高等数学

典型题分析解集

（上册）

符丽珍　刘克轩
王雪芳　杨月茜　编

西北工业大学出版社

高等数学典型题分析解集

（上　册）

符丽珍　刘克轩
王雪芳　杨月茜　编

西北工业大学出版社

高等数学典型题分析解集

（下　册）

符丽珍　刘克轩
王雪芳　杨月茜　编

西北工业大学出版社

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书主要内容是从现行的高等数学教材及历年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中精选出来的典型题，并进行了解证，阐述了高等数学的解题方法、解题规律和技巧。

本书可作为高等院校理工科和经济学科本科生学习高等数学课程的学习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

本书选材和内容编排适宜与同济大学数学教研室主编《高等数学》（上、下册）第4版（高等教育出版社）配套使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学典型题分析解集/符丽珍等编．—西安：西北工业大学出版社，2000.8
ISBN 7-5612-1250-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．符…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 25315 号

*

（邮编：710072　西安市友谊西路 127 号　电话：8491147）
全国各地新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装

*

开本：850 毫米×1 168 毫米　1/32　　印张：19.875　字数：489 千字
2000 年 8 月第 1 版　　　2000 年 10 月第 2 次印刷
印数：5 001—13 000 册　定价（上、下册）：22.00 元，本册定价：10.00 元

前　　言

高等数学是变量数学，它是研究运动、无限过程、高维空间和多因素作用的科学。高等数学课程是理工科院校本、专科的一门非常重要的基础课，它不仅是学习其它课程的基础，而且也是各学科领域中进行科学研究必备的数学工具。

为了更好地帮助广大学生学好高等数学这门课程，我们根据多年的教学经验编写了这本典型题分析解集。

本书是根据高等数学课程教学大纲要求分章编写，每章的内容分为：一、内容提要；二、典型题分析；三、练习题及习题答案或提示。编写的重点放在典型题分析这一部分。通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。这样，有助于学生对高等数学基本概念、基本理论的理解，使各章节知识在头脑中形成知识网，进而提高逻辑推理能力、抽象思维能力、空间想象能力和分析问题与综合运用所学知识解决问题的能力，以达到提高创造能力、全面增强数学素质的目的。

本书可作为高等理工科、经济学科院校学生学习高等数学课程的参考书，也可作为有志报考硕士研究生的考生作为强化训练指导书。

本书共分为上、下两册，上册是一元函数微积分、空间解析几何与向量代数；下册是多元函数微积分、级数和微分方程。全书共十二章，分别由符丽珍（编写第一章至第四章）、刘克轩（编写第五至第七章）、王雪芳（编写第八章至第十章）、杨月茜（编写第十一章和十二章）分工执笔编写，由符丽珍同志联系统稿。西北工业大学

应用数学系的有关老师对本书的编写给予了大力支持和帮助，在此，谨致谢忱。

由于水平有限，书中疏漏不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000 年 4 月

目　　录

上　　册

下　　册

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

（一）函数概念

1. 函数的两要素

函数的两个要素是定义域和对应法则. 定义域是自变量和因变量能相互联系构成函数关系的条件；对应法则是正确理解函数概念的关键. 两个函数当且仅当其定义域和对应法则完全相同时才表示同一函数.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性　$f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使得对于一切 $x \in X$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

所谓 $f(x)$ 有界，一定要指出 x 的一个变化范围. 例如，问 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有界吗？就没有意义. 当 $x \in [1,+\infty)$ 时有界，$|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$；当 $x \in (0,1)$ 时就无界.

$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

(2) 单调性　$f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增；当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上

单调减.

$f(x)$ 的单调性与所讨论的区间有关.

（3）奇偶性　$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x \in D$，则必 $-x \in D$）. 如果对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，偶函数的图形关于 y 轴对称；如对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，奇函数的图形关于原点对称，并有 $f(0) = 0$.

函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数无奇偶性可言.

（4）周期性　$f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期.

通常所说的周期是指最小正周期. 但不是任何周期函数都有最小正周期.

3. 基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

分段函数往往不是初等函数，因为有的分段函数不能用一个数学式子来表示. 但不能说分段函数都不是初等函数.

（二）数列极限

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 收敛数列的性质

(1) 若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限惟一.

(2) 若数列$\{x_n\}$有极限,则数列$\{x_n\}$有界.

其逆不成立,有界数列不一定有极限.

(3) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛于a.

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,$a<b$,则存在一个正整数$N$,当$n>N$时,$x_n<y_n$.

(5) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且存在正整数$N$,当$n>N$时,恒有$x_n\leqslant y_n$,则$a\leqslant b$.

3. 数列收敛性的判别定理

定理 1(夹逼定理)　若存在正整数N,当$n>N$时,恒有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

定理 2　单调有界数列必有极限.

(三) 函数极限

1. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ X>0$,当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

由该定义可知,当$x\to x_0$时$f(x)$是否有极限,与$f(x)$在x_0处有无定义无关.

2. 左极限、右极限

左极限$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,当

$0 < x_0 - x < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$$

常用该定理判断分段函数在分界点处是否有极限.

3. 极限的局部保号性

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域,当 x 在该邻域内时,就有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

(四)无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

以零为极限的变量称为无穷小量.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时恒有 $|x_n| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ X > 0$,当 $|x| > X$ 时恒有 $|f(x)| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \varepsilon$.

无穷小量不是绝对值很小很小的定数.零是可以作为无穷小量的惟一的常数.

2. 无穷小的阶

设 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小,记作 } \beta = o(\alpha). \\ \infty, & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小.} \\ c \neq 0, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小.} \\ 1, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小,记作 } \alpha \sim \beta. \end{cases}$$

显然等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$,称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

3. 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的和仍为无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

(3) 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

几个常用的有界函数:当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,$|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $|\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\mathrm{arccot}\, x| \leqslant \pi$.

(4) 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,反之无穷大的倒数为无穷小.

(5) 若 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 都是无穷小,且 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$,则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$,即在极限的运算过程中,乘除因子可用其等价的无穷小来代替.

注意:(1),(2) 中的"有限"二个字不可少,否则结论不成立.

4. 常用的等价无穷小与常见的极限

(1) 当 $x \to 0$ 时,常用的等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{x}{n}, \quad (1-ax)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{a}{n}x$$

(2) 常见的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arccot}\, x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{arccot}\, x = \pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n = m \\ 0, & 当 n > m \\ \infty, & 当 n < m \end{cases}$$

其中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数.

5. 无穷大

无穷大量是绝对值无限增大的一类特殊变量.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时恒有 $|x_n| > M$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists\ X > 0$，当 $|x| > X$ 时恒有 $|f(x)| > M$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists\ \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > M$.

无穷大量绝不是什么绝对值很大很大的定数. 无穷大量实质上是变量极限不存在的一种形式. 无穷大量与无界函数既有联系，又有区别. 无穷大量肯定是无界函数，但无界函数不一定是无穷大量.

(五) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (或\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e)$$

(六) 函数的连续性

1. 连续性概念

函数的连续性概念是点的性质，$f(x)$ 在点 x_0 处连续有两个等价定义.

定义 1　$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 此定义包含三个内容：

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$；

(3) $f(x_0) = A$.

定义 2　设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在左端点 a 右连续，在右端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

基本初等函数在其定义域内都是连续的.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 闭区间连续函数的性质

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

(1) 有界性：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

(2) 最值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值和最小值.

(3) 介值定理：闭区间上的连续函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值.

(4) 零点存在定理：$f(a)f(b) < 0$，则至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

3. 函数的间断点

函数 $f(x)$ 的不连续点称作 $f(x)$ 的间断点. 函数的间断点分两类.

(1) 第一类间断点：$f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0)$ 都存在的间断点称 为第一类间断点. 进一步再区分为左右极限相等者称作可去间断点，不相等者称作跳跃间断点.

(2) 第二类间断点：$f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0)$ 不都存在的间断点称作第二类间断点. 常见的有无穷间断点和振荡间断点.

二、典型题分析

例 1-1 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^{x}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

分析 这是函数记号的运算,基本思路是弄清定义域与函数值之间的关系.

解 因为 $|g(x)|=|e^{x}|$,故

当 $x<0$ 时,$|g(x)|<1, f[g(x)]=1$;

当 $x=0$ 时,$|g(x)|=1, f[g(x)]=0$;

当 $x>0$ 时,$|g(x)|>1, f[g(x)]=-1$.

则有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

而 $g[f(x)]=e^{f(x)}$,所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}$$

例 1-2 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是( )

(A) 偶函数; (B) 无界函数;

(C) 周期函数; (D) 单调函数.

答 应选(B).

分析 这可直接验算而得:因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 和 e^{x} 是单调增函数,所以 $|e^{\sin x}|\geqslant e^{-1}$;而 x 和 $\tan x$ 都是无界函数,所以对于任