Mathematics

初中数学
思想方法导引

孙厚康 ◎著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

初中数学思想方法导引

孙厚康　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学思想方法导引/孙厚康著.—杭州:浙江大学出版社,2015.6
ISBN 978-7-308-14653-1

Ⅰ.①初… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①中学数学课—教学研究—初中 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第088455号

初中数学思想方法导引
孙厚康 著

责任编辑 伍秀芳(wxfwt@zju.edu.cn)
封面设计 春天书装
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 710mm×1000mm 1/16
印 张 11.25
字 数 155千
版 印 次 2015年6月第1版 2015年6月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-14653-1
定 价 19.80元

前　言

数学是人类文化的瑰宝,其应用不言而喻.著名数学家华罗庚曾说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,日月之繁,无处不用数学.”马克思甚至说过,一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量.总之,人类社会的发展离不开数学,这不仅指数学知识具有广泛的应用性,而且指精妙绝伦的数学思维和科学严谨的数学思想方法,对解决各种现实问题都具有无与伦比的意义.

像其他任何学科一样,数学的基本结构由数学的知识结构和观念系统两部分组成.组成数学知识结构的是一系列概念、定理、公式、法则,以及这些知识的彼此联系;组成其观念系统的则是数学思想方法和思维策略.后者以数学知识为载体,有机地蕴含在知识概括、法则推导、定理证明等数学探究活动之中.

初中数学的学习是数学学习的入门阶段,无论是所学的数学知识还是伴随这些知识的探究所体现的数学思想方法,都是作为现代公民所必须具有的基本素质.但是,人们往往片面重视数学知识的理解和记忆,轻视数学思想方法的领悟和积累,这是导致我们数学学习质量不高的严重问题.数学知识固然重要,数学思想方法更是引人入胜.有人形容数学是思维的体操,这样说一点也不过分.接受过数学思想良好熏陶的人,无论今后从事科学研究还是其他事业,都会变得思考周密、判断有据、处事灵活、规划合理、行为准确简捷.

怎样才能使我们更好地掌握数学的基本思想方法,从而提高我们的数学思维能力呢?

作为初中生,一是要积极参与课内讨论.无论是公式推演、定理证明,还是例题解答,都不要满足于接受结论,而要享受过程,品味问题解决过程中的思维策略,敢于提出自己的独立见解.课后除了消化知识,也要努力消化学到的思想方法.比如我们学了用配方法解一元二次方程,不但要记住配方法的步骤,还要思考配方法在解一元二次方程时起了什么作用.多次应用配方法后要进行归纳:配方法适用于怎样的问题情境?特别要关注老师所做的课时小结,那是课内探究活动基本策略的概括,是一堂课的精华.

二是在解题以后要勤于反思,特别对那些曾经遇到过困难的题,体会克服困难的过程.与同伴讨论所受到的启发,可以使你有所领悟,成为宝贵的经验,从而提高自己的学习能力.反思是为了吸取经验,触类旁通.反思和小结的过程,也是对自己成功的欣赏,从中获得做数学题的快乐.

三是要做到多想慎问,不要一遇到困难就问老师或同学,要有信心自己克服困难.回忆老师是如何处理类似问题的,或打开课本,从例题分析中找到启发,相信大部分困难是可以克服的.实在有跨不过的坎,才请教老师或同学,但要提高提问的质量,重在获得思考策略方面的启发.能力是在不断克服困难中逐渐形成和提升的,依赖多一分,能力低一分.

按照以上要求持之以恒地践行,我们掌握的数学思想方法将越来越丰富,运用将越来越自觉,数学学习能力也将越来越强.

本书是专为初中学生编写的,每介绍一种数学思想方法,都简明地阐述这种思想方法的特点和作用,并列举若干应用范例.多数范例包含“思考”、“解答”和“反思”三部分,有些则只提供思路,解答需要同学们动手操作,自己完成.每一章我们都为同学们提供少量练习,这是消化相应思想方法所必需的.真正掌握这些思想方法,还需要同学们在平时学习中不断实践,自觉运用.与一般的竞赛辅导用书不同,本书所选例题和练习,力求适应初中生的学习水平,降低阅读困难,目的是较好地体现对数学思想方法学习的导引

作用.

希望本书对同学们学习运用数学思想方法能起到一定的推动作用,有助于提高理解和应用水平,较好地掌握数学思想方法,能大大提高自己的学习能力.而且,只有掌握了基本的数学思想方法,才能真正减轻同学们的学习负担,取得更好的发展.希望更多有经验的数学教师和数学工作者为此编写更好的读物.

目 录

第1章 观 察

任何学科的学习和研究都重视观察,因此,观察是探究问题的一般方法,数学也不例外.同时,观察也是比较、类比、归纳的基础.善于观察不但是做数学研究的良好习惯,而且是一种基本的数学能力.大数学家欧拉(Euler)非常推崇观察能力.他说过,今天已知的许多数的性质,大部分是通过观察发现的.历史上许多大家,都是天才的观察家.1619年,丹麦天文学家布拉赫(Brahe)观察了当时发现的六大行星(水星、金星、地球、火星、木星、土星)围绕太阳公转的周期 P(单位:地球年)和这些行星的轨道半径 a(天文单位,即地球到太阳的平均距离),在整理这些杂乱无章数据的过程中发现:$a^3=P^2$,这是一个著名的成功观察范例.

解决一个问题,善于观察的人,能从题设中发现许多信息,掌握的信息越多,思路就越宽广.反之,一些同学遇到困难常常束手无策,就是因为观察缺乏深度.

例1.1 (杭州2011中考)在等腰 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=1$,过 C 作直线 $l/\!/AB$,F 是 l 上的一点,且 $AB=AF$,则点 F 到直线 BC 的距离为________.

思考:一个几何题,没有图,光凭想象不容易获得关键的信息,因此要根据题意,画出图形,如图1-1(a),条件就比较直观,有助于观察.但是有了图,

不同水平的同学观察的深度就很不相同.有些同学的观察局限于等腰直角三角形形状、直角边长、平行线以及 $AB=AF$ 等孤立的条件,不善于把相关条件联系起来,去发现图形中隐藏着的信息,那么解题就一筹莫展;另一些同学的观察稍深入一些,发现表示距离的线段 $EF/\!/AC$,想到通过夹在它们之间的一对相似三角形来计算 EF 的长,但是这对三角形只有一条已知线段 $AC=1$ 可以利用,另一条线段 AF 被 BC 切断,仍然不得要领;还有一些同学发现还有一对相似三角形$\triangle CEF\backsim\triangle BCA$,即使经过计算可以求出 EF 的长,但是过程也过于复杂,难以做到.以上这些同学显然忽视了 $AB=AF$ 这个看似普通的条件,它隐藏着许多有用信息:

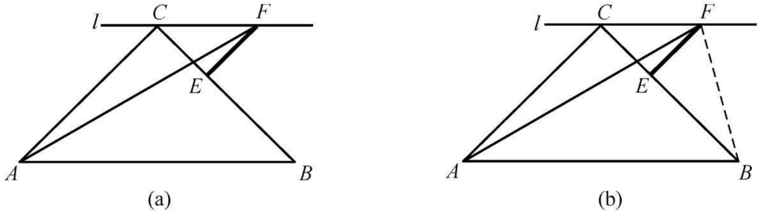

图 1-1

如图 1-1(b),由"等腰直角三角形的斜边等于斜边上高的 2 倍"出发联想,发现$\angle FAB=30°$;

由$\angle FAB=30°$想到$\angle CBF=75°-45°=30°$;

由$\angle FCE=45°$和$\angle CBF=30°$,线段 CE 和 BE 都可以用 EF 的代数式来表示.

有了这些信息,思路便畅通无阻:设 $EF=x$,则 $CE=x$,$BE=\sqrt{3}x$,于是

$$x+\sqrt{3}x=1,\quad x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

本题当然还有其他许多信息,导致求解的不同思路.在这道题中,"且 $AB=AF$"比起题设中的其他条件来,作用于我们大脑的是"弱刺激",独立解题时,这类信息常常被我们忽视,而恰恰是这些"弱刺激"传递着重要信息,

可见观察要入微.能观察到关键信息,思路便豁然开朗,便能避繁就简,少走许多弯路.毫不夸张地说,观察是解决问题的基础工程,这也是我们希望同学们努力提高观察能力的目的.

那么,怎样才能提高观察能力呢?

(1)培养良好的数感

随着数的概念不断扩充,以及运算逐渐熟练,我们要努力提升对数的敏感性,发现解决问题的合理方法.

例1.2 方程 $x+\sqrt{x+3}=-1$ 的整数解是______.

思考:熟知二次根式非负,二次根式的被开方数非负的同学,立刻发现方程中 $-3\leqslant x\leqslant -1$,即 x 可取值 $-3,-2,-1$.经验算,得到这个方程的解是 $x=-2$,无须方程变形.

例1.3 你能在短时间内得到 $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$ 的结果吗?

这道题来自俄国画家波洛丹诺夫的名画《难题》:一群孩子盯着黑板上的这道口算题冥思苦想.

思考:对20以内自然数的平方数熟悉的同学,联系分母365,敏锐地发现:

$365=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$,

得到结果为2还会困难吗?!

例1.4 设 $0<a<1$,$0<b<1$,则下列各式中,最大的是( ).

A.$a+b$ B.$2\sqrt{ab}$ C.a^2+b^2 D.$2ab$

思考:观察题设,你至少能看出 $a^2<a<\sqrt{a}$ 和 $ab<a$,$ab<b$,$2ab=ab+ab<a+b$ 等,良好的数感使我们立刻排除选项C,D.只剩下比较 $a+b$ 和

$2\sqrt{ab}$谁大谁小，用特殊值 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 验证，帮助观察，立刻得到正确选项A．可见数感对观察的重要性．

例 1.5 计算：$\frac{2\sqrt{5}+5}{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}+\sqrt{\frac{5}{2}}$．

思考：和式的第一项比较复杂，与其匆忙分母有理化，不如看看它有什么特殊之处．原来，分子和分母有公因式 $2+\sqrt{5}$，这是观察得到的．于是简便解法就产生了：

原式$=\frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{5})}{\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}+\sqrt{\frac{5}{2}}=2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$．

(2)提高对数和形的基本结构的认识和理解

数和式的基本结构，是指最基本的公式、方程、函数和不等式，比如例1.4中，看到 $a+b$ 和 $2\sqrt{ab}$，就能自觉地把它们的差与 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 相联系，乘法公式就是基本结构；而形的基本结构就是通常所说的基本图形．熟悉基本图形的同学，就比较善于在复杂图形中发现基本图形，或发现组成基本图形的要素，适当添线补形．

例 1.6 画半径为1的⊙O的两条互相垂直的直径 AB，CD，P是⊙O上任意一点，过 P 画这两条直径的垂线，E，F 为垂足，则线段 EF 的长等于______．

思考：不用画图就能感知四边形 $PEOF$ 是矩形，EF 是对角线，矩形对角线相等，因此 $EF=OP=1$．

这个题还可以修改成直径 AB，CD 的夹角为60°，如图1-2，连接 OP，要是熟知“直角三角形的斜边是外接圆直径”这样的图形特征，就能发现四边形

$PEOF$内接于直径为1的圆，EF就是这个圆的60°圆周角所对的弦，$EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

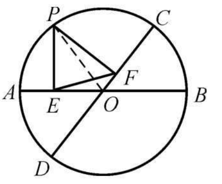

图 1-2

例 1.7 计算：$\left(a-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

思考：善于观察的同学能立刻把原式写成$\left[\left(a-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\right]\left[\left(a-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]$，创造运用乘法公式的条件.

例 1.8 已知$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=14$，求$n$的值.

思考：这种方程虽然没有见过，但我们应该发现等式左边两项互为倒数：$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=1$，对于数式结构的这种敏锐直觉是解决问题的关键.于是等式左边两个代数式就分别是方程$x^2-14x+1=0$的两根：$7\pm4\sqrt{3}$.若$(2+\sqrt{3})^n=7+4\sqrt{3}$，则$n=2$；若$(2+\sqrt{3})^n=7-4\sqrt{3}$，则$n=-2$.

所以$n=\pm2$.

(3)养成利用特殊情形诱发猜想的观察习惯

在一些比较复杂的问题情境中，需要用运动的观点进行观察，把情境简单化，比较容易猜想到结果，有助于我们发现解决问题的思路.

例 1.9 如图1-3，正方形$ABCD$的边长为1，点E，F分别在边CD和BC上，$\triangle CEF$的周长为2，求$\angle EAF$.

思考：题设很难利用，我们不妨让点E，F运动起来，使F运动到B，这时$CF=CB=1$.因为

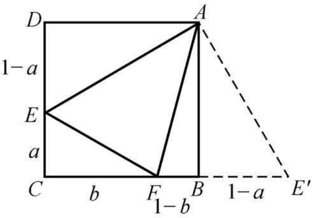

图 1-3

$\triangle CEF$的周长为2,所以点E只能与点C重合,这时$CE=0$,$EF=BC=1$.虽然点C,E,F不再是三角形的顶点,但题设的数量关系成立.此时,$\angle EAF=\angle CAB=45^\circ$.我们猜想在一般情形中,仍有$\angle EAF=45^\circ$,推理的方向明确.下面我们来给出证明:

把$\triangle ADE$绕点A逆时针旋转90°,得$\triangle ABE'$.

由$\angle ABE'=\angle D=\angle ABC=90^\circ$,所以点$E'$在$CB$的延长线上.

设$CE=a$,$CF=b$.因为$EF+a+b=2$,得$EF=2-a-b$,而$FB=1-b$,$BE'=DE=1-a$,所以$FE'=2-a-b$,即$EF=E'F$.又由于$AE=AE'$,$AF=AF$,所以$\triangle AEF\cong\triangle AE'F$,$AF$平分$\angle EAE'$,而$\angle EAE'=90^\circ$,所以$\angle EAF=45^\circ$.

例1.10 如图1-4,AD是$\triangle ABC$的高线,P是AD上的一点.若$AB>AC$,请比较$AB-AC$与$PB-PC$的大小,并说明理由.

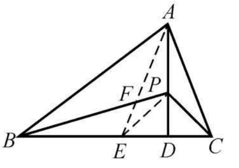

图1-4

思考:善于用运动观点进行观察的同学一定会设法改变其中一些线段的位置,这只需把$\triangle ACD$沿高线AD反射,如图1-4.同时$AB-AC$与$PB-PC$也动一下,改成比较$AB+PC$与$AC+PB$的大小.这种思路的产生只能借助对图形进行动态观察.

证明:把$\triangle ADC$沿高AD所在直线翻折,得$\triangle ADE$,因$AB>AC$,所以点E在BD上.连接PE,则$AE=AC$,$PE=PC$.并记AE与PB交于点F.

由$AF+BF>AB$,$FE+FP>PE$,

得$(AF+FE)+(BF+FP)>AB+PE$,

即$AE+PB>AB+PE$,也即$AC+PB>AB+PC$.

移项,得$PB-PC>AB-AC$.

(4)养成通过动手操作进行观察的良好习惯

做数学研究必须动手操作,观察是一步步揭示对象特征的动态过程,必须在动手操作中逐渐深化,而不是静止地冥思苦想.

例 1.11 容积为1升的容器盛满纯酒精,倒出 $\frac{1}{2}$ 升后用水加满;第二次倒出混合液 $\frac{1}{3}$ 升,又用水加满;第三次倒出混合液 $\frac{1}{4}$ 升,又用水加满;这样继续操作,第 n 次倒出混合液 $\frac{1}{n+1}$ 升后,容器中还有多少纯酒精?

思考:每次操作后容器内含多少纯酒精,动笔算一算,才能使观察有直观的基础.

原有纯酒精 $a_0=1$ 升;

第一次倒出 $\frac{1}{2}$ 升,用水加满,容器内有纯酒精 $a_1=\frac{1}{2}$ 升;

第二次倒出 $\frac{1}{3}$ 升,剩下混合液 $\left(1-\frac{1}{3}\right)$ 升,容器内有纯酒精 $a_2=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}$ 升 $=\frac{1}{3}$ 升;

第三次倒出 $\frac{1}{4}$ 升,剩下混合液 $\left(1-\frac{1}{4}\right)$ 升,容器内有纯酒精 $a_3=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}$ 升 $=\frac{1}{4}$ 升;

……

第 n 次倒出 $\frac{1}{n+1}$ 升后,容器中剩下混合液含有纯酒精 $a_n=\frac{1}{n+1}$ 升.

综上所述,数学的观察对象是数、式、图形以及它们之间的关系,观察的深度取决于对数、式和图形性质的理解深度和应用水平.只有理解了的、经

常应用的东西,才能在观察时引起联想.

练习1

1.(苏州2011中考)如图1-5,在四边形$ABCD$中,E,F分别是AB,AD的中点,$EF=2$,$BC=5$,$CD=3$,则$\tan C=$______.

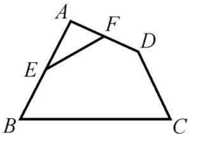

图1-5

2.(南京2011中考)以O为圆心,任意长为半径画弧,与射线OM交于点A,再以点A为圆心,AO为半径画弧,两弧交于点B,画射线OB,如图1-6,则$\cos\angle AOB$的值等于______.

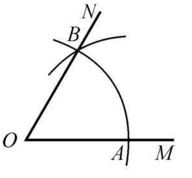

图1-6

3.(上海2011中考)已知:如图1-7,AD, BE是$\triangle ABC$的两条高线,M是AB的中点,连接ME,MD,ED.

(1)找出图中所有等腰三角形,并证明;

(2)求证:$\angle EMD=2\angle DAC$.

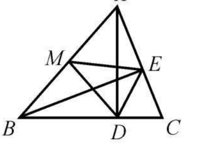

图1-7

4.代数式 $\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$ 的最小值等于________.

5.设 m,n 是正整数,且 $m<n$,夹在 m,n 之间(不含 m,n)所有以3为分母的最简分数的和记作 $S(m,n)$,例如 $S(1,4)=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}$.求 $S(m,n)$的表达式.

6.观察某商场2010年的月销售额统计图(图1-8),读出销售额的众数和中位数.

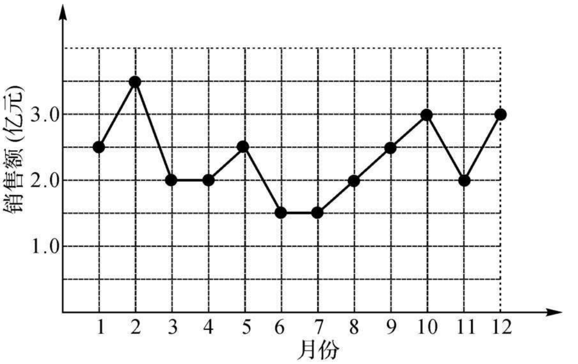

图1-8

7.如图 1-9,$AB=AC$,点 D 在 BC 上,$\angle EDF$ 的两边与 AB,AC 分别相交于点 E,F,且 $BD=CF$,$BE=DC$.找出图中与 $\angle EDF$ 相等的角.设 $\angle EDF$ 的度数为 m,求 $\angle A$ 的度数.

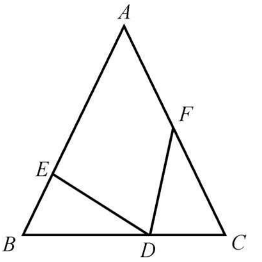

图 1-9

8.观察图 1-10,你能求出自然数中前 n 个奇数的和吗?

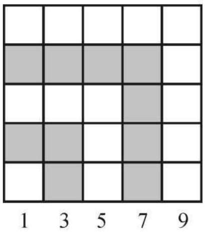

图 1-10