College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学附册
学习辅导与习题选解

同济·四、五版（上下册合订本）

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写，主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作教学参考。本书按《高等数学》第四、五版的章节顺序编排，与教学需求保持同步。每节（或相关的几节）包括内容要点、教学要求、释疑解难、例题增补、习题解法提要等栏目。习题解法提要对教材中较难并具有典型性的约三分之一总量的习题作出简要解答，既给学生以参考，又留有自我发挥的余地。每章末还编写了该章总习题选解。本书对教材具有相对的独立性，可作为工科和其他非数学类专业学生学习高等数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学附册学习辅导与习题选解/同济大学应用数学系编.—北京：高等教育出版社，2003.1
同济大学《高等数学》第四、五版配套教材
ISBN 7-04-011686-3

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第096710号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年1月第1版
印　　张	21.5	印　　次	2003年1月第1次印刷
字　　数	400 000	定　　价	22.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前 言

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版(由高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书,主要面向使用该教材的学生,也可供使用该教材的教师作教学参考。

近年来我国高等教育的规模有了迅速的扩展,我国的高等教育已经从以往的精英教育向大众化教育转变。在这个过程中,无论是教育界还是社会各方面,都对高等教育的质量十分关注。我们编写这本指导书,就是为了适应这种变化的形势,满足广大工科、经济、管理类等非数学类专业的学生学习高等数学的需要,期望能对提高高等数学的教学质量,对学生掌握高等数学的教学基本要求起到一种辅助的作用。

本书按《高等数学》第四、五版的章节顺序编排,以便与教学需求保持同步。考虑到读者使用的方便,编写时注意到使这本书具有相对的独立性。在编写时,我们对应第四、五版教材的顺序逐节编写,有的地方根据需要将几节合并编写,每节(或合并的几节)包括如下几部分内容:

一、内容要点

提纲挈领地归纳本节的主要内容,至于具体的概念、定理、公式等一般不再列出,由读者自行复习回顾。

二、教学要求

主要根据原国家工科数学课程教学指导委员会制定的工科本科高等数学课程教学基本要求确定,同时也根据当前的教学实际作了少许修改。对教学要求的层次,也沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

三、释疑解难

针对读者在学习本节内容时常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题,选出若干个给以分析、解答,以帮助读者释疑解难。有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高,以供一些学有余力的学生阅读参考。

四、例题增补

按照本节的教学要求,在教材原有例题和习题的基础上,适当选取少量概念性、启发性或综合性较强的例题作为补充,并作出解答和说明。

五、习题解法提要

在教材中选出较难并具有典型性的一小部分习题(约占 1/3),作出习题解

法提要，供教师、学生参考。习题解法提要中的题号就是该题在原教材该节习题中的编号。

除了逐节编写上述几部分内容以外，每一章末还编写了该章教材的总习题选解，所选的习题数量约占 1/2。

本书由同济大学应用数学系的下列五位教师编写（按编写的章节次序排列）：邱伯驺（第一、八章）、徐建平（第二、三、七章）、朱晓平（第四、五、六章）、郭镜明（第九、十章）、应明（第十一、十二章）。

在编写某些章节的释疑解难时，我们参阅了原工科数学课程教学指导委员会本科组编写的《高等数学释疑解难》，并采用了其中的少数问题，在此谨对作者表示诚挚的谢意。

由于我们对编写此类书缺乏经验，又限于水平，书中存在的不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2002 年 8 月

目　录

第八章　多元函数微分学

第一节　多元函数的基本概念

一、内容要点

1. 平面点集，$\mathbf{R}^2$ 中点 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$ 与去心 δ 邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，点集 E 的内点、外点、边界点、聚点，开集、闭集、连通集、区域、闭区域、有界集、无界集等概念.

2. $\mathbf{R}^n$ 中的线性运算、距离，n 维空间等概念.

3. 多元函数的概念，多元函数的定义域、值域、自然定义域，二元函数的图形.

4. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 的定义，多元函数的极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 的定义及极限运算法则.

5. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续及在集合 D 上连续的定义.

6. 在有界闭区域上连续的多元函数的性质：有界性与最大值最小值定理，介值定理，* 一致连续性定理.

7. 多元初等函数的连续性结论：一切多元初等函数在其定义区域内连续.

二、教学要求

1. 理解多元函数的概念，了解二元函数的几何表示.

2. 了解二元函数的极限（即二重极限）和连续的概念，以及有界闭区域上连续的多元函数的性质.

注意把本节中的有关概念和命题与一元函数中的相应内容加以对比，了解两者间的异同，特别是那些不同之处.

三、释疑解难

1. 在一元函数极限中，有“函数在一点处的极限存在当且仅当它在该点处的左、右极限存在且相等”这个结论. 在二元函数的极限中，当点 $P(x,y)$ 沿着任一直线方向无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，如果 $f(x,y)$ 都趋于 A，这时能否断言

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在,且等于 A.

答 不能.例如,函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$,当点 $P(x,y)$ 沿着 y 轴($x=0$)趋于 $P_0(0,0)$ 时,有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} f(x,y)=0$;当点 $P(x,y)$ 沿着任意一条直线 $y=kx$ 趋于 $P_0(0,0)$ 时,都有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0.$$

但此时,我们仍不能断言 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.事实上,当点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y^2=x$ 趋于 $P_0(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

因此,函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,极限不存在.

其实,根据二重极限的定义,在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心邻域内,动点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是任意的.尽管动点 $P(x,y)$ 沿着任一直线方向趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限都存在且都等于 A,但毕竟只是沿着直线变动,因而无法肯定当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的二重极限是否存在,更不能断言二重极限是 A.

2. 关于二重极限有下列两种定义,试分析比较它们之间的差异何在?

定义 1 (见高等数学第五版(下册)第 7 页)设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 2 (见高等数学第四版(下册)第 6 页)设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点.如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$,都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

答 这两种定义的主要差异在于对函数的前提假设不尽相同.定义 1 对函数的定义域没有特别要求,只要求 P_0 是函数定义域的聚点,就可以定义函数的

极限;定义 2 对函数的定义域要求是开区域或闭区域 D,只有 P_0 是 D 的内点或边界点,才可以定义函数的极限.定义 2 对函数的要求高,因而使有一些极限无法讨论,限制了极限的应用.其优点是避免了聚点这个概念,学习时容易理解.定义 1 放宽了对函数的要求,只要是函数定义域的聚点,都可以定义函数的极限,从而使极限概念更便于应用.由于引入了聚点概念,在教学要求上显得较定义 2 有所提高.但这样处理顾及到了后面曲线积分和曲面积分定义中规定被积函数在曲线、曲面上连续的需要,也有利于克服定义 2 中存在的一些缺陷,所以高等数学第五版恢复了第三版中的处理方式,即采取定义 1 的方式.

上述极限概念上的差异,也导致了计算上的一些差异.例如,计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

这里函数 $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\in\mathbf{R}\}$,$P_0(0,2)$ 是 D 的聚点,按定义 1 可以定义函数在点 P_0 的极限,由极限运算法则,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$$

按定义 2,由于函数的定义域不是开区域或闭区域,严格说来不能定义函数的极限.所以,首先得将函数限制在区域 $D_1=\{(x,y)\mid x<0, y\in\mathbf{R}\}$ 或区域 $D_2=\{(x,y)\mid x>0, y\in\mathbf{R}\}$ 内讨论.$P_0(0,2)$ 同时为 D_1 及 D_2 的边界点,可以讨论函数的极限.这时,无论在 D_1 内还是在 D_2 内讨论,都有

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2$$

3. 判定二重极限不存在,有哪些常用方法?

答 根据二重极限的定义,$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在,要求 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 有相同的极限.因此判定二重极限不存在,常有下列两种方法:

(1) 选取 $P\to P_0$ 的一种方式,通常取沿某条过 P_0 的直线或曲线趋于 P_0,按此方式极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在;

(2) 找出 $P\to P_0$ 的两种方式,通常取沿两条过 P_0 的直线或曲线 C_1、C_2,使得

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_1}}f(P)=A_1,\quad \lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_2}}f(P)=A_2,$$

且 $A_1\neq A_2$.

四、例题增补

例 1　求下列极限或判断极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$.

解　(1) 因为 $\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}=\dfrac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{x^2+y^2}$

$$=1+\sqrt{1-x^2-y^2},$$

所以原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+\sqrt{1-x^2-y^2})=2$.

(2) 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x-\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x^2}=\infty,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$ 不存在.

例 2　讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续性.

解　当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ 显然连续.

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$(x,y)\neq(0,0)$，$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot y\right)=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也连续. 因此 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续.

五、习题解法提要(习题 8 - 1，教材下册第 11 页)

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证　$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$$

$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

6. 求下列各极限：

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　(2) 利用函数的连续性：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=f(1,0)$.

(4) 利用$\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\sqrt{xy+1}+1$.

(6) 利用

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}\cdot(x^2-y^2)^2((x,y)\to(0,0)).$$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证　(1) 取(x,y)沿直线 $y=kx(k\neq1)$趋于$(0,0)$的方式，求极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\quad(k\neq1).$$

(2) 依次取$(x,y)\to(0,0)$的两种方式：$y=x$，$y=-x$，分别求极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证　利用

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

证　设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$. 因为 $f(x)$在 x_0 处连续，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$时，$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$，因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

第二节 偏 导 数

一、内容要点

1．$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x、y 的偏导数$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$的定义，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$的几何意义，偏导函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$的定义.

2．$z=f(x,y)$的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$的概念，二阶混合偏导数与求导次序无关的充分条件.

二、教学要求

1．理解多元函数偏导数的概念，掌握偏导数和高阶偏导数的求法.

2．了解混合偏导数与求导次序无关的充分条件.

三、释疑解难

1．二元函数可偏导(即存在偏导数)与连续有没有联系？

答 一元函数可导必定连续，然而对于多元函数，可偏导与连续没有必然的联系.也就是说，多元函数可偏导未必连续，函数连续也未必可偏导.例如，教材中已经指出二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)的两个偏导数均存在且等于零，但极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在，从而函数在点(0,0)处不连续；二元函数

$$\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

在点(0,0)连续，但极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(0+\Delta x,0)-\varphi(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在，即 $\varphi_x(0,0)$不存在.同理，$\varphi_y(0,0)$也不存在.

2．设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

按偏导数的定义，容易推得 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 均不存在；但如果先将 $y=0$ 代入 $f(x,y)$，得 $f(x,0)=0$，于是

$$f_x(0,0)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\right]_{x=0}=0'\Big|_{x=0}=0.$$

究竟哪个结果对？

答 按偏导数的定义，得到 $f_x(0,0)$ 不存在的结论是对的；而所采用的第二种方法，得出 $f_x(0,0)=0$ 的结论是错的. 第二种方法的错误之处在于"$f(x,0)=0$"上，将 $y=0$ 代入 $f(x,y)$ 得到的 $f(x,0)$ 的表达式应为

$$f(x,0)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

由于 $f(x,0)$ 是分段函数，讨论 $f_x(0,0)$ 的存在性及计算 $f_x(0,0)$，应按偏导数的定义进行.

四、例题增补

例 1 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)=-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=-\frac{x+y}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

例 2 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\mathrm{e}^{-x^2y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{-x^2y^2}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3\mathrm{e}^{-x^2y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3y\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^{-x^2y^2})=\mathrm{e}^{-x^2y^2}-2x^2y^2\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

故

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x}{y}(-2xy^3\mathrm{e}^{-x^2y^2})-2(\mathrm{e}^{-x^2y^2}-2x^2y^2\mathrm{e}^{-x^2y^2})$$
$$+\frac{y}{x}(-2x^3y\mathrm{e}^{-x^2y^2})=-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

五、习题解法提要（习题 8－2，教材下册第 18 页）

1. 求下列函数的偏导数：