

九章算術細草圖說

附海島算法

九九

圖書

江苏工业学院图书馆

藏書章

說算

術

界田

劉銘題

光緒丙申季夏上
海文淵山房石印

劉徽九章算術注原序

昔在庖犧氏始畫八卦以通神明之德以類萬物之情作九九之術以合六爻之變暨於黃帝神而化之引而伸之於是建歷紀協律呂用稽道原然後兩儀四象精微之氣可得而效焉記稱隸首作數其詳未之聞也按周公制禮而有九數九數之流則九章是矣往者暴秦焚書經術散壞自時厥後漢北平侯張蒼大司農中丞耿壽昌皆以善算命世蒼等因舊文之遺殘各稱刪補故校其目則與古或異而所論者多近語也微幼習九章長再詳覽觀陰陽之割裂總算術之根源探蹟之暇遂悟其意是以敢竭頑魯采其所見爲之作注事類相推各有攸歸故枝條雖分而同本幹者知發其一端而已又所析理以辭解體用圖庶亦約而能周通而不黷覽之者思過半矣且算在六藝古者以賓與賢能教習國子雖曰九數其能窮纖入微探測無方至於以法相傳亦猶規矩度量可得而共非特難爲也當今好之者寡故世雖多通才達學而未必能綜於此耳周官大司徒職夏至日中立八尺之表其景尺有五寸謂之地中說云南戴日下萬五千里夫云爾者以術推之按九章立四表望遠及因木望山之術皆端旁互見無有超邇若斯之類然則蒼等爲術猶未足以博盡羣數也微尋九數有重差之名原其指趣乃所以施於此也凡望極高測絕深而兼知其遠者必用重差句股則必以重差爲率故曰重差也立兩表於洛陽之城令高八尺南北各盡平地同日度其正中之時以景差爲法表高乘表間爲實實如法而一所得加表高卽日去地也以南表之景乘表間爲實實如法而一卽爲從南表至南戴日下也以南戴日下及日去地爲句股爲之求弦卽日去人也以徑寸之筭南望日日滿筭空則定筭之長短以爲股率以筭徑爲句率日去人之數爲大股大股之句卽日徑也雖天圓穹之象猶曰可度又况泰山之高與江海之廣哉微以爲今之史籍且畧舉天地之物考論厥數載之於志以闡世術之美輒造重差并爲注解以究古人之意綴於句股之下度高者重表測深者累矩孤離者三望離而又旁求者四望觸類而長之則雖幽遐詭伏靡所不入博物君子詳而覽焉

九章算術細草圖說序

莫若作四元玉鑑序謂河洛圖書世其秘黃帝九章著之書其章有九其術則二百四十有六始方田終句股包括三才旁通萬有凡言數者莫得而逃焉唐立明算科九章海島共限習三年試九章三條海島一條不特陳其數且欲明其義也自時厥後算科既廢書亦不彰近時以算名者如王寅旭梅定九諸君子咸未之見迨吾宗東原氏與修四庫全書從永樂大典中錄出一刻於曲阜孔氏再刻於常熟屈氏而古學復興然未及盡求其解也鍾祥李雲門先生博綜羣書尤精算學推步律呂俱臻微妙於古人立天元一大衍求一正負開方諸術多所發明九章海島更多心得嘗言陳其數者下學之言也知其義者上達之功也有數先有象有象皆可繪舊注所云解此要當以基者一一顯之於圖於東原氏所謂舛誤不可通者一一疏而通之探賸索隱鉤深致遠臚名標目咸式古訓撰九章海島細草圖說共十卷亦猶劉徽析理以辭解體用圖之意也惜未寫定告人其萎其甥程儀部晴峯謹守遺藁延吳門沈孝廉俠侯至其家算校編輯鳩工付梓以敦元粗聞撰述緣起屬爲識其綱要於時距先生之歿已八年矣敦元既幸見是書之成復感先生之不及親觀而尤望他種之陸續綴集也爰不獲辭而系以言開化後學戴敦元謹撰

重差圖序

圖九望海島舊有圖解餘八圖今所補也同式形兩兩相比所作四率二三率相乘與一四率相乘同積如欲作圖明之第取一三率聯爲一邊又取二四率聯爲一邊作相乘長方圖之自然分爲四幕又以斜並界爲同式句股形各二則形勢驗矣舊圖於形外別作同積二方至兩形相去遠遠者又必宛轉通之皆可不必也圖中以四邊形五邊形立說似與句股不類然於本形外補作句股形則亦句股也四率比例法在九章粟米謂之今有一爲所有率二爲所求率三爲所有數四爲所求數在句股則統目之爲率劉氏注云句率股率見句見股者是也今祇云同式相比者取省易耳異乘同除則一也鍾祥李潢

目錄附

方田第一 凡三十八問

粟米第二 凡四十六問

衰分第三 凡二十問

少廣第四 凡二十四問

商功第五 凡二十八問

均輸第六 凡二十八問

盈不足第七 凡二十問

方程第八 凡十八問

句股第九 凡二十四問

海島算經細草

九章算術細草圖說卷一

魏

劉

徽

注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋

鍾祥李 橫雲門撰

方田

以御田
噴界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

答曰一畝

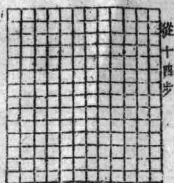
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

答曰一百六十八步

圖從十四
廣十二

黃按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

如后



如圖廣十二步從十

四步相乘得一百六

十八步

方田

術曰廣從步數相乘得積步

此積謂田畧凡廣
從相乘謂之畧觀斯注意積畧義同以理推之

臣淳風等謹按經云廣從相乘得積步注云廣
從相乘謂之畧觀斯注意積畧義同以理推之
固當不爾何則畧是方面單布之名積乃衆數
聚居之稱循名責實二者全殊雖欲同之竊恐

不可今以凡言畧者據廣從之一方其言積者舉畧步之都數經云相乘得積步即是都數之明文注云謂之爲畧全乖積步之本意此注前云積謂田畧於理得通復云謂之爲畧繁而不當今者注釋存善去非畧爲科簡遺諸後學

以畝法二百四十步除之卽畝數百畝爲一項

臣淳風等謹按此爲篇端故特舉項畝二法餘術不復言者從此可知一畝之田廣十五步從而疏之令爲十五行卽每行廣一步而從十六步又橫而截之令爲十六行卽每行廣一步而從十五步此卽從疏橫截之步各自爲方凡有二百四十步爲一畝之地步數正同以此言之卽廣從相乘得積步驗矣二百四十步者畝法也百畝者項法也故以除之卽得

草曰置廣十五步於上位又置從十六步於下

位上位有十步至十以上一呼下一一一如一

卽下一百於中位以上一呼下一六如六卽

於中位下六十退下位一等收上位一十以上

位五呼下位一一五如五卽於中位下五十以

上五呼下六五六三十卽於中位下三十上下

位俱收中位得二百四十爲積步乃以中位

二百四十步爲實以畝法二百四十步爲法置

下位以下除中得一置上位上下相呼除中位

適盡收下位定上位所得爲一畝合問

草曰置廣十二步於上位又置從十四步於下

位上位有十步至十以上一呼下一一一如一

卽下一百於中位以上一呼下四一四如四卽於中位下四十退下位一等收上位一十以上位二呼下位一一二如二卽於中位下二十以上二呼下四二四如八卽於中位下八上下位俱收中位得一百六十八爲積步合問

說曰古算用籌漢書云其算法用竹徑一分長六寸二百七十一枚而成六觚爲一握孫子算經云凡算之法先識其位一從十橫百立千億千十相望萬百相當又云六不積五不隻謂算籌也其乘式則置實於上位置法於下位置乘得數於中位其除式則置實於中位置法於下位置除得數於上位孫子算經所謂乘得在中央除得在上方是也此爲篇端故詳書以存古式後不復言者從此可知

今有田廣一里從一里問爲田幾何

答曰三頃七十五畝

又有田廣二里從三里問爲田幾何

答曰二十二頃五十畝

里田

術曰廣從里數相乘得積里以三百七十五乘

之卽畝數按此術廣從里數相乘得積里故方里之中有三頃七十五畝故以乘之數也

草曰置廣一里於位展爲三百步亦展從一里爲三百步以乘之得九萬步爲實以畝法二百四十步爲法除之得三百七十五畝收爲三頃七十五畝合問

草曰置廣二里於位以從三里乘之得六里又以三百七十五乘之得二千二百五十畝收爲二十二頃五十畝合問

說曰古者三百步爲里以三百步自乘得九萬步如畝法而一得三百七十五畝故注云故方里之中有三頃七十五畝也術從簡易以廣從里數相乘得積里以三百七十五乘之卽畝數可省一通分又省一除也

今有十八分之十二問約之得幾何

答曰三分之二

又有九十一分之四十九問約之得幾何

答曰十三分之七

約分按約分者物之數量不可悉全必以分言約分之爲數繁則難用設有四分之二者繁而言之亦可爲八分之四約而言之則二分之一也雖則異辭至於爲數亦同歸爾法實指

推動有參差故爲術者先治諸分

術曰可半者半之不可半者副置分母子之數以少減多更相減損求其等也以等數約之等數約之即除也其所以相減者皆等數之重疊故以等數約之

草曰置分母十八於下位置分子十二於上位副之以上減下下位餘六以餘六減副上上位亦餘六是以六爲等數也以等數六約十八得三以等數六約十二得二是爲三分之二合問

草曰置分母九十一於下位置分子四十九於上位副之以上減下下位餘四十二以四十二減副上四十九上位餘七以七減下餘四十二下位亦餘七是以七爲等數也以等數七約九十一得十三以等數七約四十九得七是以十三分之七合問

說曰注云按約分者物之數量不可悉全者全即分母乘全之全謂如法而一得全數也不可悉全者謂實不滿法以法命之是有分也云先治諸分者統約分合分減分課分平分經分乘分而言張卽建亦云學算者不患乘除之爲難而患通分之爲難也

今有三分之一五分之二問合之得幾何

答曰十五分之十一

又有二分之二十七分之四九分之五問合之得幾何

答曰得一六十三分之五十

又有二分之一三分之一二四分之三五分之四問合之得幾何

答曰得二十六分之四十三

合分

臣淳風等謹按合分者數非一端分無定準諸分子雖互羣母參差釐細既殊理難從一故齊其衆分同其羣母令可相并故曰合分

術曰母互乘子并以爲實母相乘爲法母互乘子約而

言之者其分釐繁而言之者其分細雖則釐細有殊然其實一也衆分錯雜非細不會乘而散之所以通之通之則可并也凡母互乘子謂之齊羣母相乘謂之同同者相與通同共一母也齊者子與母齊勢不可失本數也方以類聚物以羣分數同類者無遠數異類者無近遠而通體者雖異位而相從也近而殊形者雖同刻而相違也然則齊同之術要矣錯綜度數動之則諸其猶佩編解結無往而不理焉乘以散之約以聚之齊同以通之此其算之綱紀乎其一術者可令母除爲實如法而一不滿法者以法命率率乘子爲齊實如法而一不滿法者以法命之今欲求其實故齊其子又同其母令如母而餘爲子皆其母同者直相從之

草曰置三分五分在右方之一之二在左方以右方分母五乘左方分子一三分之一得五以

右方分母三乘左方分子二五分之二得六并
 之得十一爲實右方分母三五相乘得十五爲
 法實不滿法以法命之爲十五分之十一合問
 草曰置三分七分九分在右方之二之四之五
 在左方以右方分母七乘左方分子二又以右
 方分母九乘之三分之二得一百二十六以右
 方分母三乘左方分子四又以右方分母九乘
 之七分之二得一百八以右方分母三乘左方
 分子五又以右方分母七乘之九分之五得一
 百五并之得三百三十九爲實右方分母三七
 相乘又以分母九乘之得一百八十九爲法實
 如法得一又一百八十九分之一百五十子母
 各以等數三約之爲六十三分之五十合問
 草曰置二分三分四分五分在右方之一之二
 之三之四在左方母互乘子二分之一得六十
 三分之二得八十四分之三得九十五分之四
 得九十六并之得三百二十六爲實右方四分
 母相乘得一百二十爲法實如法得二又一百
 二十分之八十六子母各半之爲六十分之四
 十三合問

說曰注云數同類者無遠數異類者無近同類
 異類指分母言也云遠而通體者雖異位而相
 從也近而殊形者雖同列而相違也異位同列
 指分子言也謂分母同者分子雖異位而相從
 分母異者分子雖同列而相違也云其一術者
 可令母除爲率率乘子爲齊除者除同也羣母
 相乘謂之同以各分母除同爲率率乘各分子
 爲齊不言同者省文也

今有九分之八減其五分之一問餘幾何

答曰四十五分之三十一

又有四分之三減其三分之一問餘幾何

答曰十二分之五

減分臣淳風等謹按諸分子母數各不同以少減多欲知餘幾減餘爲實故曰減分

術曰母互乘子母互乘子者知以齊其子也以少減多者齊故可相減也母相乘爲

實如法而一法者同其母也母同子齊故如母而一即得

草曰置九分五分在右方之八之一在左方母

互乘子九分之八得四十五分之一得九以少

減多餘三十一爲實母相乘得四十五爲法實

不滿法以法命之爲四十五分之三十一合問

草曰置四分二分之三在右方之三之一在左方母
互乘子四分之三得九三分之一得四以少減
多餘五爲實母相乘得十二爲法實不滿法以
法命之爲十二分之五合問

今有八分之五二十五分之十六問孰多多幾何

答曰二十五分之十六多多二百分之三
又有九分之八七分之六問孰多多幾何

答曰九分之八多多六十三分之二

又有二十一分之八五十分之十七問孰多多幾何

答曰二十一分之八多多一千五十分之

四十三

課分臣淳風等謹按分各異名理不齊一較其相多之數故曰課分也

術曰母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法

實如法而一卽相多也臣淳風等謹按此術母互乘子以少減多分

多與減分義同唯相多之數意共減分有異減分知求其餘數有幾課分知以其餘數相多也

草曰置八分二十五分在右方之五之十六在

左方母互乘子八分之五得一百二十五二十

五分之十六得一百二十八以少減多餘三爲

實母相乘得二百爲法以法命實爲二百分之

三卽相多也合問

草曰置九分七分在右方之八之六在左方母
互乘子九分之八得五十六七分之六得五十
四以少減多餘二爲實母相乘得六十三爲法
以法命實爲六十三分之二卽相多也合問

草曰置二十一分五十分在右方之八之十七

在左方母互乘子二十一分之八得四百五十

分之十七得三百五十七以少減多餘四十三

爲實母相乘得一千五十爲法以法命實爲一

千五十分之四十三卽相多也合問

今有三分之一三分之二十四分之三問減多益少各

幾何而平

答曰減四分之三者二三分之二者一并

以益三分之一而各平於十二分之七

又有二分之一三分之二十四分之三問減多益少各

幾何而平

答曰減三分之二者一四分之三者四并

以益二分之一而各平於三十六分之二

十三

平分臣淳風等謹按平分者謂分參差欲令齊等減彼之多增此之少故曰平分也

術曰母互乘子齊其子也副并爲平實臣淳風等謹按母互乘子

副并為平實者定此平實立母相乘為法母相乘為法乘為法者亦齊其以列數乘未并者各自為列實亦以列數乘法此當副并列數為平實若然則重風等謹按問云所平之分多少不定或三或二列位無常平三知置位三重平二知置位二重凡此之例一準平分不可預以平實減列實餘定多少故直云列數而已

約之為所減并所減以益於少以法命平實各得其平

漢注此當副并列數為平實當作此當副置列數除平實

草曰置三分三分四分在右方之一之二之三在左方母互乘子三分之一得十二三分之二得二十四四分之三得二十七副并得六十三為平實母相乘得三十六為法以列數三乘未并者三分之一得三十六三分之二得七十二四分之三得八十一亦以列數三乘法得一百八以平實六十三減列實七十二餘九減列實八十一餘十八以等數九約所餘得一與二為所減亦以等數九約列實三十六得四并所減一與二以加之得七又以等數九約法一百八為十二以命之是為減四分之三者二減三分

之二者一并以益三分之一而各平於十二分之七合問

草曰置二分三分四分在右方之一之二之三在左方母互乘子二分之一得十二三分之二得十六四分之三得十八副并得四十六為平實母相乘得二十四為法以列數三乘未并者二分之一得三十六三分之二得四十八四分之三得五十四亦以列數三乘法得七十二以平實四十六減列實四十八餘二減列實五十四餘八以等數二約所餘得一與四為所減亦以等數二約列實三十六得十八并所減一與四加之得二十三又以等數二約法七十二為三十六以命之是為減三分之二者一四分之三者四并以益二分之一而各平於三十六分之二十三合問

今有七人分八錢三分錢之一問人得幾何

答曰人得一錢二十一分錢之四

又有三人三分人之一分六錢三分錢之一四分錢之三問人得幾何

答曰人得二錢八分錢之

經分臣淳風等謹按分者自合分已下皆與諸分相齊此乃直求一人之分以入數分所分故曰

術曰以人數為法錢數為實實如法而一有分

者通之以母通之者分母齊其子母相乘者同其母

為積分積分則與分子相通故可令相從凡數

重疊則約也等除法實相與率也故重有分者

散分者必令兩分母相乘實實分母乘此謂

同而通之又以法分母乘實實分母乘此謂

子又令分母互乘上下

橫按注故令分母各乘全分內子全分之分字

疑衍

草曰置八錢三分錢之一於上位通分內子得

二十五為實置七人於下位亦以分母三乘之

得二十一為法實如法得一錢二十一分錢之

四合問

草曰置六錢三分錢之一四分錢之三於上位

母五乘子三分之一得四分之三得九并之

得十三為分子母相乘得十二為分母通分內

子得八十五又以法分母三乘之得二百五十

五為實置三人三分人之一於下位通分內子

法實如法得二錢一百二十分錢之十五以等數十五約分母子為八分錢之一合問

今有田廣七分步之四從五分步之三問為田幾何

答曰三十五分步之十二

又有田廣九分步之七從十一分步之九問為田幾

何

答曰十一分步之七

又有田廣五分步之四從九分步之五問為田幾何

答曰九分步之四

乘分臣淳風等謹按乘分者分母相乘為法子相乘為實故曰乘分

術曰母相乘為法子相乘為實實如法而一凡

不滿法者乃有母子之名若有分以乘其實而

長之則亦滿法乃為全耳又以子有所乘故母

當報除報除者實如法而一也今子相乘則母

各當報除因令分母相乘而連除也此田有廣

從難以廣論設有問者曰馬二十八匹得幾何答

斤三十五分斤之十二其為之也當如經分術

以十二斤金為實三十五人為法設更言馬五

匹直金三斤今賣四匹七人分之人得幾何答

八人得三十五分斤之十二其為之也當齊其

金八之數皆合初問入於經分矣然則分子相

乘為實者猶齊其金也母相乘為法者猶齊其

人也同其母為二十馬無事於同但欲求齊而

已又馬五匹直金三斤完全之率分而言之則

為一匹直金五分之三七人賣四馬一人賣

七分馬之四分子與人交互相生所從言之異

而計數則三

術同歸也

草曰置分母七分五分在右方分子之四之三
在左方分母相乘得三十五爲法分子相乘得
十二爲實實不滿法以法命之爲三十五分步

之十二合問

草曰置分母九分十一分在右方分子之七之
九在左方分母相乘得九十九爲法分子相乘
得六十三爲實法實各以等數九納之爲十一

分步之七合問

草曰置分母五分九分在右方分子之四之五
在左方分母相乘得四十五爲法分子相乘得
二十爲實法實各以等數五約之爲九分步之

四合問

今有田廣三步三分步之一從五步五分步之二問
爲田幾何

答曰十八步

又有田廣七步四分步之三從十五步九分步之五
問爲田幾何

答曰一百二十步九分步之五

又有田廣十八步七分步之五從二十三步十一分
步之六問爲田幾何

答曰一畝二百步十一分步之七

大廣田臣淳風等謹按大廣曰者初術直有全
步而無餘分次術空有餘分而無全步
此術先見全步復有餘分
可以廣兼三術故曰大廣

術曰分母各乘其全分子從之分母各乘其全
分子從之者通
全步內分子如此
則母子皆爲實矣相乘爲實分母相乘爲法猶
也實如法而一今爲術廣從俱有分當各自通
分母相乘爲
法而連除之

草曰置廣三步以分母三乘之得九分子一從
之得一十於上位置從五步以分母五乘之得
二十五分子二從之得二十七於下位上下相
乘得二百七十爲實分母三分母五相乘得一
十五爲法實如法而一得十八步合問

草曰置廣七步以分母四乘之得二十八分子
三從之得三十一於上位置從十五步以分母
九乘之得一百三十五分子五從之得一百四
十於下位上下相乘得四千三百四十爲實分
母四分母九相乘得三十六爲法實如法而一
得一百二十步三十六分步之二十分母子各
以等數四約之爲九分步之五合問
草曰置廣十八步以分母七乘之得一百二十

六分子五從之得一百三十一於上位置從二
 十三步以分母十一乘之得二百五十三分子
 六從之得二百五十九於下位上下相乘得三
 萬三千九百二十九為實分母七分母十一相
 乘得七十七為法實如法而一得四百四十步
 七十七分步之四十九以畝法二百四十步除
 之得一畝二百步七十七分步之四十九分母
 子各以等數七約之為十一分步之七合問
 今有圭田廣十二步正從二十一步問為田幾何
 答曰一百二十六步

又有圭田廣五步二分步之一從八步三分步之二
 問為田幾何

答曰二十三步六分步之五



如圖子丑為正從寅卯為
 廣以甲段與乙段顛倒相
 補成直積注所謂以盈補
 虛為直田也

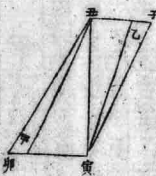
術曰半廣以乘正從半廣者以盈補虛為直田也亦可半正從以乘廣按相乘為積步畝法除之即得也
 草曰置廣十二步半之得六步以乘正從二十

一步得一百二十六步合問
 草曰置廣五步以分母二乘之得十分子一從
 之得十一於上位置從八步以分母三乘之得
 二十四分子二從之得二十六半之得十三於
 下位上下相乘得一百四十三為實分母二分
 母三相乘得六為法實如法得二十三步六分
 步之五合問

說曰次問廣不可半故半從以乘廣得積步又
 以廣從俱有分當各自通其分令分母相乘為
 法而連除之如前大廣田術也

今有邪田一頭廣三十步一頭廣四十二步正從六
 十四步問為田幾何

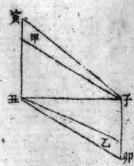
答曰九畝一百四十四步



如圖子丑為一頭廣寅卯
 為一頭廣丑寅為正從移
 甲段補乙段注所謂以盈
 補虛也

又有邪田正廣六十五步一畔從一百步一畔從七
 十二步問為田幾何

答曰二十三畝七十步



如圖子丑爲正廣寅丑爲一畔從子卯爲一畔從移甲段補乙段亦是以盈補虛

術曰并兩邪而半之以乘正從若廣又可半正從若廣以乘并畝法而一并而半之者以盈補虛也

草曰置一頭廣三十步一頭廣四十二步并之得七十二步半之得三十六步以乘正從六十步得二千三百四十步如畝法二百四十步而一得九畝一百四十四步合問

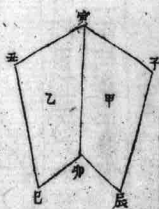
草曰置一畔從一百步一畔從七十二步并之得一百七十二步半之得八十六步以乘正廣六十五步得五千五百九十步如畝法二百四十步而一得二十三畝七十步合問

今有箕田舌廣二十步踵廣五步正從三十步問爲田幾何

答曰一畝一百三十五步

又有箕田舌廣一百一十七步踵廣五十步正從一百三十五步問爲田幾何

答曰四十六畝二百三十二步半



如圖子寅爲舌廣辰卯已爲踵廣寅卯爲正從甲段一邪田乙段一邪田所謂中分箕田爲兩邪田也

術曰并踵舌而半之以乘正從畝法而一中分則爲兩邪田故其術相似又

草曰置舌廣二十步踵廣五步并之得二十五步半之得十二步半以乘正從三十步得三百七十五步如畝法二百四十步而一得一畝一百三十五步合問

草曰置舌廣一百一十七步踵廣五十步并之得一百六十七步半之得八十三步半以乘正從一百三十五步得一萬一千二百七十二步半如畝法二百四十步而一得四十六畝二百三十二步半合問

今有圓田周三十步徑十步臣淳風等謹按術意以步合徑十步今依密率合問爲田幾何

答曰七十五步此於綴術當爲田七十一百三臣淳風等謹依密率爲田七十一百三

又有圓田周一百八十一步徑六十步三分步之一