

21 世纪全国高等职业院校机械制造与自动化专业(机电一体化专业)通用教材

E

CHUAN GAN QI YU CE SHI JI SHU

传感器与测试技术

彭智娟 徐瑞银 刘传玺 主 编



山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

传感器与测试技术/彭智娟等主编. —济南:山东科学技术出版社,2008

21世纪全国高等职业技术学院机械制造与自动化专业(机电一体化专业)通用教材

ISBN 978-7-5331-4998-7

I. 传... II. 彭... III. 传感器—测试技术—高等学校:技术学校—教材 IV. TP212.06

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 089769 号

21世纪全国高等职业技术学院机械制造与自动化专业(机电一体化专业)通用教材

传感器与测试技术

主编 彭智娟 徐瑞银 刘传玺

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002 电话:(0531)82098080

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002 电话:(0531)82098071

印刷者:山东鲁创彩印有限公司

地址:莱芜市方下工业园

邮编:271125 电话:(0634)6613111

开本:787mm×1092mm 1/16

印张:15.75

版次:2008年9月第1版第1次印刷

ISBN 978-7-5331-4998-7

定价:35.00元

编 委 会

▶ 主 编 彭智娟 徐瑞银 刘传玺

▶ 副主编 (按姓氏笔画为序)

刘秀杰 孙洪捷 沈 舷 迟京瑞 闵艳梅
陈瑞斌 周文斌 殷永贵 袁照平 褚元娟
谭 毅 燕居怀

▶ 编 者 (按姓氏笔画为序)

任孝平 刘秀杰 吕志昂 孙洪捷 杨卫英
沈 舷 迟京瑞 闵艳梅 陈瑞斌 周文斌
殷永贵 袁照平 褚元娟 谭 毅 燕居怀

▶ 策 划 王洪胜



绪论

一 测试技术的任务和重要性

测试技术主要研究各种物理量的测量原理和测量信号的分析处理方法。在生产实践和科学实验中所进行的测试工作,其目的是为了从测试所得的信号中获得被测对象某一方面的信息,如为了获知机械传动系统的传动性能是否良好,需要采用专门的技术手段和仪器设备(测试装置)测试传动系统在受载时的转速、转矩、噪声、各部件的振动参数等,获取各物理量的信号,并对信号做分析处理,得出我们想要的信息即传动系统的承载能力、机械效率和系统故障情况等。通过测试,可以揭示事物的内在联系和发展规律,从而去利用和改造它,推动科学技术的发展。测试技术是进行各种科学实验研究和生产过程参数监测等必不可少的手段,它起着类似于人的感觉系统的作用。同时,其他领域科学技术的发展和进步又为测试技术提供了新的方法和装备,促进了测试技术的发展。

在科学研究领域,精确的测试是科学的根基。科学研究的发展历史表明,科学上许多新规律的发现和突破,新的定律、公式的诞生都是以测试为基础的。

在工程技术领域,工程研究、产品研发、生产监督、质量控制和自动化生产等,都离不开测试技术。测试技术在工程技术领域尤其是机械工程中的应用主要体现在以下几个方面:

1. 工程基础研究中的试验。例如机构学、运动学、摩擦学以及控制方法等方面的原理性试验。
2. 机械加工过程中的加工工艺研究试验。例如金属切削过程试验、刀具性能及磨损试验、金属塑性成型试验、特种加工工艺试验等。
3. 在产品设计中,无论是新产品开发还是旧设备改造,通过对新、旧产品的模型试验或现场实测,为产品质量和性能提供客观的评价,为技术参数的优化和效率的提高提供基础数据。例如样机或定型产品的整机全面性能试验或元件的性能、寿命试验等。
4. 在工业生产中,对成品做出厂检验。汽车、机床等设备的重要零部件如电机、发动机等出厂时,必须对其性能质量进行测量和出厂检验。通过对抽取的零部件进行测试,生产工程师可以了解产品的质量。
5. 在工业生产中,通过对工艺参数的测试和数据采集,实现对设备的状态监测、质量控制和故障诊断。
6. 在工业生产自动化中,测试装置是自动控制系统中的感觉器官和信息来源,对确保

自动化系统的正常运行起着重要作用。

7. 在工作和生活环境的净化及监测中,经常需要测量振动和噪声的强度及频谱,经过分析找出振源,并采取相应的减振、防噪措施,改善劳动条件与工作环境,保证人的身心健康。

测试技术被广泛应用于工农业生产、科学研究、国内外贸易、国防建设、交通运输、医疗卫生、环境保护和人民生活的各个方面,起着越来越重要的作用,成为国民经济发展和科技进步的一项必不可少的重要基础技术。因而,使用先进的测试技术也就成为经济高度发展和科技现代化的重要标志之一。

二 测试系统的构成

测试所用的测试装置,也叫测试系统。简单的测试系统只有一个模块,如水银体温计,它直接将 被测对象温度的变化转化为温度计液面示值,结构简单,测试结果也直接由人读取;在工程测试中,为增加信号传输、处理、存储、显示的灵活性和提高测试系统的自动化程度,并利于和其他控制环节一起构成自动化测控系统,通常先将 被测对象输出的物理量转换为电量,然后再对变换后的电信号进行处理、分析,从信号当中提取出所需信息,最后以适当的形式显示、输出。测试系统的基本构成如图 0-1 所示。

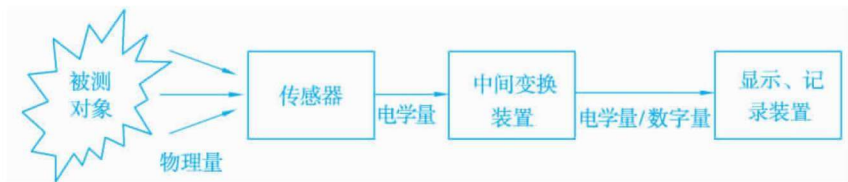


图 0-1 测试系统构成

一般说来,测试系统由传感器、中间变换装置和显示记录装置 3 部分组成。测试过程中,传感器将反映被测对象特性的物理量(如压力、加速度、温度等)检出并转换为电量,然后传输给中间变换装置;中间变换装置对接收到的电信号用硬件电路或经 A/D 变换后用软件完成对信号的调理和分析处理,再将处理结果以电信号或数字信号的方式传输给显示记录装置;最后由显示记录装置将测量结果输出,提供给观察者或其他自动控制装置。

传感器获取的信号中携带着人们所需要的有用信息,但也常含有大量的人们不感兴趣的其他成分,后者称为干扰信号。为剔除干扰信号和提取测试信号中的有用信息,必须通过中间变换装置对信号进行加工变换,改变信号形式,突出信号中的有用信息成分。中间变换装置部分通常包含有几个环节,通过各环节来实现对信号的滤波、调制、分析等调理、处理、分析 3 方面的工作,以从信号当中提取有用信息。图 0-2 所示的机床轴承故障监测系统中间的中间变换装置就由带通滤波器、A/D 信号采集卡和计算机中的 FFT 分析软件 3 部分组成。此系统中传感器为加速度计,它将机床振动信号转换为电信号;带通滤波器用于滤除传感器测量信号中的高、低频干扰信号和对信号进行放大;A/D 信号采集卡用于对放大后的测量信号进行采样,将其转换为数字量;FFT 分析软件则对转换后的数字信号进行 FFT 变换,计算出测试结果即信号的频谱;最后由显示器对测试结果进行显示。另外,测试系统的测量分析结果还可以和生产过程相连,当机床振动信号超标时发出报警信号,以防止加工废品的产生,

实现对机床运行状态的监测。

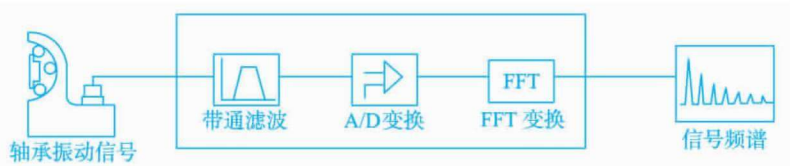


图 0-2 机床轴承故障监测系统

三 测试技术的发展概况

1. 传感器方面

传感器是测试、控制系统中的信息敏感和检测部件,它直接感受被测量的变化并输出与其成一定比例关系的信号,以满足系统对信息传输、处理、记录、显示和控制的要求。

早期发展的传感器,是利用物理学中场的定律(电场、磁场、力场等)等物理学原理所构成的“结构型”传感器,如图 0-3 所示的可变磁阻位移传感器,其基本特征是以其结构参量的变化所引起场的变化来反映待测量(力、位移等)的变化。

利用新的物理、化学、生物等效应是传感技术发展的重要方向之一。每一种新的物理、化学、生物效应的应用,都会出现一种新型的敏感元件,或者能测量某种新的参数。例如,除常见的力敏、压敏、光敏、磁敏传感器之外,还有声敏、湿敏、色敏、气敏、味敏、化学敏、射线敏等传感器。如图 0-4 所示的新型光纤温度传感器,这种利用物质特性构成的传感器称为“物性型”传感器或“物性型”敏感元件。被开发的敏感功能材料有半导体、电介质(晶体或陶瓷)、高分子合成材料、磁性材料、超导材料、光导纤维、液晶、生物功能材料、凝胶、稀土金属等。

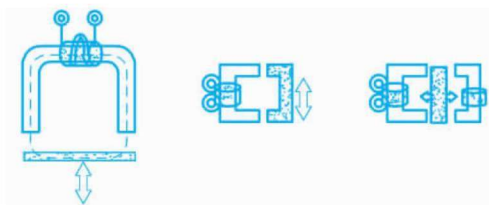


图 0-3 可变磁阻位移传感器

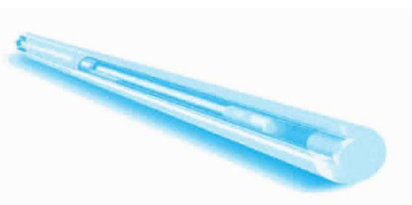


图 0-4 新型光纤温度传感器

多功能、集成化、智能化是传感技术发展的另一重要方向。随着微电子技术的发展,出现了或是同一功能的多个敏感元件排列成线型、面型的传感器;或是多种不同功能的敏感元件集成一体,成为可同时测量多种参量的传感器;或是传感器与放大、运算、温度补偿等电路集成一体的器件。近年来,更有把部分信号处理电路和传感器集成一体,使传感器具有部分智能,成为智能化传感器。图 0-5 所示为 HP 公司生产的加速度信号测量传感器芯片,



图 0-5 HP 公司生产的加速度信号测量传感器芯片

它能自动选择量程和增益,自动校准与实时校准,进行非线性校正、漂移等误差补偿和复杂

的计算处理,完成自动故障监控和过载保护等。

2. 测量信号处理方面

20 世纪 50 年代以前,对信号的处理分析主要用模拟分析方法,此后,人造卫星、宇航探测及通信、雷达等技术的发展,对信号分析的速度、分辨能力提出了更高的要求。随着大规模集成电路的发展和微型计算机的普及使用,以及在数字信号分析当中的重要计算——离散傅里叶变换算法的一再优化,促进了数字信号处理技术的发展和應用。

20 世纪 80 年代,出现了用于快速处理信号的器件——信号处理芯片。美国 Texas 公司 1986 年推出的 TMS320C25 芯片,运算速度达每秒 1 000 万次,用其进行 1 024 复数点傅里叶变换运算,只需 14 ms 便可完成。信号处理芯片可以简化信号处理系统的结构、加快运算速度、提高信号处理的实时能力等,在图像处理、语言处理、振动噪声、生物医学信号的处理方面,都展示了很好的应用前景。

进入 20 世纪 90 年代后,随着微型计算机价格的大幅度降低,出现了用 PC 机、仪器板卡和应用软件构成的计算机虚拟仪器,图 0-6 为 National Instrument 公司提出的计算机虚拟仪器。虚拟仪器采用计算机开放体系结构来取代传统的单机测量仪器(如图 0-7 所示的 Agilent 公司生产的数字化信号分析仪器),将传统测量仪器中的公共部分(如电源、操作面板、显示屏幕、通信总线和 CPU 等)集中起来用计算机共享,通过计算机仪器扩展板和应用软件,在计算机上实现多种物理仪器。虚拟仪器的突出优点是与计算机技术结合,仪器就是计算机;其次虚拟仪器功能由软件确定,不必担心仪器永远保持出厂时既定的功能模式,用户可以根据实际生产环境变化的需要,通过更换应用软件来拓展虚拟仪器的功能,以适应科研、生产的实际需要;另外,虚拟仪器能与计算机的文件存储、数据库、网络通信等功能相结合,具有很大的灵活性和拓展空间。在现代网络化、计算机化的生产、制造环境中,虚拟仪器更能适应现代制造业复杂、多变的应用需求,能更迅速、更经济、更灵活地解决工业生产、新产品实验中的测试问题。



图 0-6 National Instrument 公司提出的计算机虚拟仪器

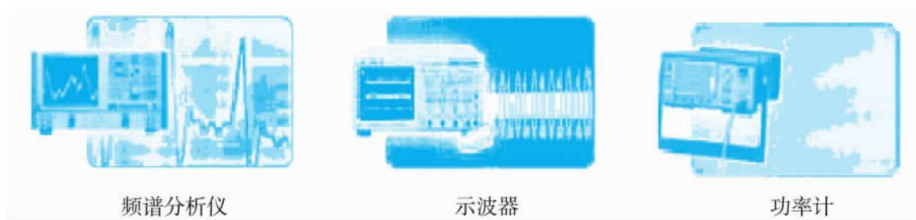


图 0-7 Agilent 公司数字化信号分析仪器

四 课程内容及学习要求

本课程的研究对象是对工程领域中试验、控制和运行监测等所涉及的工程参量,如压力、力矩、应变、位移、速度、加速度、温度、流量、液位、浓度、重量等的测量。通过本课程的学习

习,应掌握工程测试所需的基本知识和技能,为进一步学习、研究和处理工程技术问题奠定基础。本课程具体要求如下:

- (1) 掌握信号的频域描述方法,建立明确的信号频谱结构的概念;
- (2) 掌握测试系统的选择与设计;
- (3) 掌握常用的信号分析方法,了解信号数字化处理中的基本问题;
- (4) 掌握常用传感器、常用信号调理装置的工作原理和性能特点,并比较合理地选用之。

作为高等教育中的一门课程,《传感器与测试技术》在教学计划中有其特定的地位、作用和范围。它必须以前导课程为基础来展开讨论和培养学生对传感器与测试技术的基本理论、基本知识、基本能力和技能的掌握。

本课程具有很强的实践性,只有在学习中密切联系实际,加强实践,通过必要的实验能力的训练,才能获得关于测试工作比较完整的概念。也只有这样,才能初步形成处理实际测试工作的能力。

SHANG PIAN

上篇

测试技术基础

在生产实践和科学实验中,需要观测大量的现象及其参量的变化。这些变化量可以通过测量装置变成容易测量、记录和分析的电信号。一个信号包含着反映被测系统的状态或特性的某些有用的信息,它是人们认识客观事物内在规律、研究事物之间的相互关系、预测未来发展的依据。

本篇讲述的是测试技术领域里的基本知识,主要包括3个方面的内容:一是对测试所用的测试仪器及测试系统中流动着的信号加以分析研究,建立信号频谱的概念,掌握测试系统特性的数学描述方法,从而能为信号选择合适的测试系统;二是信号的分析与处理,掌握如何将测试所得结果做数字化处理,如何从测试结果中剔除干扰信号和提取有用信息;三是信号的调理,解决在对信号分析之前所做的必要的调理工作,如滤除干扰噪声,调制与解调等。本部分知识理论性较强,综合运用了高等数学、工程数学、自动控制等各方面的相关知识,尤其是在频率域里分析信号和系统的特性,概念较为抽象。

第 1 章 信号及其描述

不同特性的信号,对测试装置的要求也不同。认识信号、对信号在频率域里做出描述,揭示信号在频率域里的特性,以选择合适的测试装置,是测试工作的基本内容之一。

1.1 信号的分类与描述

为了深入了解信号的物理实质,将其进行分类研究是非常必要的。按信号在时间域里的变化规律,可以将信号分为确定性信号和非确定性信号。能够用明确的数学关系式描述或可以用实验的方法并以足够的精度重复产生的信号称为确定性信号,反之则称为非确定性信号。信号的进一步分类如图 1-1 所示。

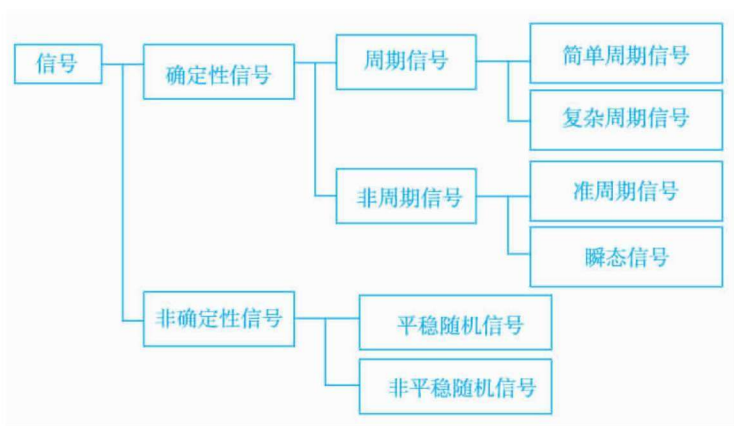


图 1-1 信号的分类

一 确定性信号

1. 周期信号

周期信号是经过一定时间可以重复出现的信号,满足条件:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-1)$$

式中, T 为周期, $T = 2\pi/\omega_0$, ω_0 为信号的圆频率。

例如,图 1-2 是一个 50 Hz 正弦波信号 $10\sin(2\pi ft)$ 的波形,信号周期为 $T = 0.02$ s。

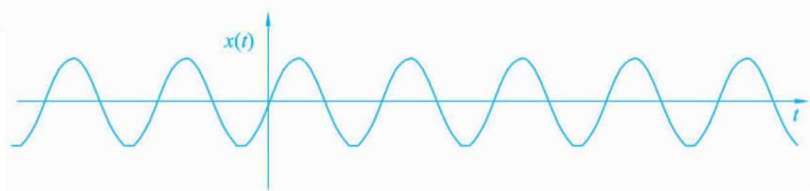
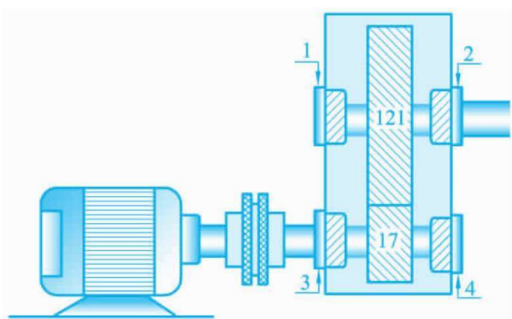
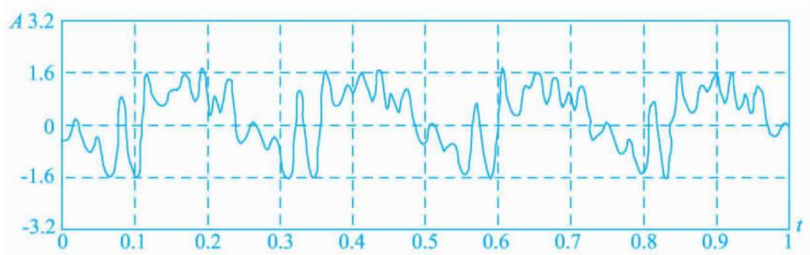


图 1-2 50 Hz 正弦波信号波形

在机械系统中,回转体不平衡引起的振动,往往也是一种周期性运动。例如,图 1-3 是某钢厂减速机的振动测试,图 1-3(a) 为振动测点布置图,图 1-3(b) 是测得的振动信号波形(测点 3),此信号可以近似地看做为周期信号。



(a) 振动测点布置图



(b) 测点 3 处的振动信号波形

图 1-3 某钢厂减速机振动测试

2. 非周期信号

非周期信号属于确定性信号,是不会重复出现、没有周期的信号。非周期信号又分为瞬变非周期信号和准周期信号。

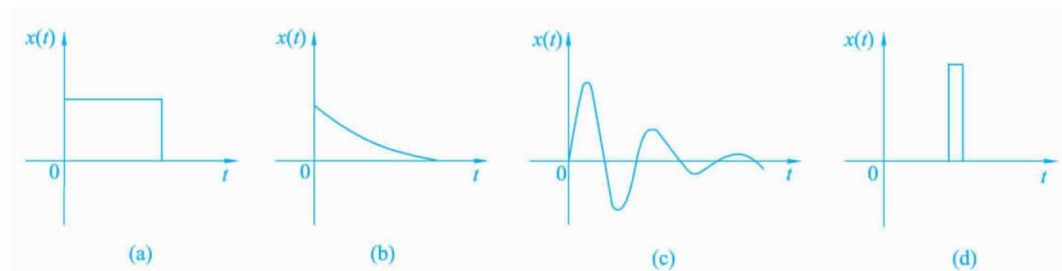


图 1-4 瞬变非周期信号波形

(1) 瞬变非周期信号

此种信号只在一定时间内存在[如图 1-4(a)(d)],或随着时间的增长而衰减至零[如图 1-4(b)、(c)].例如,锤子的敲击力、承载缆绳断裂时应力的变化、单自由度振动模型在脉冲力作用下的响应等。

(2) 准周期信号

准周期信号是由有限个周期信号合成的,但各周期信号的频率相互间不是公倍关系,不满足周期条件。例如, $x(t) = \sin t + \sin\sqrt{2}t$,它是两个正弦信号的合成,其频率比不是有理数,不成谐波关系,其波形如图 1-5 所示。这种信号往往出现于通信、振动系统中,应用于机械转子振动分析、齿轮噪声分析、语音分析等场合。

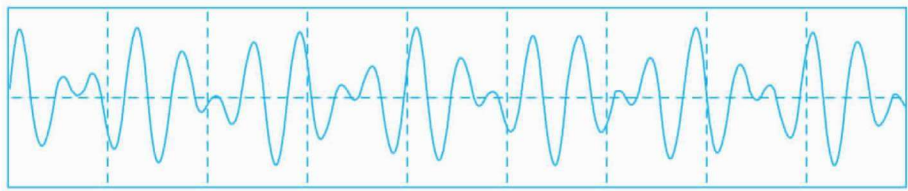


图 1-5 准周期信号 $x(t) = \sin t + \sin\sqrt{2}t$ 的波形

二 非确定性信号

非确定性信号也叫随机信号,是工程中经常遇到的一种信号。非确定性信号不能用确定的数学关系式来描述,不能预测它未来任何时刻的准确值。产生随机信号的物理现象称为随机现象,如汽车奔驰时所产生的振动、飞机在大气流中的浮动、树叶随风飘荡、环境噪声等。对这种信号,每次观测结果都不同,但通过大量的重复试验发现:其值的变动服从统计规律,因而可以用概率统计方法来描述和研究。

表示随机信号的单个时间历程 $x_i(t)$ 称为样本函数,某随机现象可能产生的全部样本函数的集合(也称总体):

$$\{x(t)\} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_N(t))$$

称为随机过程。

图 1-6 是汽车在水平柏油路上行驶时车架主梁上某点的应变时间历程。可以看到,在工况完全相同(车速、路面、驾驶条件等)的情况下,各时间历程的样本记录是完全不同的。这种信号就是随机信号。

随机过程可分为非平稳随机过程和平稳随机过程两类。所谓平稳随机过程,是指其统计特征参数不随时间 t_k 变化的随机过程。反之,则称为非平稳随机过程。在任意时刻 t_k 的统计参数计算采用总体平均的方法。所谓总体平均,就是将全部样本函数在某时刻之值 $x_i(t_k)$ 相加后再除以样本函数的个数,即:

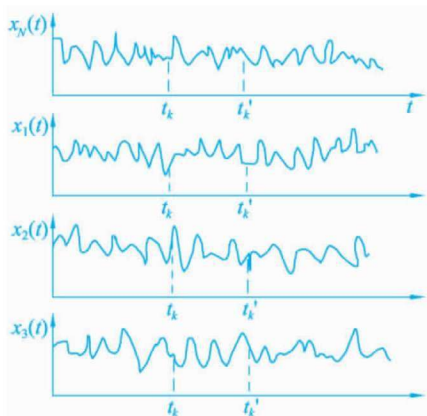


图 1-6 车架主梁上某点的应变时间历程

$$\mu_x(t_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_k) \quad (1-2)$$

与总体平均相区别,把按单个样本的时间历程进行平均的计算叫做时间平均。

在平稳随机过程中,若任意单个样本函数的时间平均统计特征等于该过程的集合平均统计特征,这样的平稳随机过程叫各态历经(又叫遍历性)随机过程,否则称为非各态历经随机过程。

最后需要指出的是,实际物理过程往往是很复杂的,既无理想的确定性,也无理想的非确定性,而是相互掺杂的。

1.2 周期信号的频谱分析

一 频谱分析的概念

直接观测或记录到的信号,一般是以时间为独立变量的,称其为信号的时域描述。信号时域描述反映信号幅值随时间变化的关系。

最简单的周期信号即简谐信号只含有一个频率成分,而一些复杂周期信号及非周期信号总可以利用一定的数学工具分解为有限或无限个不同频率的简谐信号的叠加。对于其中每个频率成分的幅值和相位信息的描述,称为对信号的频域描述,即频谱 $X(f)$ 或 $X(\omega)$ 。频域描述揭示了信号中所包含的频率结构和各频率成分的幅值、相位关系,从另一个角度来说明信号的特征,这些特征能帮助人们从测量结果中发现一些问题和解决问题。例如,图 1-7 是一受噪声干扰的多频率成分周期信号,从信号时域波形上很难判断其噪声来源,但从信号频域描述的功率谱上却可以判断并识别出信号中的 4 个周期分量 and 它们的大小,由此就可以判断噪声的来源。

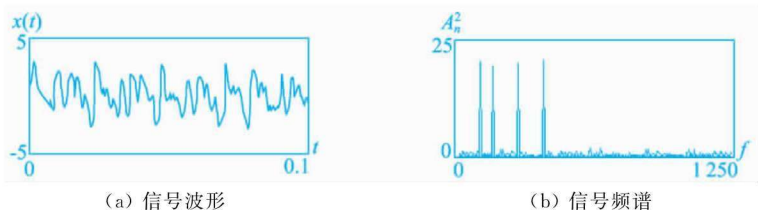


图 1-7 受噪声干扰的多频率成分周期信号波形和频谱

二 周期信号频谱的求取方法

周期信号是经过一定时间可以重复出现的信号。从数学分析已知,任何周期函数在满足狄里克利(Dirichlet)条件下,可以展开成正交函数线性组合的无穷级数,如果正交函数集是三角函数集 $(\sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t)$,则周期函数可被展开成为傅里叶级数:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$\text{直流分量幅值为: } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-4)$$

$$\text{各余弦分量幅值为: } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos 2\pi n f_0 t dt \quad (1-5)$$

$$\text{各正弦分量幅值为: } b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin 2\pi n f_0 t dt \quad (1-6)$$

利用三角函数的和差化积公式,周期信号的三角函数展开式还可以写为下面的形式:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-7)$$

$$\text{直流分量幅值为: } A_0 = a_0 \quad (1-8)$$

$$\text{各频率分量幅值为: } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1-9)$$

$$\text{各频率分量的相位为: } \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (1-10)$$

式中, T 为周期, $T = 2\pi/\omega_0$; ω_0 为基波圆频率; f_0 为基波频率; $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

工程上习惯将计算结果用图形方式表达,以 ω 为横坐标, A_n 或 φ_n 为纵坐标画图,则分别得到幅值和相位频谱;以 ω 为横坐标, A_n^2 为纵坐标画图,则得到功率谱。

【例 1-1】求图 1-8 所示周期方波的频谱。

【解】周期方波可表示为

$$\begin{cases} x(t) = x(t + nT) \\ x(t) = \begin{cases} -A & (-T/2 < t < 0) \\ A & (0 < t < T/2) \end{cases} \end{cases}$$

根据傅里叶级数三角函数展开公式,先求出 a_0 ,

a_n, b_n , 由于 $x(t)$ 为奇函数,所以

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 x(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -A \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} A \sin n\omega_0 t dt \right) \\ &= \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega_0 t dt = \frac{4A}{T} \frac{1}{n\omega_0} (-\cos n\omega_0 t \Big|_0^{T/2}) \\ &= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n} \frac{2\pi}{T} \left(1 - \cos n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

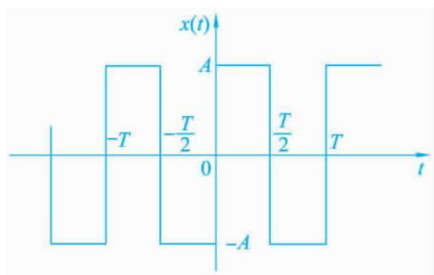


图 1-8 周期方波信号

有：

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

其幅值谱和相位谱如图 1-9 所示。

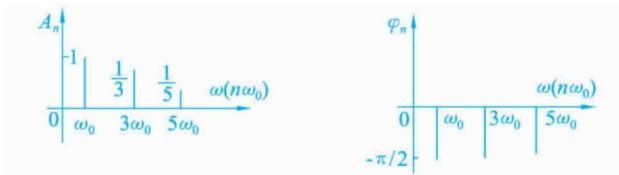


图 1-9 方波信号的幅值谱和相位谱

三 周期信号频谱的特点

频谱是构成信号各频率分量的集合，它完整地表示了信号的频率结构，即信号由哪些谐波组成、各谐波分量的幅值大小及初始相位，从而揭示了信号的频率信息。

对周期信号来说，信号的谱线只会出现在 $0, f_1, f_2, \dots, f_n$ 这些离散频率点上，这种频谱称为离散谱，且诸分量频率都是基波频率的整数倍，各频率分量的谱线高度表示该谐波的幅值和相位角。工程上常见的信号，其谐波幅值总的趋势是随谐波次数的增大而减小的。因此，周期信号频谱具有离散性、谐波型、收敛性 3 个特点。

四 周期信号傅里叶级数的复指数展开式

利用欧拉公式

$$\left. \begin{aligned} e^{\pm jn\omega_0 t} &= \cos n\omega_0 t \pm j \sin n\omega_0 t \\ \cos n\omega_0 t &= \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) \\ \sin n\omega_0 t &= j \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}) \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

式中： $j = \sqrt{-1}$ 。

将式(1-3) 改写为：

$$x(t) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (1-12)$$

对 $\frac{1}{2} (a_n + jb_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$

令 $m = -n (m = -1, -2, -3, \dots)$ ，又因 a_n 为关于 n 的偶函数， b_n 为关于 n 的奇函数，所以有：

$$\frac{1}{2} (a_n + jb_n) = \frac{1}{2} (a_{-m} + jb_{-m}) = \frac{1}{2} (a_m - jb_m) \quad (m = -1, -2, -3, \dots)$$

代入式(1-12)，得：

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_m - jb_m) e^{jm\omega_0 t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right]$$

将第 2 项和第 3 项合并,得:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$\text{令 } c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

代入 a_n 和 b_n 的表达式,可得:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (1-13)$$

$$\text{对式(1-13),当 } n = 0 \text{ 时, } c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0$$

故可将式(1-12)中 3 项合并为下式:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-14)$$

一般情况下 c_n 是复变函数,可以写成:

$$c_n = \text{Re}c_n + j\text{Im}c_n$$

或

$$c_n = |c_n| e^{j\varphi_n}$$

两种形式的关系为:

$$|c_n| = \sqrt{(\text{Re}c_n)^2 + (\text{Im}c_n)^2}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{\text{Im}c_n}{\text{Re}c_n}$$

在这里仍然将周期信号展开为正交函数线性组合的无穷级数,称为傅里叶级数的复指数函数展开式,每个频率分量为 $c_n e^{-jn\omega_0 t}$, $n\omega_0$ 为其频率, $|c_n|$ 为其幅值, φ_n 的辐角为其初相位。分别以 $|c_n|$ 和 φ_n 为纵坐标、以 ω 为横坐标作图,可得信号的幅频谱图和相频谱图;也可以分别以 c_n 的实部和虚部与频率的关系作图,得信号的实频谱图和虚频谱图。

比较傅里叶级数的两种展开形式可知:复指数函数形式的频谱为双边谱(ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$),三角函数形式的频谱为单边谱(ω 从 0 到 $+\infty$);两种频谱各谐波幅值在量值上有确定的关系,即 $|c_n| = \frac{1}{2} A_n$, $|c_0| = a_0$ 。双边幅频谱为偶函数,双边相频谱为奇函数。

【例 1-2】求图 1-8 所示周期方波的傅里叶级数的复指数函数形式,并画出 $|c_n| - \omega$ 和 $\varphi_n - \omega$ 图象。

【解】由例 1-1 中方波的时域描述,求 c_0 和 c_n :

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 -A e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{A}{jn\pi} (1 - \cos n\pi) \quad (n \neq 0)$$

$$= \begin{cases} 0 & (n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots) \\ -j \frac{2A}{n\pi} & (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \end{cases}$$

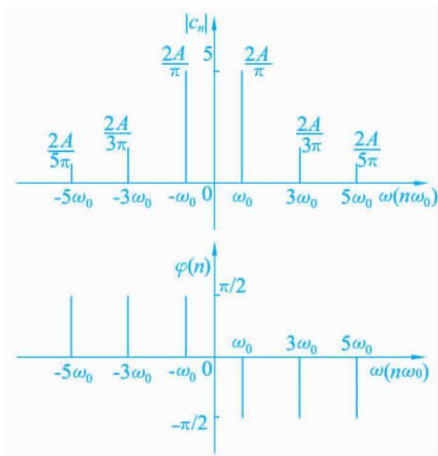


图 1-10 方波信号的双边幅值谱和相位谱

从而有：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-j \frac{2A}{n\pi} \right) e^{jn\omega_0 t} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

$$|c_n| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 c_n + \operatorname{Im}^2 c_n} = \frac{2A}{n\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{\operatorname{Im} c_n}{\operatorname{Re} c_n} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (n < 0) \end{cases}$$

其双边幅频谱和相位谱如图 1-10 所示。

1.3 瞬变非周期信号的频谱

非周期信号包括瞬变非周期信号和准周期信号，准周期信号的频谱也是离散谱，如前所述的非周期信号 $x(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$ 中包含两个频率分量。下面分析瞬变非周期信号频谱。

一 瞬变非周期信号频谱的求取方法

对瞬变非周期信号频谱的求取，采用傅里叶变换这个数学工具。严格地说，对 $x(t)$ 函数，其傅里叶变换存在的条件是：

- (1) $x(t)$ 满足狄里克利条件；
- (2) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ 收敛，即 $x(t)$ 绝对可积。

瞬变非周期信号是在时间上不会重复出现的信号或者只在一定时间内存在或者随着时间的增长而衰减至零，故绝对可积，满足傅里叶变换的条件。

对信号进行傅里叶变换，其表达式为：

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases} \quad (1-15)$$

在数学上，称 $X(\omega)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换， $x(t)$ 为 $X(\omega)$ 的傅里叶逆变换，两者互称为傅里叶变换对。

与周期信号相似，非周期信号也可以分解为许多不同频率分量的谐波和。所不同的是，由于非周期信号周期 $T \rightarrow \infty$ ，则频谱谱线的频率间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ ，基频 $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow d\omega$ ，包含的各频率分量的频率将由离散变化的 $n\omega_0$ 转换为连续变化的 ω ，即非周期信号包含从零到无穷大的所有频率分量。在傅里叶变换的表达式里，每个频率分量的谐波为 $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega e^{j\omega t}$ ， $e^{j\omega t}$ 因子表达该谐波分量的频率信息， $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega$ 的模为该谐波分量的幅值， $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d(\omega)$ 的辐角为该谐波分量的相位。因 $\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega$ 为一无穷小量，所以将其除以 $d\omega$ ，得