高等数学学习指导书

段五朵 熊小峰 主编

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导书/段五朵,熊小峰主编. —南昌:江西高校出版社,2011.8

ISBN 978-7-5493-0384-7

Ⅰ.①高... Ⅱ.①段... ②熊... Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 167075 号

出版发行	江西高校出版社
社址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8513417
网址	www.juacp.com
印刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照排	江西太元科技有限公司照排部
经销	各地新华书店
开本	787mm×960mm 1/16
印张	22
字数	395 千字
版次	2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印数	1~11400 册
书号	ISBN 978-7-5493-0384-7
定价	28.2 元

赣版权登字-07-2011-203

内 容 简 介

本书主要内容包括一元函数微积分和多元函数微积分、向量代数和空间解析几何、无穷级数、微分方程等内容。书中每章分三部分：内容提要、例题分析和目标测试题（附参考答案）。通过对400多道典型例题进行分析和求解，揭示了高等数学的解题方法和技巧。

本书是高等学校理工科和经济管理学科等有关专业学生学习高等数学课程的学习指导书，也可作为考研及大学生数学竞赛的复习参考资料，并可供大专院校数学教师及其他有关人员作参考。

前　言

高等数学是高等院校理工科、经济、管理学科等门类各专业学生必修的一门重要基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。它既是其他数学课程的基础,也是力学、物理学、经济学等各专业课程的重要工具。

本书是按照“高等数学课程教学基本要求”,结合“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写而成的,它包括一元函数微积分和多元函数微积分、向量代数和空间解析几何、无穷级数、微分方程等内容。书中每章分三部分:内容提要、例题分析和目标测试题(附参考答案)。通过对400多道典型例题进行分析和求解,揭示了高等数学的解题方法和技巧。每章的目标测试题,作为自我检查之用。我们在编写本书时,力求内容完善、例题丰富、题型全面。相当一部分例题选自全国研究生入学考试数学试题。本书侧重于提高解题能力,所提供的解题方法编者都经过反复推敲,希望通过典型例题的求解,启发读者的解题思路,以达到举一反三的效果。全书共分十二章,由江西理工大学熊小峰、赖新兴、黄江燕、罗淑珍和南昌大学段五朵、董秋仙、高文明编写,段五朵、熊小峰对全书进行统稿。本书是高等学校理工科和经济管理学科等有关专业学生学习高等数学课程的学习指导书,也可作为考研及大学生数学竞赛的复习参考资料,并可供大专院校数学教师及其他有关人员作参考。

由于编者水平有限,书中缺点错误在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

内容提要

例题分析

目标测试题

第二章　导数与微分

内容提要

例题分析

目标测试题

第三章　中值定理与导数应用

内容提要

例题分析

目标测试题

第四章　不定积分

内容提要

例题分析

目标测试题

第五章　定积分

内容提要

例题分析

目标测试题

第六章　定积分的应用

内容提要

例题分析

目标测试题

第七章　向量代数与空间解析几何

内容提要

例题分析

目标测试题

第八章　多元函数微分法及其应用

内容提要

例题分析

目标测试题

第九章　重积分

内容提要

例题分析

目标测试题

第十章　曲线积分与曲面积分

内容提要

例题分析

目标测试题

第十一章　无穷级数

内容提要

例题分析

目标测试题

第十二章　常微分方程

内容提要

例题分析

目标测试题

目标测试题参考答案

第一章

函数、极限、连续

内容提要

● 基本概念

函数的定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果当变量 x 在 D 上任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，叫做因变量. 记号 f 表示从变量 x 到变量 y 的对应关系.

单调性 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时恒有 $f(x)<f(y)$（或恒有 $f(x)>f(y)$），则称 $f(x)$ 为在区间 I 上单调增加（或单调减少）的函数. 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.（i）若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.（ii）若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

周期性 设函数 $f(x)$ 以 D 为定义域，若存在正常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 为 $f(x)$ 的一个周期.

有界性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义. 若存在常数 B，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant B$（或有 $f(x)\geqslant B$），则称 $f(x)$ 在 D 上有上界（或有下界），且称 B 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界（或下界）. 若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在集合 D 上有界；否则 $f(x)$ 称在集合 D 上无界.

复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 W_φ. 若 $W_\varphi \cap D_f \neq \Phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数. 其中 x 是自变量，y 是因变量，而 u 称为中间变量.

分段函数　如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则称该函数为分段函数.

初等函数　由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

数列极限定义　若对任意给定的 $\varepsilon>0$，均存在正整数 $N(\varepsilon)>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限定义　(i) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，均存在着 $X(\varepsilon)>0$，当 $|x|>X$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$. (ii) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，均存在着 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左、右极限的定义　(i) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在着 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或称左极限 $f(x_0^-)=A$. (ii) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在着 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或称右极限 $f(x_0^+)=A$.

无穷小　以 0 为极限的变量称为无穷小.

无穷大　在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大. (i) 若对任意给定的 $M>0$，总存在着 $X>0$，当 $|x|>X$ 时恒有 $|f(x)|>M$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. (ii) 若对任意给定的 $M>0$，总存在着 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>M$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

无穷小的比较　设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}a(x)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等阶无穷小，记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(5) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C(C \neq 0)$，$k > 0$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

常用的等价无穷小　当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$a^x - 1 \sim x\ln a$，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(\alpha \neq 0)$.

函数连续性定义 1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义. 给 x 在 x_0 处以增量 Δx，相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若 $\lim\limits_{\Delta \to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

函数连续性定义 2　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

函数间断点定义　若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，且出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} y(x)$ 存在但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点的类型

第一类间断点: $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 均存在，且 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$，则 $x = x_0$ 称为 $f(x)$ 的可去间断点.

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$，则 $x = x_0$ 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第二类间断点: $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在.

若 $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 中有一个为 ∞，则 $x = x_0$ 称为无穷间断点.

● 主要定理、公式、基本方法

定理 1　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$.

定理 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 （保号性定理）若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, A > 0$（或$A < 0$），则存在$\delta > 0$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时，$f(x) > 0$（或$f(x) < 0$）.（数列极限也有类似的保号性定理）

定理 4 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且在$x_0$的某去心邻域内$f(x) \geqslant 0$（或$f(x) \leqslant 0$），则$A \geqslant 0$（或$A \leqslant 0$）.（数列极限也有类似的定理）

定理 5 单调有界数列必有极限.

定理 6 （夹逼准则）设在x_0的某去心邻域内恒有$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$，且$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.（数列极限也有类似的夹逼准则）

定理 7 无穷小的运算性质：

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小；

(3) 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

定理 8 （无穷小与无穷大的关系定理）在自变量的同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小；非"0"的无穷小之倒数为无穷大.

定理 9 极限的运算法则（数列极限也有相应的极限运算法则）：

设$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = B$，则

(1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$.

定理 10 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 11 初等函数在其定义区间内都是连续的.

定理 12 （最大值和最小值定理）在闭区间上连续的函数必有最大值和最小值.

定理 13 （有界性定理）在闭区间上连续的函数，在该区间上一定有界.

定理 14 （介值定理）设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且在这区间的两个端点处取不同的函数值$f(a) = A$及$f(b) = B$，那么，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi) = C$.

定理 15 （零点定理）设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，那么函数$f(x)$在开区间(a, b)内至少有一个零点，即至少有一点$\xi \in$

(a,b) 使 $f(\xi) = 0$.

重要公式

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

该公式的特点是:

(1) $\dfrac{0}{0}$ 型未定式;

(2) 求极限的函数形为$\dfrac{\sin}{\quad}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$.

该极限的特点是:

(1) 1^{∞} 型未定式;

(2) 求极限的函数形为

例题分析

例 1 求函数 $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 7x - 2} + \ln\sin\dfrac{\pi}{x}$ 的定义域.

解 为使 $\sqrt{-3x^2 + 7x - 2}$ 有意义,须 $-3x^2 + 7x - 2 \geqslant 0$,即

$$\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant x.$$

为使 $\ln\sin\dfrac{\pi}{x}$ 有意义,须 $\sin\dfrac{\pi}{x} > 0$,即

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k + 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $k = 9$ 时,$0 < \dfrac{1}{x} < 1$,即 $x > 1$;

当 $k \neq 0$ 时,$\dfrac{1}{2k + 1} < x < \dfrac{1}{2k}(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

因此,必须满足

$$\begin{cases}\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2 \\ x > 1\end{cases}, \text{或} \begin{cases}\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)\end{cases}$$

故所求定义域为$(\frac{1}{3},\frac{1}{2}) \cap (1,2]$.

例 2 设$f(x) = \ln(3-x) + \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}$,求$g(x) = f(x+a) + f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

解 当$3-x>0$且$49-x^2>0$时,$f(x)$有意义. 即$f(x)$的定义域为$(-7,3)$.

为使$g(x)$有意义,x须满足$\begin{cases}-7 < x+a < 3, \\ -7 < x-a < 3.\end{cases}$

即 $$x \in (-7-a, 3-a) \text{ 且 } x \in (-7+a, 3+a).$$

由$a>0$知,当$-7+a<3-a$,即$0<a<5$时,$g(x)$的定义域为$(-7+a,3-a)$;当$-7+a \geqslant 3-a$,即$a \geqslant 5$时,$g(x)$无定义.

例 3 设$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,求$f(x+1)$,$f(\frac{1}{x})$.

解 $$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}, x \neq -2.$$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 0.$$

例 4 设$f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}\,(x \neq 0)$,求$f(x)$.

解 令$t = \frac{1}{x}$,则$x = \frac{1}{t}$.

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+(\frac{1}{t})^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|},$$

所以 $$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}, x \neq 0.$$

例 5 设$f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$,其中$x \neq 0$,$x \neq 1$,求$f(x)$.

解 令 $t=\frac{x-1}{x}$,则 $x=\frac{1}{1-t}$. 将 $x=\frac{1}{1-t}$ 代入原方程得:

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},$$

即
$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x}. \tag{1}$$

再令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$,即 $x=\frac{1}{1-u}$,代入(1)式得:

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},$$

即
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}. \tag{2}$$

由原方程、(1)式、(2)式得:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

例 6 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得 $x\leqslant 0$,

所以
$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},x\leqslant 0.$$

例 7 设 $f(x)$ 对一切实数 x,y 满足等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$,且 $f(0)\neq 0$,$f(1)=a$.

证明:

(1) $f(0)=1$;

(2) 对一切自然数 n,有 $f(n)=a^n$.

证 (1) 令 $x=y=0$,则 $f(0)=[f(0)^2]$,因 $f(0)\neq 0$,故 $f(0)=1$.

(2) 用第一数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时,$f(1)=a=a^1$,等式成立;

② 设当 $n=k$ 时等式成立,即 $f(k)=a^k$. 则当 $n=k+1$ 时,

$$f(k+1)=f(k)f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由第一数学归纳法知,对一切自然数 n,均有 $f(n)=a^n$.

例 8 研究下列函数的有界性:

(1) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$;　　　　(2) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

解　(1) 显然$f(x)>0$,且$1+x^2\geqslant 1$.

又　$1+x^2\leqslant(1+x^2)^2\leqslant(1+x^2)^2+(1-x^2)^2=2(1+x^4)$.

所以
$$0<\frac{1+x^2}{1+x^4}\leqslant 2.$$

故$f(x)$在其定义域上有界.

(2) 因为$1-2|x|+x^2\geqslant 0$,所以$\dfrac{2|x|}{1+x^2}$即$\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$. 故$g(x)$在其定义域上有界.

例 9　证明:$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$[0,+\infty)$上是单调增加的,并由此证明不等式
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证　任给x_1及x_2且满足$0\leqslant x_1<x_2<+\infty$. 因为
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0,$$
所以
$$f(x_2)>f(x_1).$$
即$f(x)$在$[0,+\infty)$上是单调增加的.

取$x_1=|a+b|$,$x_2=|a|+|b|$,显然$0\leqslant x_1\leqslant x_2$,从而$f(x_1)\leqslant f(x_2)$,仅当$x_1=x_2$时等号成立.

因此
$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

例 10　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, $-1<x<1$;

(2) $g(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$.

解　(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$$= \frac{1-e^x}{1+e^x}\left(-\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$$
$$= \frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $g(-x) = (2+\sqrt{3})^{-x} + (2-\sqrt{3})^{-x}$

$$= \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$$
$$= (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x$$
$$= g(x)$$

所以 $g(x)$ 是偶函数

例 11 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且 $|a| \neq |b|$,证明:$f(x)$ 是奇函数.

证 所给等式中的 x 换为 $\frac{1}{x}$,得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx. \tag{1}$$

若 $a=0$,则 $f(x) = \frac{c}{b}x$,这显然是奇函数.

若 $a \neq 0$,则由(1)式得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{a}[cx - bf(x)],$$

将其代入原等式,解得

$$f(x) = \frac{c\left(\frac{a}{x} - bx\right)}{a^2-b^2}.$$

因为 $f(-x) = \frac{c\left(-\frac{a}{x}+bx\right)}{a^2-b^2} = \frac{c\left(\frac{a}{x}-bx\right.}{a^2-b^2)} = -f(x)$,所以此时 $f(x)$ 也为奇函数.

例 12 若 $f(x)$ 对其定义域上的一切 x,恒有

$$f(x) = f(2a-x),$$

则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明:若 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$,则 $f(x)$

是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证 由于 $f(x)$ 是对称于 $x=a$ 及 $x=b$,故有

$$f(x)=f(2a-x), \tag{1}$$

$$f(x)=f(2b-x), \tag{2}$$

在(2)式中,把 x 换为 $2a-x$,得

$$f(2a-x)=f[x+2(b-a)].$$

再将上式代入(1)式即有

$$f(x)=f[x+2(b-a)]$$

所以 $f(x)$ 以 $T=2(b-a)$ 为周期.

例 13 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$,且存在正数 k 和 T,使 $f(x+T)=kf(x)$ 对一切 x 都成立. 证明:存在正数 a 及以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$,使 $f(x)=a^x\varphi(x)$.

证 对任意的 $a>0$,有 $a^x>0$,$\dfrac{f(x)}{a^x}$ 有意义.

令
$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{a^x},$$

则
$$\varphi(x+T)=\frac{f(x+T)}{a^{x+T}}=\frac{kf(x)}{a^x\cdot a^T}=\frac{k}{a^T}\varphi(x).$$

取 $a=k^{\frac{1}{T}}$,有 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$,从而 $f(x)=a^x\varphi(x)$,命题得证.

例 14 求函数 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 的反函数,并求出反函数的定义域.

解 由 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 解得 $e^x=\dfrac{y}{1-y}$,即 $x=\ln\dfrac{y}{1-y}$,故所求反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

再由 $\dfrac{x}{1-x}>0$,得 $0<x<1$,故反函数 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$ 的定义域为.

例 15 求由 $y=\begin{cases}3u & u\leqslant 0\\ 0 & u>0\end{cases}$ 及 $u=x^2-1$ 复合而成的复合函数.

解
$$\begin{aligned}y&=\begin{cases}3(x^2-1) & x^2-1\leqslant 0,\\ 0, & x^2-1>0\end{cases}\\ &=\begin{cases}3(x^2-1) & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}\end{aligned}$$