，$\alpha_1>0$，$a_0>0$，$\alpha_0>0$。

a_1，α_2 小于0的经济意义是，对商品1，2的需求量分别负比于其自身价格，而 $a_2>0$表示对商品 1 的需求量正比于商品 2 的价格，即商品 2 的价格越高，人们就会用商品 1 替代商品 2 ，因此对商品 1 的需求量增加，$\alpha_1>0$ 表示商品 2 的需求量正比于商品 1 的价格，这里假设两种商品之间存在着替代作用。a_0，α_0 分别表示商品 1 ，2 的绝对饱和需求量。

又设有供给函数

$$x'_1=b_0+b_1p_1+b_2p_2 \tag{1.2.12}$$

$$x'_2=\beta_0+\beta_1p_1+\beta_2p_2 \tag{1.2.13}$$

其中 $b_1>0$，$\beta_2>0$，表示一种商品价格提高后，其供给量成正比上升；

$b_2<0$, $\beta_1<0$ 表示其他商品价格提高后，会使厂商转而生产那些商品，因而使未涨价的商品供给量下降。

在两种商品的供求都达到均衡时，我们有

$$x_1 = x'_1 \tag{1.2.14}$$

$$x_2 = x'_2 \tag{1.2.15}$$

联立（1.2.10），（1.2.11），（1.2.12），（1.2.13），（1.2.14），解之可求得均衡价格

$$\bar{p}_1 = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} \tag{1.2.16}$$

$$\bar{p}_2 = \frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} \tag{1.2.17}$$

其中

$$c_0 = a_0 - b_0,\quad c_1 = a_1 - b_1,\quad c_2 = a_2 - b_2$$

$$\gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0,\quad \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1,\quad \gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

而均衡交易量为

$$\bar{x}_1 = a_0 + a_1\frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} + a_2\frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} \tag{1.2.18}$$

$$\bar{x}_2 = \alpha_0 + \alpha_1\frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} + \alpha_2\frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} \tag{1.2.19}$$

我们这里所说的供求均衡是指在完全竞争或有效率竞争条件下的均衡。所谓完全竞争是指任一卖者或买者的销售量、购买量都不会影响价格波动，任何人都不能控制价格。后文中我们将证明供求均衡的交易量和价格是完全竞争条件下消费者和生产者在有限资源条件下追求消费者效用最大化的最优生产量和最优价格。在卖方垄断的情况下，卖方能控制价格，他并不会追求以上均衡，生产者以利润最大化为目标，他会适当控制供给量，使交易量保持在价格较高水平的均衡，后文中我们将进一步讨论卖方垄断情况下的均衡条件。

（三）费 用 函 数

§1　线性费用函数和盈亏分析

最简单的生产总费用函数为如下形式

$$C = ax + b \tag{1.3.1}$$

其中 C 为生产总费用，x 为生产数量，a 为单位产品的可变成本，如原材料消耗、工资开支等，b 为固定费用，例如厂房、设备折旧、调节、安装机器和掌握新技术的费用等。函数图形如图1.3.1

将 C 用 x 除，则得到平均每件产品的费用函数

$$\bar{C} = a + \frac{b}{x} \tag{1.3.2}$$