

高等学校数学教材配套辅导书

# 高等数学辅导

同济·高等数学  
(上册配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院  
邹本腾 漆毅 王奕倩  
总策划 胡东华



科学技术文献出版社

# 高等数学辅导

同济·高等数学  
(上册配套用书)

主 编 北京太学数学科学学院  
毅 王奕倩

总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.-北京:科学技术文献出版社,1999.6  
ISBN 7-5023-3298-7

I. 高… II. 邹… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09978 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所  
大楼 B 段/100038

邮 购 部 电 话:(010)62579473

图书发行部电话:(010)62579473 (010)62624508

门 市 部 电 话:(010)62534447 62543201

图书发行部传真:(010)62579473

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:王清富

责 任 编 辑:郭昊昊

责 任 校 对:李新之

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:北京市通县蓝华印刷厂

版 ( 印 ) 次:2000 年 2 月第 2 版 2000 年 2 月第 1 次印刷

开 本:850×1168 1/16 大 32 开

字 数:550 千字

印 张:22.06

全套合计定价:22 元(单册 11 元)

### © 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者), (010)62534708(著作权者)

本丛书封面均贴有“读书新知”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物,盗版书刊因错漏百出、印制粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。

## 前 言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前:其一是学生课内、外时间的减少;其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾,成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头,我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容,节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的,在同类书中尚属首例。对于例题,作者按分类的方式编排,把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解,把容易出现的问题指出来,使读者少走弯路。其中加\*号的内容较难,读者可根据需要自行选择。另外,每章都有一份提纲挈领的知识网络图,还附有最近几年考研真题评析,使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解,也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中,主编鄂本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作,特此致谢!由于编者水平有限,时间又仓促,不妥之处在所难免,希望广大读者不吝批评、指正。

编者

1999年5月

# (京)新登字 130 号

## 内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材,是高等工院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析,旨在帮助考生练就扎实的基本功,以便在解题过程中融汇贯通。另外,本书还对重点、难点进行具体分析,对考试内容进行概括总结,以帮助考生理解记忆,达到复习的综合性、整体性,培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

声明:本书封面及封底均采用专用图标(见右图),该图标已由国家商标局注册受理登记,未经本策划人同意禁止其他单位使用。



## 科学技术文献出版社 向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于 1973 年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

# 目 录

<b>第一章 函数与极限</b> .....	(1)
§ 1.1 函数 .....	(1)
§ 1.2 极限 .....	(13)
§ 1.3 函数的连续性 .....	(28)
§ 1.4 无穷小量 .....	(45)
本章知识网络图 .....	(50)
历届考研真题评析 .....	(51)
同步自测题 .....	(55)
同步自测题参考答案 .....	(56)
<b>第二章 导数、微分及其应用</b> .....	(63)
§ 2.1 导数 .....	(63)
§ 2.2 微分与高阶导数 .....	(82)
§ 2.3 导数的应用 .....	(90)
本章知识网络图 .....	(139)
历届考研真题评析 .....	(140)
同步自测题 .....	(150)
同步自测题参考答案 .....	(153)
<b>第三章 不定积分</b> .....	(172)
本章知识网络图 .....	(195)
历届考研真题评析 .....	(196)
同步自测题 .....	(199)
同步自测题参考答案 .....	(199)
<b>第四章 定积分及其应用</b> .....	(203)
§ 4.1 定积分的定义与积分方法 .....	(203)
§ 4.2 定积分的应用 .....	(237)
§ 4.3 广义积分 .....	(255)

本章知识网络图 .....	(272)
历届考研真题评析 .....	(273)
同步自测题 .....	(282)
同步自测题参考答案 .....	(284)

# 目 录

<b>第五章 级数</b> .....	(299)
§ 5.1 数值级数 .....	(299)
§ 5.2 函数项级数 .....	(324)
§ 5.3 幂级数 .....	(333)
§ 5.4 傅立叶级数 .....	(353)
本章知识网络图 .....	(365)
历届考研真题评析 .....	(366)
同步自测题 .....	(370)
同步自测题参考答案 .....	(371)
<b>第六章 空间解析几何</b> .....	(379)
§ 6.1 向量代数 .....	(379)
§ 6.2 平面和直线 .....	(401)
§ 6.3 空间曲面和曲线 .....	(425)
本章知识网络图 .....	(440)
历届考研真题评析 .....	(441)
同步自测题 .....	(444)
同步自测题参考答案 .....	(445)
<b>第七章 多元函数及其微分学</b> .....	(446)
§ 7.1 多元函数的极限与连续性 .....	(446)
§ 7.2 偏导数、全微分与微分法 .....	(457)
§ 7.3 多元函数微分学的应用 .....	(472)
本章知识网络图 .....	(482)
历届考研真题评析 .....	(483)
同步自测题 .....	(486)
同步自测题参考答案 .....	(487)
<b>第八章 重积分</b> .....	(491)
§ 8.1 二重积分 .....	(491)
§ 8.2 三重积分 .....	(513)



§ 8.3 重积分的应用 .....	(528)
本章知识网络图 .....	(534)
历届考研真题评析 .....	(535)
同步自测题 .....	(538)
同步自测题参考答案 .....	(542)
<b>第九章 曲线积分、曲面积分及场论初步</b> .....	(563)
§ 9.1 第一型曲线积分与第二型曲线积分 .....	(563)
§ 9.2 Green 公式、平面上曲线积分与路径无关的条件 .....	(579)
§ 9.3 曲面积分 .....	(587)
§ 9.4 Gauss 公式与 Stokes 公式及其应用 .....	(599)
§ 9.5 场论初步 .....	(608)
本章知识网络图 .....	(614)
历届考研真题评析 .....	(615)
同步自测题 .....	(621)
同步自测题参考答案 .....	(624)
<b>第十章 常微分方程</b> .....	(640)
§ 10.1 基本概念 .....	(640)
§ 10.2 初等积分法 (I) .....	(643)
§ 10.3 初等积分法 (II) .....	(654)
§ 10.4 二阶线性微分方程 .....	(663)
§ 10.5 一阶常系数线性微分方程组 .....	(672)
本章知识网络图 .....	(683)
历届考研真题评析 .....	(684)
同步自测题 .....	(692)
同步自测题参考答案 .....	(693)

# 第一章 函数与极限

在这一章里,我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限,这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性,以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

## § 1.1 函数

### 1.1.1 考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定 义	要点	补充说明
函数	给定集合 $X$ , 若存在某种对应规则 $f$ , 对于 $\forall x \in X$ , 存在唯一 $y \in R$ 与之对应, 称 $f$ 是从 $X$ 到 $R$ 的一个函数, 记作 $y = f(x)$ ; $X$ 称为定义域, $x$ 称为自变量, $y$ 为因变量。 $\{f(x)   x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x))   x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		

续表 1.1.1

名称	定义	要点	补充说明
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 $X$ 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$ , 称 $g$ 与 $f$ 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域、值域	结合律成立 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ , 但没有交换律, 即 $f \circ g \neq g \circ f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$ , 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , 则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 $x$ 变成不同的 $y$
反函数	设 $y = f(x)$ 在 $X$ 上是一一对应的, 值域为 $Y, \forall y \in Y$ , 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \rightarrow Y;$ $f^{-1}: Y \rightarrow X;$ $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X;$ $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \rightarrow Y;$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow X;$ $I_X$ 表 $X$ 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定 义	图例或说明
奇偶性	奇函数 函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, $\forall x, -x \in X$ , 且 $f(-x) = -f(x)$ , 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数 函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, $\forall x, -x \in X$ , 且 $f(-x) = f(x)$ , 则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增) 函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$ , 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
	单调下降(单调递减) 函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$ , 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
若严格不等号成立, 则称严格单调上升(下降)		

续表 1.1.2

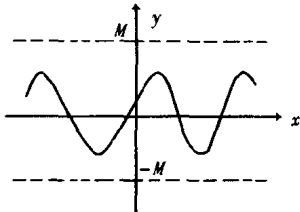
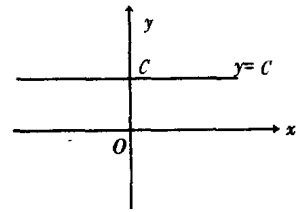
性质	定义	图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, 若 $\exists M > 0, \forall x \in X$ , 有 $ f(x)  \leq M$ , (或 $\exists m, M$ , 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上是有界函数	 <p>即函数的图形位于 <math>y = M</math> 与 <math>y = -M</math> 之间</p>
无界性	函数 $f(x)$ 在 $X$ 上定义, 若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$ , 使得 $ f(x')  > M$ ; 则称 $f(x)$ 在 $X$ 上无界	例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为 $\forall M > 0$ , 取 $x' = \frac{1}{3M}$ , 则 $f(x') = 3M > M$
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若 $\exists T > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 有 $f(x+T) = f(x)$ , 则称 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的周期函数。若在无穷多个周期中, 有最小的正数 $T$ , 则称 $T$ 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期, 简称周期	若 $T$ 是 $f(x)$ 的周期, 则 1° $f(x+kT) = f(x)$ , ( $k$ 为整数); 2° $f(ax+b)$ ( $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ ) 是一个以 $\left  \frac{T}{a} \right $ 为周期的函数

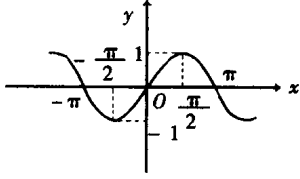
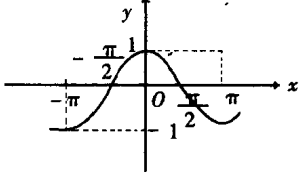
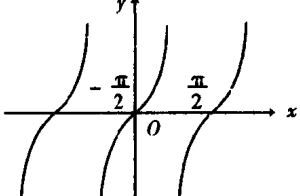
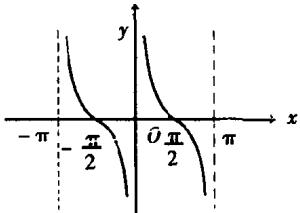
表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$ . 平行于 $x$ 轴, 过 $(0, C)$ 点的直线	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
幂函数	$y = x^\alpha, (0 < x < +\infty, \alpha \neq 0)$ $\alpha > 0 \text{ 时, 函数 } x^\alpha \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上严格上升}$ $\alpha < 0 \text{ 时, 函数 } x^\alpha \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上严格下降}$ $y = x^\alpha \text{ 与 } y = x^{\frac{1}{\alpha}} \text{ 互为反函数}$	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1 \text{ 时, 函数 } y = a^x \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上严格上升}$ $a < 1 \text{ 时, 函数 } y = a^x \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上严格下降}$	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1 \text{ 时, 函数 } y = \log_a x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上严格上升}$ $a < 1 \text{ 时, 函数 } y = \log_a x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上严格下降}$ $y = a^x \text{ 与 } y = \log_a x \text{ 互为反函数. (若 } a = e, \text{ 记 } y = \log_e x \text{ 为 } y = \ln x)$	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
三 函 角 数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	
	余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	

续表 1.1.3

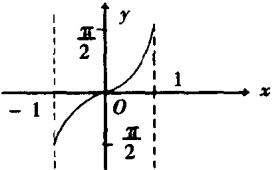
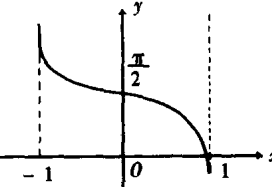
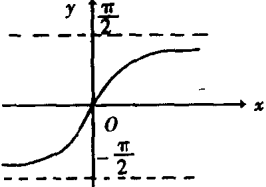
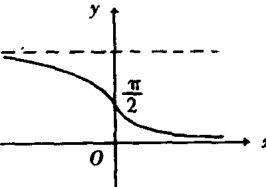
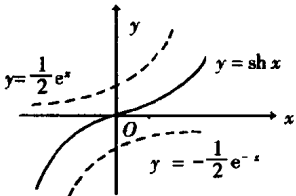
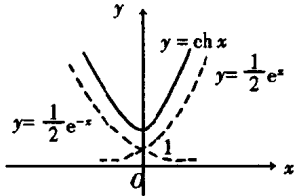
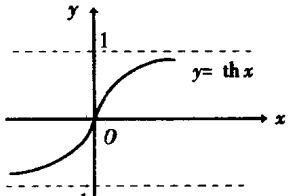
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x, (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x, (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x, (-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, (-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	



表 1.1.4 双曲函数

名称	定 义	图 形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	
双曲余切	$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	