

《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》

推荐教辅图书
经人民教育出版社授权

配人教版®

总主编◎李朝东



本册主编：高志强 徐雷雨 王加轩

学生用书

必修5

高中数学



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社



修订版

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，揉以为轮，其曲中规；虽有槁暴，不复挺者，揉使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；
小流，无以成江海；
锲而不舍，金石可镂；
积善成德，而神明自得，圣心备焉。

总主编◎李朝东



精讲精练

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，揉以为轮，其曲中规，虽有槁暴，不复挺者，揉使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

根土成山，风雨兴焉；
小流，无以成江海。
牙之利，筋骨之强，
利而足也，
而致千里；
假舟楫者，
非能水也，
而绝江河。
君子生非异也，
善假于物也。



本册主编：高志强 徐雷雨 王加轩

学生用书

必修5

高中数学

人教 A 版



宁夏出版传媒集团
宁夏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练:人教 A 版. 高中数学. 5:必修 / 李朝东主编.
—银川:宁夏人民教育出版社,2009.01(2013.1 重印)
ISBN 978-7-80764-065-3

I. ①精… II. ①李… III. ①数学课—高中—教学参
考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP 数据核字(2009)第 007802 号

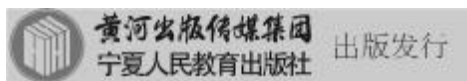
精讲精练——数学 必修 5(人教 A 版)

李朝东 主编

责任编辑 刘 佳

封面设计 杭永鸿

责任印制 刘 丽



地 址 银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网 址 www.yrpubm.com

网上书店 www.hh-book.com

电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5014294

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏雅昌彩色印务有限公司

开 本 880mm × 1230mm 1/16 印 张 9.75

印刷委托书号 (宁)0010831 字 数 195 千 印 数 3750 册

版 次 2009 年 1 月第 1 版 印 次 2013 年 1 月第 4 次印刷

书 号 ISBN 978-7-80764-065-3/G·1006

定 价 12.69 元

版权所有 翻印必究 21

目录

CONTENTS

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理/001

1.1.1 正弦定理(1)/001

1.1.1 正弦定理(2)/003

1.1.2 余弦定理(1)/006

1.1.2 余弦定理(2)/009

1.2 应用举例/012

单元知识整合/018

第二章 数列

2.1 数列的概念与简单表示法(1)/023

2.1 数列的概念与简单表示法(2)/027

2.2 等差数列(1)/030

2.2 等差数列(2)/034

2.3 等差数列的前 n 项和(1)/037

2.3 等差数列的前 n 项和(2)/041

2.4 等比数列(1)/045

2.4 等比数列(2)/048

2.5 等比数列的前 n 项和/052

单元知识整合/057

第三章 不等式

3.1 不等关系与不等式/063

3.2 一元二次不等式及其解法(1)/068

3.2 一元二次不等式及其解法(2)/071



3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题/075

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域/075

3.3.2 简单的线性规划问题/079

3.4 基本不等式： $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ /084

单元知识整合/089

第一章测试卷/095

第二章测试卷/099

第三章测试卷/103

综合测试卷/107

参考答案/111

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理(1)

———自·主·探·究———

课标导学

kebiaodaoxue

1. 理解并能推导正弦定理.
2. 掌握正弦定理的内容.
3. 能运用正弦定理解决一些简单的三角形问题.

基础梳理

jichushuli

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 a, b 分别为角 A, B 所对的边,则 $a > b \Leftrightarrow$ _____.
2. 正弦定理: 在一个三角形中, _____, 即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 为这个三角形外接圆的半径).
3. 正弦定理的常见变形
 - (1) $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
 - (2) $\sin A =$ _____, $\sin B =$ _____, $\sin C =$ _____.
 - (3) $a:b:c =$ _____, $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____.

$$(4) a \sin B = \frac{b \sin A}{\sin B}, b \sin C = \frac{c \sin B}{\sin C}, a \sin C = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

4. 一般地,把三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的_____,已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做_____.

【参考答案】

1. $A > B$
2. 各边和它所对角的正弦的比相等 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
3. (1) $2R \sin A = 2R \sin B = 2R \sin C$
 (2) $\frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R}$
 (3) $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$
 (4) $b \sin A = c \sin B = a \sin C = \frac{a \sin A}{\sin B} = \frac{a \sin A}{\sin C} = \frac{a \sin A}{\sin C}$
4. 元素 解三角形

———重·难·点·突·破———

疑难剖析

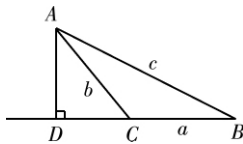
yinanpoux

1. 有关正弦定理的推导

方法一: (正弦函数的定义)

当三角形为直角三角形或锐角三角形时的情况,课本上已有推导过程,下面推导当三角形为钝角三角形时的情况.

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,如图,已知角 C 为钝角,设 BC 边上的高为 AD ,根据三角函数的定义, $AD = c \sin B$, $AD = b \sin \angle ACD = b \sin(\pi - C) = b \sin C$, $\therefore c \sin B = b \sin C$, 即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 同理在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



综上所述,在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

方法二: (外接圆法)

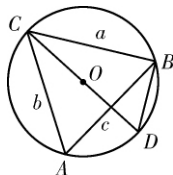
当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图所示,设 $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,半径为 R ,则 $A = D$,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin D} = CD = 2R.$$

$$\text{同理, } \frac{b}{\sin \angle ABC} = 2R, \frac{c}{\sin \angle ACB} = 2R.$$

$$\text{综上, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{c}{\sin \angle ACB}.$$

当 $\triangle ABC$ 为钝角或直角三角形时,同理也可证得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



2. 正弦定理的应用

(1) 已知两角和任一边,求其他两边和一角.

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,从而求其他的边和角.

(3) 已知其中一边和这一边的对角,求这个三角形外接圆的半径.

对于第(1)类,其解是唯一确定的,它一般先由三角形内角和求得第三个角,再利用正弦定理求其他两边.

对于第(2)类,其解不一定唯一,会出现一解、两解或无解三种情况(详细剖析见下一节).

典型题解

dianxingtijie

题型1

已知两角及一边解三角形

例1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $c = 10, A = 45^\circ, C = 30^\circ$,求 a, b 和 B .

[解析] 本题考查正弦定理的应用,已知两角 A 和 C ,可求出第三个角 B 为 105° ,然后利用正弦定理求出两边 a 和 b ,在求解的过程中,要注意对“ $\sin 105^\circ$ ”作三角变换.

$$\text{[答案]} \quad \because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\sqrt{2}.$$

$$B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

$$\text{又} \because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 20 \sin 75^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

$$\therefore a = 10\sqrt{2}, b = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}), B = 105^\circ.$$

[点评] 如果已知三角形的任意两个角与一边,可由三角形的内角和定理,计算出三角形的第三个角,并由正弦定理计算出三角形的其他两边.

[借题发挥1] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 10, B = 60^\circ, C = 45^\circ$,则 c 等于 ()

A. $10 + \sqrt{3}$

B. $10(\sqrt{3} - 1)$

C. $\sqrt{3} + 1$

D. $10\sqrt{3}$

题型2

已知两边和其中一边的对角解三角形

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, B = 45^\circ$,求 A, C 和 c .

[解析] 本题考查了正弦定理的应用,利用正弦定理先求出 A ,然后利用 a 和 b 的关系(大边对大角)得到 A 和 B 的关系,从而确定角 A 的个数及大小,求出其余的边和角.

$$\text{[答案]} \quad \text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\because a > b, \therefore A = 60^\circ \text{ 或 } A = 120^\circ.$$

$$\text{当 } A = 60^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ, c$$

$$= \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ =$$

$$15^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore A = 60^\circ, C = 75^\circ, c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ 或 } A = 120^\circ, C = 15^\circ, c$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

[点评] 已知三角形两边及一边对角解三角形时,利用正弦定理求出另一边的对角,再求其余的边和角.在利用正弦定理求解的过程中,要注意灵活使用三角公式及正弦定理的变形,如 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{a \sin C}{\sin A}$ 等;另外,此种题型往往碰到解的个数不确定的情况,此时,可根据边和边、角和角之间的关系进行判断.

[借题发挥2] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b = \sqrt{2}, c = 1, B = 45^\circ$.求 a 和 C .

题型3

正弦定理与三角公式的综合应用

例3 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $B = 60^\circ, \tan A \tan C = 2 + \sqrt{3}$,且顶点 C 的对边 c 上的高为 $4\sqrt{3}$,求三角形三边的长.

[解析] 本题考查正弦定理与三角公式的简单的综合应用问题,由已知条件不难求出 $\tan A$ 和 $\tan C$,从而求出 A 和 C ,然后根据边 $c = 4\sqrt{3} \cot A + 4\sqrt{3} \cot B$,进而问题得解.

$$\text{[答案]} \quad \because B = 60^\circ, \therefore A + C = 120^\circ.$$

$$\text{又 } \tan(A + C) = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C}, \tan A \tan C = 2 + \sqrt{3} \quad \text{①},$$

$$\therefore \tan A + \tan C = 3 + \sqrt{3} \quad \text{②},$$

$$\text{由①②得 } \tan A = 1, \tan C = 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } \tan A = 2 + \sqrt{3}, \tan C = 1, \\ \therefore A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ \text{ 或 } A = 75^\circ, B = 60^\circ, C = 45^\circ.$$

$$\text{当 } A = 45^\circ \text{ 时, } b = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{6}, a = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 8,$$

$$c = 4\sqrt{3} \cot 45^\circ + 4\sqrt{3} \cot 60^\circ = 4\sqrt{3} + 4;$$

当 $A = 75^\circ$ 时, $b = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 75^\circ} = 4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$, $a = 8$,

$c = 4\sqrt{3}\cot 75^\circ + 4\sqrt{3}\cot 60^\circ = 8(\sqrt{3}-1)$.

$\therefore$ 三边 a, b, c 的长分别为 $8, 4\sqrt{6}, 4\sqrt{3}+4$ 或 $8, 4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1), 8(\sqrt{3}-1)$.

[点评] 正弦定理的考查与三角函数结合在一起,以正弦定理及其变形公式为工具,利用三角恒等变换解决问题.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $c = 10, \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 求 a, b 及 $\triangle ABC$ 的内切圆半径.

提·升·训·练

1. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A = 60^\circ, BC = 4\sqrt{3}, AC = 4\sqrt{2}$, 则角 B 的大小为 ()

- A. 30° B. 45°
C. 135° D. 45° 或 135°

2. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角之比为 $A:B:C = 3:2:1$, 那么对应的三边之比 $a:b:c$ 等于 ()

- A. $3:2:1$ B. $\sqrt{3}:2:1$
C. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$ D. $2:\sqrt{3}:1$

3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a = 1, b = \sqrt{3}, A = 30^\circ$, 则角 B 等于 ()

- A. 60° B. 60° 或 120°
C. 30° 或 150° D. 120°

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 45^\circ, AB = 2$, 则 AC 边上的高等于 ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 无法确定

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, 最大边与最小边之比为 $(\sqrt{3}+1):2$, 则最大角为 ()

- A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}, BC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()

- A. $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$
B. $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
C. $6\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
D. $6\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$

7. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 且 $a \cdot \cos B = 3, b \cdot \sin A = 4$, 则边长 $a =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 60^\circ, a = 3$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____.

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $C = 2B$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 _____.

10. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边, 若 $a = 1, b = \sqrt{3}, A + C = 2B$, 则 $\sin C =$ _____.

11. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a + b = 6 + 6\sqrt{3}, A = 30^\circ, B = 60^\circ$, 求 c ;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 20, A = 30^\circ, C = 45^\circ$, 求 B, b, c ;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{6}, b = 2, B = 45^\circ$, 求 A, C 及 c .

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c = 1:3:5$, 求代数式 $\frac{2\sin A - \sin B}{\sin C}$ 的值.

1.1.1 正弦定理(2)

自·主·探·究

课标导学

kebiaodaoxue

1. 熟练掌握正弦定理及其变式的结构特征和作用.
2. 探究三角形的面积公式,并结合正弦定理理解三角形.
3. 能根据条件判断三角形的形状.
4. 能根据条件判断三角形解的个数.

基础梳理

jichushuli

1. 在解三角形时,常用到以下的结论

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow$ _____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C =$ _____, $A + B =$ _____,

$\frac{A+B}{2} =$ _____; $\cos(A+B) =$ _____, $\cos \frac{A+B}{2} =$ _____.

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

(3) 在锐角三角形中, $A+B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow \sin A > \cos B \Leftrightarrow \cos A < \sin B$.

2. 三角形的面积公式

(1) 已知一边和边上的高: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$.

(2) 已知两边及其夹角: $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$.

(3) 已知三边 a, b, c 及内切圆的半径 r : $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$.

(4) 已知三边 a, b, c , $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$, 这里 $p = \frac{a+b+c}{2}$.

【参考答案】

1. (1) $\sin A > \sin B$ (2) $\pi - C$ (3) $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ (4) $-\cos C$

$$\sin \frac{C}{2} \sin C \cos \frac{C}{2}$$

2. (1) $\frac{1}{2}bh_b$ $\frac{1}{2}ch_c$ (2) $\frac{1}{2}ac \sin B$ $\frac{1}{2}bc \sin A$ (3) $\frac{1}{2}(a+b+c)r$ (4) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\frac{1}{2}(a+b+c)r$

重·难·点·突·破

疑难剖析

yinanpouxi

1. 三角形解的个数的讨论

利用正弦定理解“已知两边和其中一边的对角,求其他两角和一边”的问题时,由于在某些情况下不能确定三角形,可能出现一解、两解或无解的情况,应结合图象并根据“三角形大边对大角”来判断解的情况,做到正确取舍.下面以“已知 a, b 和 A 时解三角形”为例加以说明.

方法一(数形结合法):

	角 A 为锐角			角 A 为钝角或直角	
图形					
关系式	$a < b \sin A$	$a = b \sin A$	$a > b \sin A$	$a < b$	$a \geq b$
解的个数	无解	一解	两解	无解	一解

具体解题时,作出已知 A, b , 以点 C 为圆心, 以边长 a 为半径画弧, 与射线 AB 的公共点(除去顶点 A) 的个数即为三角形解的个数.

方法二(根据三角函数的性质来判断):

由正弦定理, 得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

当 $\frac{b \sin A}{a} > 1$ 时, 则无解;

当 $\frac{b \sin A}{a} = 1$ 时, 则有一解;

当 $0 < \frac{b \sin A}{a} < 1$ 时, 如果 $a \geq b$, 即 $A \geq B$, 则 B 一定为锐角, 则有一解; 如果 $a < b$, 即 $A < B$, 则有两解.

2. 三角形形状的判断

三角形按角分为: 锐角三角形、直角三角形、钝角三角形; 按边分为: 等腰三角形、不等腰三角形; 等腰三角形中包含等腰直角三角形. 应用正弦定理判定三角形形状时通常需要通过正弦定理实现边角转化得出边的关系或角的关系, 即要么转化为边, 要么转化为角, 进而得出结论.

典型题解

dianxingtijie

题型1 已知两边及其中一边的对角, 判断三角形解的情况

例1 已知下列各三角形中的两边及其中一边的对角, 先判断三角形是否有解. 有解的, 解三角形.

(1) $a = 7, b = 8, A = 105^\circ$;

(2) $a = 10, b = 20, A = 80^\circ$;

(3) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, A = 30^\circ$.

解析 本题考查已知两边及一边的对角判断三角形解的个数问题, 可利用正弦定理结合三角形内角和定理解决.

答案 (1) $a = 7, b = 8, A = 105^\circ > 90^\circ$, $\therefore$ 本题无解.

(2) $a = 10, b = 20, A = 80^\circ < 90^\circ$.

$\therefore b \sin A = 20 \sin 80^\circ > 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$,

$\therefore a < b \sin A$, $\therefore$ 本题无解.

(3) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, A = 30^\circ < 90^\circ$.

又 $\therefore b \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3, a > b \sin A$, $\therefore$ 本题有两解.

由正弦定理得

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{6 \sin 30^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } B = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

当 $B = 60^\circ$ 时, $C = 90^\circ$,

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3} \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3};$$

当 $B = 120^\circ$ 时, $C = 30^\circ$,

$$c = a = 2\sqrt{3}.$$

$\therefore B = 60^\circ, C = 90^\circ, c = 4\sqrt{3}$ 或 $B = 120^\circ, C = 30^\circ, c = 2\sqrt{3}$.

点评 对于解决已知两边及其中一边的对角, 判断三角形解的个数的问题, 如果所给角是直角或钝角, 则根据大角对大

边来判断;如果所给角是锐角,则根据数形结合法来判断.

[借题发挥1] 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=2\sqrt{3}$, $A=30^\circ$,讨论当 b 为何值(或在什么范围内)时,三角形有一解、两解或无解?

题型2 判定三角形的形状

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b\sin B = c\sin C$,且 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$,试判断三角形的形状.

[解析] 本题考查利用正弦定理判定三角形形状的问题,关键是将已知条件中的边角关系式进行转化,要么都用边表示,要么都用角表示,然后得出结论.本题将角转化为边较简单.

[答案] 由正弦定理得 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$,

$$\therefore b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}, \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

$$\therefore b^2 = c^2, a^2 = b^2 + c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

[点评] (1) 要判断三角形的形状特征,必须深入研究边与边的大小关系:是否两边相等?是否三边相等?是否符合勾股定理?还要研究角与角的大小关系:是否两个角相等?是否三个角相等?有无直角或钝角?

(2) 解题的思想方法是:从条件出发,利用正弦定理等进行代换、转化、化简、运算,找出边与边的关系或角与角的关系,从而作出正确判断.

(3) 一般有两种转化方向:要么转化为边,要么转化为角.

[借题发挥2] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a\cos A = b\cos B$,求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

题型3 应用正弦定理及变形证明一些三角恒等式

例3 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $\frac{a - c\cos B}{b - c\cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}$.

[解析] 本题考查利用正弦定理及其变形证明三角恒等式问题,观察等式的特点,有边有角,需把边、角统一,为此用正弦定理将 a, b, c 分别转化为 $\sin A, \sin B, \sin C$,此时,本题完全转化成三角函数的问题了.

[答案] 由正弦定理得 $\frac{a - c\cos B}{b - c\cos A} = \frac{2R\sin A - 2R\sin C\cos B}{2R\sin B - 2R\sin C\cos A} =$

$$\frac{\sin A - \sin C\cos B}{\sin B - \sin C\cos A}, \text{又} \because A + B + C = 180^\circ,$$

$$\therefore \text{上式} = \frac{\sin(180^\circ - B - C) - \sin C\cos B}{\sin(180^\circ - A - C) - \sin C\cos A}$$

$$= \frac{\sin(B + C) - \sin C\cos B}{\sin(A + C) - \sin C\cos A}$$

$$= \frac{\sin B\cos C + \cos B\sin C - \sin C\cos B}{\sin A\cos C + \cos A\sin C - \sin C\cos A}$$

$$= \frac{\sin B\cos C}{\sin A\cos C} = \frac{\sin B}{\sin A}.$$

$\therefore$ 原等式得证.

[点评] 利用正弦定理及其变形证明三角恒等式,实质仍是三角函数的运算问题,只不过在运算过程中,我们需要利用正弦定理统一边或角;另外,要熟记三角形中的一些三角公式,并能灵活运用,如: $A + B + C = \pi$; $\sin(A + B) = \sin C$; $\cos(A + B) = -\cos C$; $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$; $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ 等.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $a\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{A}{2}$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c).$$

提·升·训·练

1. 已知 $\triangle ABC$, 不解三角形, 下列判断中正确的是 ()

A. $a=7, b=14, A=30^\circ$, 有两解
B. $a=30, b=25, A=150^\circ$, 有一解
C. $a=6, b=9, A=45^\circ$, 有两解
D. $b=9, c=10, B=60^\circ$, 无解

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=6, B=30^\circ, C=120^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

A. 9
B. 8
C. $9\sqrt{3}$
D. $18\sqrt{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=x, b=2, B=45^\circ$, 若三角形有两解, 则 x 的取值范围是 ()

A. $(2, +\infty)$
B. $(-\infty, 2)$
C. $(2, 2\sqrt{2})$
D. $(2, 2\sqrt{3})$

4. 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 等边三角形
B. 有一个内角为 30° 的直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 有一个内角为 30° 的等腰三角形

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = m : (m+1) : 2m$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(0, +\infty)$
B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $(1, +\infty)$
D. $(2, +\infty)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=\sqrt{2}, b=2, \sin B + \cos B = \sqrt{2}$, 则角 A 的大小为_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\tan B}{\tan A}$, 则 $\triangle ABC$ 是_____ 三角形.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=2\sqrt{2}, a=2$, 且三角形有解, 则 A 的取值范围是_____.

值范围是_____.

9. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量 $m = (\sqrt{3}, -1), n = (\cos A, \sin A)$, 若 $m \perp n$, 且 $a \cdot \cos B + b \cdot \cos A = c \cdot \sin C$, 则角 $B =$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$, 且 $a+b+c=100$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

11. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (b \cos A)x + a \cos B = 0$ 的两根之积等于两根之和, 且 a, b 分别为 $\triangle ABC$ 的角 A, B 的对边, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $C = \frac{3}{4}\pi, \sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin B$ 的值;

(2) 若 $c-a=5-\sqrt{10}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

1.1.2 余弦定理(1)

自·主·探·究

课标导学

kebiaodaoxue

1. 会用向量的数量积证明余弦定理.
2. 理解并掌握余弦定理.
3. 能运用余弦定理及其推论解三角形.

基础梳理

jichushuli

1. 余弦定理: 三角形中任何一边的_____等于其他两边的_____减去这两边与它们的_____的_____的

_____的_____倍, 即 $a^2 =$ _____,
 $b^2 =$ _____, $c^2 =$ _____.

2. 余弦定理的推论: $\cos A =$ _____, $\cos B =$ _____,
 $\cos C =$ _____.

【参考答案】

1. 平方 平方和 夹角 余弦 积 两 $b^2 + c^2 - 2bccos A$
 $c^2 + a^2 - 2accos B$ $a^2 + b^2 - 2abcos C$
2. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

重·难·点·突·破

疑难剖析

yinanpoux

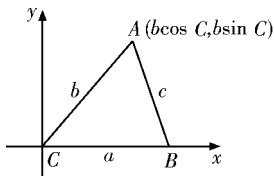
1. 余弦定理的推导

教科书中应用向量为工具,通过向量的数量积构建了方程,得出余弦定理,下面我们再用两种方法证明余弦定理.

(1) 利用坐标法证明余弦定理

如图,以 C 为原点,边 CB 所在直线为 x 轴,建立平面直角坐标系. 设点 B 的坐标为 $(a, 0)$, 点 A 的坐标为 $(b \cos C, b \sin C)$, 则

$$AB = \sqrt{(b \cos C - a)^2 + (b \sin C - 0)^2}.$$



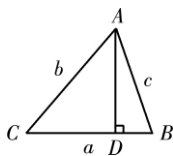
$$\text{即 } c^2 = b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \sin^2 C,$$

$$\text{整理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A, b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B.$$

(2) 利用三角法证明余弦定理

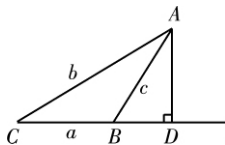
当三角形为锐角三角形时,如图, $AD = b \sin C$, $BD = BC - CD = a - b \cos C$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得 $AB^2 = AD^2 + BD^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2$,



$$\text{整理, 得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A, b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B.$$

当三角形为钝角三角形时,如图, $AD = b \sin C$, $BD = CD - BC = b \cos C - a$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得 $AB^2 = AD^2 + BD^2 = (b \sin C)^2 + (b \cos C - a)^2$,



$$\text{整理, 得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A, b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B.$$

2. 余弦定理的应用

(1) 已知两边及其夹角解三角形, 基本方法是先用余弦定理求第三边, 再用正弦或余弦定理求另一角, 最后利用三角形内角和求第三个角.

(2) 已知三角形的三边解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出一个角, 再用正弦定理或余弦定理求出另一个角, 最后利用三角形内角和定理, 求出第三个角.

典型题解

dianxingtijie

题型1

已知三角形的三边求角

例1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 7, b = 3, c = 5$, 求最大角和 $\sin C$.

[解析] 本题考查余弦定理的应用(2), 根据三角形的性质大角对大边知 A 为最大角, 利用余弦定理的推论求得 A , 然后利用正弦定理求得 $\sin C$.

[答案] $\because a > c > b, \therefore A$ 为最大角,

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}, \therefore A = 120^\circ.$$

$$\text{又 } \because \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \sin C = \frac{c}{a} \sin A = \frac{5}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

[点评] (1) 已知三角形的三边求角, 主要利用余弦定理的变形公式即推论求解.

(2) 本题求 $\sin C$ 也可采用下面方法求解:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}, \therefore C \text{ 为锐角,}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

[借题发挥1] 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a : b : c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$, 求 $\triangle ABC$ 各角的度数.

题型2

已知三角形的两边及其夹角, 求第三边和另两角

例2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 2\sqrt{2}, C = 15^\circ$, 求 A, B 和 c .

[解析] 本题考查余弦定理的应用(1), 已知 a 和 b 以及 C , 利用余弦定理公式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 求得 c , 然后利用正弦定理或余弦定理求得 A 和 B .

[答案] 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4 + 8 - 2 \times 2$

$$\times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore c = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{a \sin 15^\circ}{c} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\because b > a, \sin A = \frac{1}{2}, \therefore A = 30^\circ,$$

$$\therefore B = 180^\circ - A - C = 135^\circ.$$

[点评] 已知三角形的两边及其夹角解三角形, 主要根据余弦定理求解, 在求解过程中, 当然也可用正弦定理.

[借题发挥 2] 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 a, b 是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的两个根, $C = 60^\circ$, 求 c .

题型3 余弦定理的应用

例 3 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $A = 60^\circ, c = 3b$. 求:

(1) $\frac{a}{c}$ 的值;

(2) $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的值.

[解析] (1) 已知两边及其夹角, 用余弦定理求出 a (用 c 表示); (2) 切化弦, 再利用正弦定理及 (1) 的结论求值.

[答案] (1) 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = \left(\frac{1}{3}c\right)^2 + c^2 - 2 \times \frac{1}{3}c \cdot c \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9}c^2$, $\therefore a = \frac{\sqrt{7}}{3}c$, $\therefore \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

(2) 由余弦定理及 (1) 的结论有:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\frac{7}{9}c^2 + c^2 - \frac{1}{9}c^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{3}c \cdot c} = \frac{5}{2\sqrt{7}},$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{25}{28}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

$$\text{同理 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{7}{9}c^2 + \frac{1}{9}c^2 - c^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{3}c \cdot \frac{1}{3}c} = -\frac{1}{2\sqrt{7}},$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

$$\therefore \tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}, \tan C = -3\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{-3\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}.$$

[点评] 本题中的边长不是常数, 注意运用方程思想用一条边表示各个边; 其次注意观察式子的特点, 联系有关的式子进行变形.

[借题发挥 3] 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - a - 2b - 2c = 0, a + 2b - 2c + 3 = 0$, 求最大角.

提 · 升 · 训 · 练

1. 在 $\triangle ABC$ 中, BD 为 $\angle ABC$ 的平分线, $AB = 3, BC = 2, AC = \sqrt{7}$, 则 $\sin \angle ABD$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$,

$a = \sqrt{3}, b = 1$, 则 c 等于 ()

- A. 1 B. 2
C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc, \sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 等于 ()

- A. 30° B. 60°
C. 120° D. 150°

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a^2 - c^2 + b^2 = ab$, 则 C 等于 ()

- A. 60° B. 45° 或 135°
C. 120° D. 30°

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 30^\circ, AB = 2, BC = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 设向量 $p = (a + c, b), q = (b - a, c - a)$, 若 $p \parallel q$, 则 C 等于 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = 1, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{3}$, 则 $B =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, 已知 $a = \sqrt{3}, b = 3, C = 30^\circ$, 则 $A =$ _____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边的长为连续的自然数, 且最大角为钝角, 这个三角形三边的长分别为 _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$. 则 $a : b : c =$ _____, $B =$ _____.

11. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,已知 a, b 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ 的两根,且 A, B 满足 $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$.

- (1) 求 C ;
- (2) 求 c 及 $\triangle ABC$ 的面积.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, \cos C = \frac{2\sqrt{7}}{7}, D$ 是 AC 上一点, $AD =$

$2DC$ 且 $\cos \angle DBC = \frac{5\sqrt{7}}{14}$. 求:

- (1) $\angle BDA$ 的大小;
- (2) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$.

1.1.2 余弦定理(2)

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 熟练掌握正、余弦定理在解决各类三角形问题中的应用.
2. 利用正、余弦定理判断三角形的形状.
3. 利用正、余弦定理解决一些综合问题.

基础梳理

jichushuli

1. 正弦定理: _____, 变形公式 _____.
2. 余弦定理: $a^2 =$ _____, $b^2 =$ _____, $c^2 =$ _____, $\cos A =$ _____, $\cos B =$ _____, $\cos C =$ _____.
3. 在 $\triangle ABC$ 中,
 $a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \cos C < 0 \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$, 可得此三角形为 _____ 三角形.

$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$, 可得此三角形为 _____ 三角形.

$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \cos C > 0 \Leftrightarrow C < \frac{\pi}{2}$, 此三角形形状不确定.

【参考答案】

1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$,
 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$ 等
2. $b^2 + c^2 - 2bccos A$ $a^2 + c^2 - 2accos B$ $a^2 + b^2 - 2abcos C$
 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
3. 钝角 直角

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

yinanpoux

1. 利用正、余弦定理解三角形

正弦定理和余弦定理都反映了三角形中边与角的关系, 用其解三角形可分为以下几类:

(1) 已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形, 基本方法是先由正弦定理求出另一条边所对的角, 用三角形的内角和定理求出第三个角, 再用正弦定理求出第三边, 注意判断解的个数.

(2) 已知三角形的两角和任一边解三角形, 基本方法是

若所给边是已知角的对边时, 可由正弦定理求出另一边, 再由三角形内角和定理求出第三个角, 最后由正弦定理求出第三边; 若所给边不是已知角的对边时, 先由三角形内角和定理求出第三个角, 再由正弦定理求出另外两边.

(3) 已知三角形的两边和它们的夹角解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出第三边, 再用正弦定理或余弦定理求出另一角, 最后用三角形内角和定理求出第三个角.

(4) 已知三角形的三边解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出一个角, 再用正弦定理或余弦定理求出另一个角, 最后用三角形内角和定理求出第三个角.

从以上分析来看, 在解三角形过程中, 求某一个角时既可

用正弦定理,又可用余弦定理,各有长处,应用余弦定理运算可能较复杂,但在 $(0, \pi)$ 上的角与其余弦值是一一对应的,所以不需讨论;而应用正弦定理时运算量小,但由于 $(0, \pi)$ 上正弦值与角并非一一对应,所以往往需要分类讨论.

2. 利用正弦定理、余弦定理判断三角形的形状

利用三角形中边的关系和角的关系,判断三角形的形状,其常用方法是:

(1) 利用正弦定理化边为角,即将已知式子统一用角表示,然后通过三角运算判断三角形的形状.

(2) 利用余弦定理化角为边,即将已知式子统一用边表示,然后通过代数运算判断三角形的形状.

典型题解

dianxingtijie

题型1 正、余弦定理的综合应用

例1 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .已知 $a^2 - c^2 = 2b$,且 $\sin B = 4\cos A \sin C$,求 b .

解析 本题综合考查正弦定理、余弦定理的灵活运用.

答案 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$.

$$\therefore a^2 - c^2 = b^2 - 2bccos A, \text{ 又 } a^2 - c^2 = 2b,$$

$$\therefore b^2 - 2bccos A = 2b, \because b \neq 0, \therefore b = 2ccos A + 2. \quad (1)$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \text{ 又 } \sin B = 4\cos A \sin C,$$

$$\therefore b = 4ccos A, \quad (2)$$

$$\text{由 } (1)(2) \text{ 得 } b = 4.$$

点评 对于解三角形问题,通常是观察问题中的条件,根据条件的特点,灵活选用正弦定理或余弦定理,例如条件中的边较多时,可以选择余弦定理求角;条件中的角较多时,选择使用正弦定理求边.

借题发挥1 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 2A, a + c = 10, \cos A = \frac{3}{4}$,求 b .

题型2 利用正、余弦定理判断三角形的形状

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bccos Bcos C$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解析 本题考查正、余弦定理在判断三角形形状时的应用,可利用正弦定理化为角的关系或利用余弦定理化为边的关系求解.

答案 解法一:由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 得 $\sin^2 B \sin^2 C = \sin B \sin C \cos B \cos C$.

$$\therefore \sin B \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \sin B \sin C = \cos B \cos C.$$

$$\text{即 } \cos(B + C) = 0, \therefore B + C = 90^\circ, \therefore A = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

解法二:将已知等式变为

$$b^2(1 - \cos^2 C) + c^2(1 - \cos^2 B) = 2bccos Bcos C.$$

由余弦定理得

$$b^2 + c^2 - b^2 \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 - c^2 \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2$$

$$= 2bc \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 = \frac{[(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)]^2}{4a^2},$$

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

点评 已知三角形中的边角关系,判断三角形的形状,有两条思路:其一根据正弦定理化边为角,再进行三角恒等变换求出三个角之间的关系;其二根据余弦定理化角为边,再进行代数恒等变换求出三条边之间的关系.

借题发挥2 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且满足 $a + c = 2b$,且 $2\cos 2B - 8\cos B + 5 = 0$,求 B 并判断 $\triangle ABC$ 的形状.

题型3 利用正、余弦定理证明三角恒等式

例3 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$.

解析 在本题中,等式的左边是三角形中的三边关系,右边是三角关系,因而我们必须把两边化为统一的形式,既可化为边的关系,也可化为角的关系来证明.

$$\begin{aligned} \text{[答案]} \quad \text{右边} &= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin C} = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \cos B - \cos A \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \\ &= \frac{a}{c} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c^2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{2c^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \text{左边}, \therefore \frac{a^2 - b^2}{c^2} \\ &= \frac{\sin(A - B)}{\sin C} \text{ 成立.} \end{aligned}$$

点评 合理地选择边角互化的方向是解题技巧之一,若本题中采用化边为角,则较难证明,即左边 $= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C}$

$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C}$,再往下化简就较难了.可见,化边为角还是化角为边,并不是对每个题都同时适用,应根据实际问题合理选择,切忌生搬硬套,当一种方法不好用时,要注意换另一种方法来求解.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c - b \cos A}{b - c \cos A}$.

题型4 三角形中的综合问题

例4 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c . 设 a, b, c 满足条件 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 和 $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$,求 A 和 $\tan B$.

[解析] 本题考查正弦定理、余弦定理、两角差的正弦公式、同角三角函数的基本关系式等基础知识,考查基本运算能力,先根据余弦定理求出 A ,再利用余弦定理求出 $\tan B$.

[答案] 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

$\therefore A = 60^\circ$.

解法一: 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 180^\circ - A - B = 120^\circ - B$.

由已知条件及正弦定理得

$$\frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot B + \frac{1}{2},$$

解得 $\cot B = 2$,则 $\tan B = \frac{1}{2}$.

解法二: 由 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b}$

$$= \frac{15}{4}.$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

由 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ 得 $a > b$,故 $A > B$, $\therefore B$ 为锐角,

$$\text{则 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{1}{2}.$$

[点评] 解决正、余弦定理与函数、向量、三角函数、不等式、平面向量相结合的综合问题,要抓住问题的衔接点,找到解决问题的突破口,这就要求我们在平常学习的过程中要注意知识之间的相互联系.

[借题发挥4] 锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$ 的值并由此求 $\frac{1}{\tan^2 \frac{B+C}{2}} + \sin^2 \frac{A}{2}$ 的值;

(2) 若 $a = 6, S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{2}$,求 b 的值.

提·升·训·练

- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = 7, BC = 5, AC = 6$,则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ 等于 ()
A. 19 B. -14
C. -18 D. -19
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三内角 A, B, C 的对边,且 $\sin^2 A - \sin^2 C = (\sin A - \sin B) \cdot \sin B$,则角 C 等于 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
- 已知 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c .若 $a = c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$,且 $A = 75^\circ$,则 b 等于 ()
A. 2 B. $4 + 2\sqrt{3}$
C. $4 - 2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
- 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 a, b, c 满足 $b^2 = ac$,且 $c = 2a$,则 $\cos B$ 等于 ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- 如果 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2 B_2 C_2$ 的三个内角的正弦值,则 ()

- $\triangle A_1 B_1 C_1$ 和 $\triangle A_2 B_2 C_2$ 都是锐角三角形
- $\triangle A_1 B_1 C_1$ 和 $\triangle A_2 B_2 C_2$ 都是钝角三角形
- $\triangle A_1 B_1 C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2 B_2 C_2$ 是锐角三角形
- $\triangle A_1 B_1 C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2 B_2 C_2$ 是钝角三角形
- $\triangle ABC$ 中,已知 $c = 2, a = 5, S_{\triangle ABC} = 4$,则 $b =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \right) =$ _____.
- 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c 且 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$,则 $C =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$,则 $b \cos C + c \cos B =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$,且 $\sin A = 2 \sin B \cos C$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

11. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知

$$\cos 2C = -\frac{1}{4}.$$

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 当 $a=2, 2\sin A = \sin C$ 时,求 b 和 c .

12. 设角 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角,已知向量 $\mathbf{m} = (\sin A + \sin C, \sin B - \sin A)$, $\mathbf{n} = (\sin A - \sin C, \sin B)$,且 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若向量 $\mathbf{s} = (0, -1)$, $\mathbf{t} = \left(\cos A, 2\cos^2 \frac{B}{2}\right)$,求 $|\mathbf{s} + \mathbf{t}|$ 的取值范围.

1.2 应用举例

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaaxue

1. 掌握用正弦定理、余弦定理解任意三角形的方法.
2. 会利用数学建模的思想,结合三角形的知识,解决生产实践中的相关问题.

基础梳理

jichushuli

1. 处理三角形应用问题的基本思路: 实际问题 $\rightarrow$ $\rightarrow$ 实际问题.
2. 处理三角形应用问题的一般步骤
 - (1) 准确理解题意,分清已知与所求.
 - (2) 根据题意画出示意图.
 - (3) 建立数学模型,合理运用 $\rightarrow$ 求解,并作答.
3. 用正弦定理和余弦定理解三角形的常见题型有: 测量距离问题、测量高度问题、测量角度问题、面积问题、航海问题、

物理问题等.

4. 常见的三角形面积公式

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (h_a, h_b, h_c \text{ 分别是 } \triangle ABC \text{ 中 } a, b, c \text{ 边上的高});$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B;$$

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径});$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (r \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内切圆的半径});$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 周长的一半}).$$

【参考答案】

1. 数学问题
2. 正、余弦定理

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

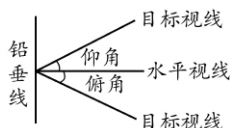
yinanpoux

1. 实际应用问题中的有关术语

在解决与三角形有关的实际问题时,经常出现一些有关的名词、术语,如仰角、俯角、坡角、坡比、方位角、方向角、铅垂平面、基线等.

(1) 铅垂平面: 指与海平面垂直的平面.

(2) 仰角和俯角: 在同一铅垂平面内,视线与水平线的夹角,当视线在水平线之上时,称为仰角;当视线在水平线之下时,称为俯角,如图所示.



(3) 坡角: 坡面与水平面的夹角.