高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

同济·高等数学

（上册配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕倩
总策划　胡东华

科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学

（上册配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院

毅　王奕倩

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.-北京:科学技术文献出版社,1999.6
ISBN 7-5023-3298-7
Ⅰ.高…　Ⅱ.邹…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第09978号

出　版　者:科学技术文献出版社
图书发行部:北京市复兴路15号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼B段/100038
邮购部电话:(010)62579473
图书发行部电话:(010)62579473　(010)62624508
门市部电话:(010)62534447　62543201
图书发行部传真:(010)62579473
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策划编辑:王清富
责任编辑:郭昊昊
责任校对:李新之
封面设计:胡东华
发　行　者:科学技术文献出版社发行　新华书店总店北京发行所经销
印　刷　者:北京市通县蓝华印刷厂
版(印)次:2000年2月第2版　2000年2月第1次印刷
开　　本:850×1168　大32开
字　　数:550千字
印　　张:22.06
全套合计定价:22元(单册11元)

前　言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前:其一是学生课内、外时间的减少;其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾,成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头,我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容,节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的,在同类书中尚属首例。对于例题,作者按分类的方式编排,把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解,把容易出现的问题指出来,使读者少走弯路。其中加 * 号的内容较难,读者可根据需要自行选择。另外,每章都有一份提纲挈领的知识网络图,还附有最近几年考研真题评析,使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解,也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中,主编邹本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作,特此致谢!由于编者水平有限,时间又仓促,不妥之处在所难免,希望广大读者不吝批评、指正。

编者

1999 年 5 月

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材，是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析，旨在帮助考生练就扎实的基本功，以便在解题过程中融汇贯通。另外，本书还对重点、难点进行具体分析，对考试内容进行概括总结，以帮助考生理解记忆，达到复习的综合性、整体性，培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

目 录

目 录

第一章　函数与极限

在这一章里，我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限，这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性，以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§ 1.1　函数

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

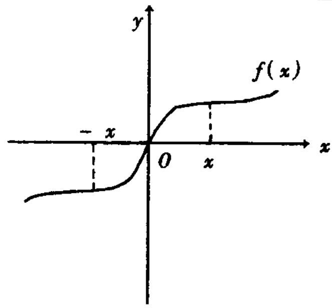
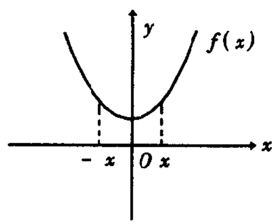
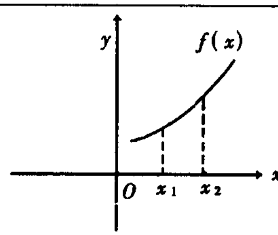
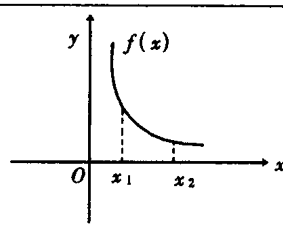
表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定　　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y = f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量。$\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		

续表 1.1.1

名称	定义	要点	补充说明
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数。记作 $y=f[g(x)]$ 或 $y=f\circ g$	对应规则、定义域，值域	结合律成立 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1,x_2\in X$，若由 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，或者由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y=f(x)$ 在 X 上是一一对应的，值域为 Y，$\forall y\in Y$，用满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x\in X$ 与之对应，由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数		$f:X\to Y$; $f^{-1}:Y\to X$; $f^{-1}(f)=I_X:X\to X$; $f\circ f^{-1}=I_Y:Y\to Y$; $(f^{-1})^{-1}=f:X\to X$; I_X 表 X 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定义		图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x, -x \in X$，且 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x, -x \in X$，且 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降)		

续表 1.1.2

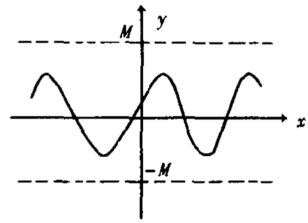
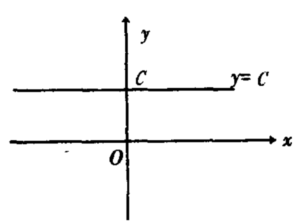
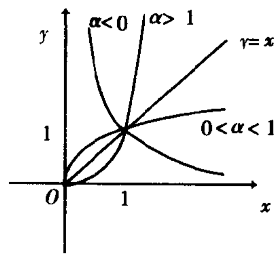
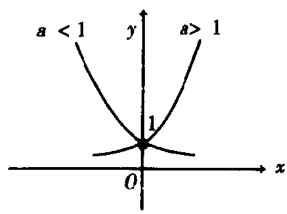
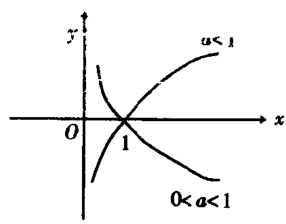
性质	定义	图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\exists M>0, \forall x\in X$，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，（或 $\exists m, M$，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立），则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数	 即函数的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\forall M>0, \exists x'\in X$，使得 $\lvert f(x')\rvert>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界	例：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x'=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x')=3M>M$
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，若 $\exists T>0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。若在无穷多个周期中，有最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 1° $f(x+kT)=f(x)$，（k 为整数）；2° $f(ax+b)(a\neq 0, b\in R)$ 是一个以 $\left\lvert\dfrac{T}{a}\right\rvert$ 为周期的函数

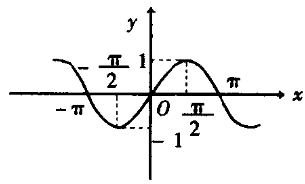
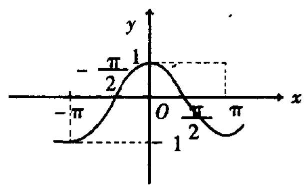
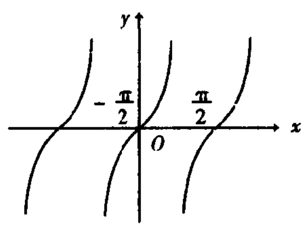
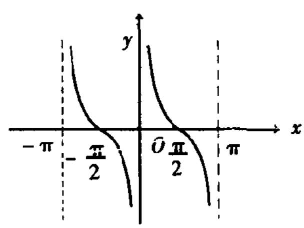
表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C$，$(-\infty<x<+\infty)$。平行于 x 轴，过 $(0,C)$ 点的直线	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
幂函数	$y=x^{\alpha},(0<x<+\infty,\alpha\neq0)$ $\alpha>0$时，函数x^{α}在$(0,+\infty)$上严格上升 $\alpha<0$时，函数x^{α}在$(0,+\infty)$上严格下降 $y=x^{\alpha}$与$y=x^{\frac{1}{\alpha}}$互为反函数	
指数函数	$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$ $a>1$时，函数$y=a^{x}$在$(-\infty,+\infty)$上严格上升 $a<1$时，函数$y=a^{x}$在$(-\infty,+\infty)$上严格下降	
对数函数	$y=\log_{a}x(a>0,a\neq1,0<x<+\infty)$ $a>1$时，函数$y=\log_{a}x$在$(0,+\infty)$上严格上升 $a<1$时，函数$y=\log_{a}x$在$(0,+\infty)$上严格下降 $y=a^{x}$与$y=\log_{a}x$互为反函数。(若$a=e$，记$y=\log_{e}x$为$y=\ln x$)	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数 $y=\sin x,(-\infty<x<+\infty)$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x),(-\infty<x<+\infty)$	
	正切函数 $y=\tan x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	
	余切函数 $y=\cot x(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	

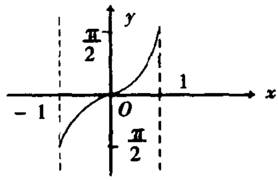
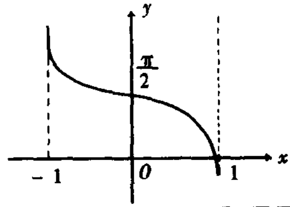
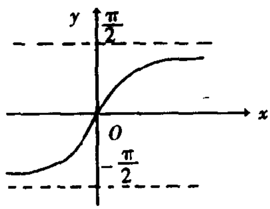
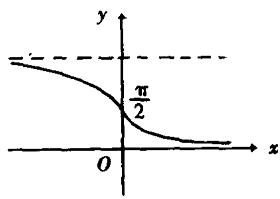
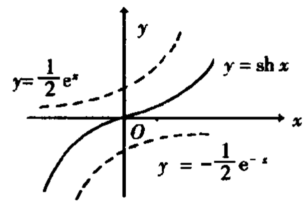
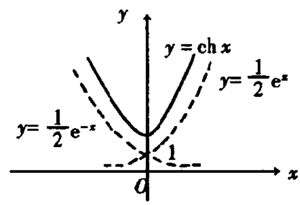
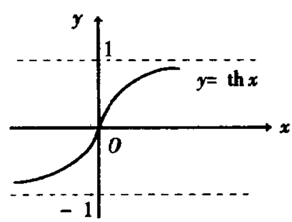
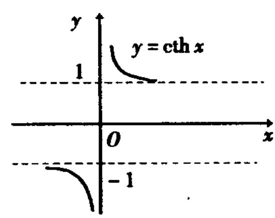
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$	
	反正切函数 $y=\arctan x$，$(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

<table>
<tr><th>名称</th><th>定　　义</th><th>图　　形</th></tr>
<tr><td>双曲正弦</td><td>$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>双曲余弦</td><td>$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>双曲正切</td><td>$y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>双曲余切</td><td>$y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$</td><td>
</td></tr>
</table>