一九八四年全国部分高等院校
硕士研究生入学考试

# 高等数学

试题与解答
（附：一九八三年部分试题）

武汉水利电力学院数学教研室
《研究生题解》编写组

·一九八四年八月·

# 目　录

## （一）一九八四年试题汇编

清华大学……（1，33）
北京工业大学……（2，37）
哈尔滨工业大学……（3，41）
东北工学院……（4，47）
新疆大学……（5，54）
天津大学……（6，59）
西安交通大学……（7，64）
西北工业大学……（9，71）
上海交通大学……（12，75）
同济大学……（13，82）
浙江大学……（15，91）
南京工学院……（16，103）
华中工学院……（17，107）
武汉水利电力学院……（18，112）
武汉建材工业学院……（19，116）
武汉测绘学院……（20，120）
武汉地质学院北京研究生部……（21，124）
武汉水运工程学院……（22，129）
武汉工学院……（22，132）
武汉钢铁学院……（23，136）
海军工程学院……（26，140）
成都科技大学……（27，146）
重庆大学……（28，152）
昆明工学院……（29，160）
国防科技大学……（30，167）
华南工学院……（31，172）

（二） 一九八四年试题解答……………………（33）

## 附录Ⅰ 一九八三年部分试题汇编

清华大学……………………（177）
北京工业大学……………………（178）
北京航空学院……………………（179）
华北电力学院北京研究生部 电力科学研究院……………………（180）
哈尔滨工业大学……………………（181）
东北工学院……………………（182）
大连工学院……………………（183）
天津大学……………………（184）
天津纺织工学院……………………（186）
机械工业部洛阳拖拉机研究所……………………（187）
华东化工学院……………………（188）
南京航空学院……………………（189）
华东水利学院……………………（190）
通信工程学院……………………（191）
武汉水利电力学院……………………（192）
湖南大学……………………（193）
长沙铁道学院……………………（194）
成都科技大学……………………（195）
成都电讯工程学院……………………（196）
重庆大学……………………（197）
重庆建筑工程学院……………………（198）

附录Ⅱ 试题内容索引与试题内容统计直方图……（200）

后　　记……………………（202）

# 清 华 大 学

**（甲 类）**

一、〔10分〕计算 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$

二、〔10分〕计算 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx\ (x>1)$

三、〔10分〕设有曲面$S$：$\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$

平面$\pi$：$2x+2y+z+5=0$

1．试在曲面$S$上求平行于平面$\pi$的切平面方程

2．试求曲面$S$与平面$\pi$之间的最短距离

四、〔15分〕设$A$为主对角元为零的四阶实对称可逆矩阵

$E$为四阶单位矩阵，$B=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & 0 & & \\ & & K & \\ 0 & & & l\end{pmatrix}$（$K>0$，$l>0$）

1．试计算$E+AB$；并指出$A$中元素满足什么条件时，$E+AB$为可逆矩阵。

2．当$E+AB$可逆时，试证明 $(E+AB)^{-1}A$为对称矩阵。

五、〔10分〕求微分方程 $y''+2x\left(y'\right)^2=0$ 满足初始条件

$y|_{x=0}=1\quad y'|_{x=0}=-\frac{1}{2}$的特解。

六、〔10分〕设曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，其面密度$\mu$为常数，试求该曲面在$0\leqslant z\leqslant\frac{3}{2}$部分的质量中心。

七、〔10分〕计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ 的近似值，要求误差不超过$10^{-3}$

八、〔15分〕设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3$

1．写出二次型的矩阵表示式

2．求正交矩阵$P$，作变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$化二次型为$y_1$，$y_2$，$y_3$的平方和。

3．对一般的$n$元实二次型$f=X'AX$，其中$X=(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)'$

证明：$f$在条件$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=1$下的最大值恰为矩阵$A$的最大特征值。

九、〔10分〕设函数$f(x)$在$(a,b)$上存在二阶导数，且$f''(x)<0$。

试证明：

1. 若$x_0 \in (a,b)$则对于$(a,b)$内的任何点$x$，有$f(x_0) \geqslant f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$等号成立当且仅当$x = x_0$。

2. 若$x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$，且$x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$

则 $$f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right) > \sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i)$$

其中 $k_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = 1$

## 北京工业大学

一、（10分）计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$。

二、（10分）设$y$是方程$G(x, y, z) = 0$确定$x$、$z$的函数，又设$z = F(x, y, z)$，其中$F$、$G$均有一阶连续偏导数，求$\frac{dz}{dx}$。

三、（15分）求由曲面$x^2 + y^2 + z = 4$和$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$包围的空间图形的体积。

四、（15分）给定曲线$C$：$\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$ $(0 < t < \pi)$

设$C$上任意一点$P$处的切线与$x$轴的交点为$T$，正明线段$PT$的长度为常数。

五、（10分）叙述并证明定积分中值定理。

六、（10分）设$0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ $(n = 1, 2 \cdots\cdots)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，试判别级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n \operatorname{arctg} n}$ 的敛散性（要写出判别过程）。

七、（15分）求使曲线积分

$\int_C [e^{-x}\varphi(x)\varphi'(x)y + xy\varphi(x)]dx + [x\varphi(x) + e^{-x}\varphi^2(x)]dy$与路径无关的光滑函数$\varphi(x)$，其中$C$是平面上任何光滑曲线。（光滑函数即具有连续导函数的函数）。

八、（15分）设$f(x) > 0$，$f''(x)$连续，$x \in (-\infty, +\infty)$；

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}, & \text{当 } x \neq 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

1. 求$g'(x)$。

2. 证明$g'(x)$在$(-\infty, +\infty)$内处处连续。

3. 证明$g(x)$单调递增。

## 哈尔滨工业大学

一、1. 求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n}x^n$的和（5分）.

2. 已知$f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$、求$f(x, y)$.　（5分）

二、设函数　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

其中$g(x)$具有二阶连续导函数，且$g(o)=1$；

1. 确定$a$的值，使$f(x)$在点$x=0$处连续；
2. 求$f'(x)$；
3. 讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.　（12分）

三、设$C_0$、$C_1$、…、$C_n$是满足条件

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=0$$

的实数，试证：在0与1之间方程

$$C_0+C_1x+\cdots+C\ x^n=0$$

至少有一实根　（12分）

四、设$u=f(r)$，$r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3}/^2$$

试求$f(r)$的表达式　（12分）

五、计算曲面积分

$$\iint_S xzdydz+yzdzdx+z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

其中$S$为由$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=4a^2$，$x^2+y^2-z^2=0$，$z\geqslant 0$所围成形体的外侧　（12分）

六、设$f(x)$是以$2\pi$为周期的连续函数，并且其付里叶系数为$a_n$、$b_n$。

1. 求$f(x+l)$（$l$为常数）的付里叶系数。
2. 求$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)\,dt$的付里叶系数。　（12分）

七、1. 讨论当$a$、$b$、$c$满足什么条件时方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3=a^3\\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3\\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3\end{cases}$$

有唯一解、无穷多解或无解。 （7分）

2．如果向量β可以用向量$\alpha_1$、$\alpha_2$，…，$\alpha_r$线性表示，试证表示方法是唯一的充要条件是$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$线性无关 （8分）

八、1．求 $\int_C \frac{1}{(z-1)\sin\pi z}dz$，其中$C$为圆$|z-i|=2$． （7分）

2．设$D$是中心各在－1和1半径为2的两圆的公共部分，试求把区域$D$映射为上半平面的保角映射。 （8分）

## 东 北 工 学 院

一、（16分）．

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$的值。

2．设函数$f(x)$二次可微，$f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=2$。
试求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$$

二、（16分）．

1．已知$\begin{cases} y=a(\sin t-t\cos t) \\ x=a(\cos t+t\sin t)\end{cases}$，求 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$，$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$。

2．已知方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$。若引入变数替换$u=x^2+y^2$，

$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$w=\ln z-(x+y)$，且$w=w(u,v)$，试问原方程将变成什么形式？

三、（24分）．

1．计算不定积分 $\int\frac{dx}{(x-3)^2(x^2-6x+8)}$．

2．求由曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$及（$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$）所包围的立体的体积。

3．试求曲线积分

$$\int_C\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

的值，其中积分路径$C$分别为：

1．圆$(x-2)^2+(y-2)^2=2$；

2．沿抛物线$y=x^2$从点$O(0,0)$到点$A(\pi,\pi^2)$

四、（16分）．

1．试求微分方程$\frac{d^3s}{dt^3}-3\frac{ds}{dt}-2s=\sin t+2\cos t$的通解。

2．已知函数$y(x)$满足方程

$$\begin{cases}(x+1)\ y''=y'\\ y(0)=3,\ y'(0)=-2.\end{cases}$$

试证明对所有 $x\geqslant 0$，不等式

$$\int_0^x y(t)\sin^{2n-2}t\,dt\leqslant\frac{4n+1}{n(4n^2-1)}$$

成立，其中正整数$n>1$。

五、（14分）。

已知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^n+(-b)^n}{n(n-1)}(x+1)^n$，其中 $0<b<a<1$，试回答下列问题：

1．确定由这个级数所定义的函数$f_1(x)$的定义域；

2．将这个级数的和函数$f_2(x)$展成关于$x$的幂级数（要注明幂级数的收敛区间）。

六、（14分）。

1．设偶函数$f(x)$的二阶导数$f''(x)$在点$x=0$的一个邻域内连续，且$f(0)=1$，$f''(0)=2$、试证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

绝对收敛。

2．设函数$u(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且满足

$$u(x)=\int_0^x tu(x-t)\,dt$$

试证明$u(x)\equiv 0$。

# 新　疆　大　学

## （理论物理）

一、设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1,\\ -x^2+4x-2, & 1\leqslant x<3,\\ 4-x, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

1．试述本函数的定义域，并作图。

2．当$x=0$，$x=1$，$x=3$时这函数是否连续？　（10分）

二、试证星形曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$上任意一点的切线介于二个坐标轴的一段长等于常数$a$。　（10分）

三、计算下列积分

1．$\int x\ln(x^2+1)\,dx$；　（4分）

2. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}dx$. （6分）

四、

1. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛区间与它的和。 （6分）

2. 利用上面级数的和求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$的和。 （4分）

五、设$u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$，求$u_{xx}$，$u_{xy}$。 （10分）

六、证明曲线积分$\oint_c(x+y)dx+(x-y)dy$与路径$c$无关，并求积分$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$的值。 （10分）

七、求向量场$a=x^3i+y^3j+z^3k$穿过球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧的流量。 （10分）

八、用留数计算 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$. （10分）

九、求把两个相切圆$|z|\leqslant 2$和$|z-3|\leqslant 1$外部区域变成为圆的变换。 （10分）

十、半圆形薄板，板面绝热，边界直径上的温度保持零度，圆周上保持为$u_0$，求稳定状态下的板上的温度分布。 （10分）

## 天 津 大 学

（适用专业：**全校统一试题**）

一、设$w=f(x,\ 2y,\ z)$，而$z=\varphi(xy+y)$，其中$f$具有连续二阶偏导数，$\varphi$二阶可微，求$\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$。 （9分）

二、计算$\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$，其中$N$为正整数。 （9分）

三、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$ （9分）

四、设有空间流速$\vec{V}(x,y,z)=xy\vec{i}$，求$\vec{V}$通过曲面$z=x^2+y^2$位于平面$z=1$以下部分的下侧的通量（流量）。 （9分）

五、

1. 设向量组$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$线性无关。问向量组$a_1+a_2$，$a_2+a_3$，$a_3+a_4$，$a_4+a_1$是线性无关还是线性相关，并给出正明。

2. 设$i$、$j$、$k$是向量空间$R^3$上的一个基，求向量$a=i-j-k$在$R^3$的另一个基$i$，$i+j$，$i+j+k$下的坐标。

3. 设$\sigma$是$R^3$上的一个线性变换，并且$\sigma(i)=i$，$\sigma(j)=i-j$，$\sigma(k)=i+j$。求$\sigma$在基$i$、

$j$、$k$下的矩阵；并求$R^3$的子空间$W=\{X\in R^3 \mid \sigma(X)=0\}$。 （12分）

六、计算$\iiint\limits_{\Omega} y^2 dv$，其中$\Omega$为由平面$z=0$及曲面$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$（常数$a>0$，$b>0$）所围成的区域。 （9分）

七、计算$\int\limits_{\widehat{AOB}}(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$，其中$\widehat{AOB}$为由点$A(-1,1)$沿曲线$y=x^2$到点$O(0,0)$，再沿直线$y=0$到点$B(2,0)$的路径。 （9分）

八、设二阶可微函数$f(x)$满足方程

$$\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt=x^2+e^x-f(x)，求f(x)。$$ （9分）

九、设函数$f(x)$具有性质：

$1°$对定义域内任意两点$x$，$y$有$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$，

$2°$ $f'(0)=a$。

1．证明$f(0)=0$．

2．证明$f(x)$可微．

3．求$f(x)$． （9分）

十、设方阵$A$满足条件$A^2=A$，证明：

1．$A$的特征值只能是1或0．

2．$E+A$可逆，其中$E$是与$A$同阶的单位矩阵。 （8分）

十一、证明：

如果$a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$收竣。

（8分）

## 西 安 交 通 大 学

一、判断下列命题是否正确（不必陈述理由）？对的，在括号中划“√”；错的，在括号中划“×”。（每小题2分，若判错，给负1分）：

1．无界变量必然是无穷大量。

2．如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在无穷多个正整数$n$使不等式

$$|x_n|<\varepsilon$$

成立，那么$x_n$为无穷小。

3．已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且数列$\{x_n\}$收敛于$x_0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

4．设$\psi(x)$是单调连续函数$\varphi(x)$的反函数，且$\varphi(1)=2$，$\varphi'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\psi'(2)=-\sqrt{3}$。

5．$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos^2\theta d\theta=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。

二、计算下列各题：

1．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{\sin^{10}x}$　（4 分）

2．如果$e^{xy}+tg(xy)=y$，求$y'(0)$。　（4 分）

3．设　$f(x,\ y)=(x-a)^{p+1}(y-b)^q+\varphi(x)+\psi(y)$，其中$\varphi(x)$与$\psi(x)$分别是$p$阶与$q$阶可导函数，求$\dfrac{\partial^{p+q}f(x,\ y)}{\partial x^p\partial y^q}$在点（$a+1$，$b$）处的值。　（4 分）

4．求$\int\cos\ (\ln x)\ dx$　（4 分）

5．求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\exp(\sin^2x)}dx$的值　（4 分）

（注：$\exp(\sin^2x)=e^{\sin^2x}$）

6．设$f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中$\varphi(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）有定义，且在$a$可导，求$f'(0)$的值。　（4 分）

7．求三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}e^{|z|}dv$ 的值。　（6 分）

8．计算$\displaystyle\iint\limits_{(s)}xz^2dydz$，其中$(s)$是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的上侧。　（6 分）

三、设由曲线$x^2+3y-5=0$与$x^2-y-1=0$围成的一块平板，面密度设为常数$\mu$，求其对$y$轴的转动惯量。　（8 分）

四、计算$\displaystyle\oint_c\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中$c$为曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\pi^{\frac{2}{3}}}$，其正向为逆时针方向。　（8 分）

五、求方程$y''-2y'-3y=e^{3x}+\cos x$ 的通解。　（10分）

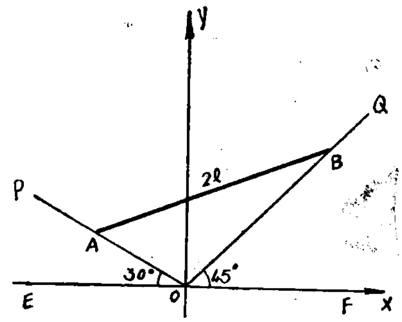
六、设

$$f(x)=x,\qquad x\geqslant 0$$

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

分别求当$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$与$x>\dfrac{\pi}{2}$时，积分$\int_0^x f(t)g(x-t)dt$的表达式。　（8 分）

七、设直线$OP$与$OQ$分别与水平线$EF$成$30°$与$45°$角。一长度为$2l$的直线段$AB$的端点$A$与$B$分别在直线$OP$与$OQ$上移动，如图所示，试求$AB$的中点$M$到直线$EF$的最远与最近距离。（10分）



图(一)-1

八、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$是绝对收敛、条件收敛、还是发散。（10分）

## 西北工业大学

**（工科各专业）**

1．选择题（本题含六个小题，共30分）

下面有六个小题，每一小题都有代号为（$A$）、（$B$）、（$C$）、（$D$）的四个答案供选择，其中只有一个答案是正确的。请把你认为是正确的那个答案前的代号写在题后的括号内。

1．（4分）设函数$f(x)$在$(a,\ b)$内可导，$x_1$、$x_2\in(a,\ b)$，则至少存在一点$\xi$，使下式成立：

（$A$）$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)$，$\xi\in(a,\ b)$；

（$B$）$f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)f'(\xi)$，$a<\xi<b$；

（$C$）$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi)$，$\xi$在$x_1$与$x_2$之间；

（$D$）$f(x_1)-f(x_2)=(x_2-x_1)f'(\xi)$，$x_1<\xi<x_2$。

答：（　　　）

2．（4分）设$D$为$xoy$平面内的一个单连通域，函数$P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$在$D$内有一阶连续偏导数，$l$为$D$内任一闭曲线，则$\oint_l P(x,\ y)dy+Q(x,\ y)dx=0$的必要与充分条件是：

（$A$）$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$；

（$B$）$P(x,\ y)dy+Q(x,\ y)dx=0$为全微分方程；

（$C$）$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}=0$，

（$D$）$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$为全微分方程。

答：（　　　）

3．（4分）设两个常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则级数：

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$一定发散；

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|-|v_n|)$一定发散；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$可能收敛，也可能发散；

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}max\{|u_n|,\ |v_n|\}$可能收敛，也可能发散；

答：（　　　）

4．（6分）由方程

$$z=x+y\varphi(z^2)$$

确定的$z$是$x$、$y$的函数．在下面的条件下，它满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z^2)\frac{\partial z}{\partial x}$$

(A) $\varphi(z^2)$可微；

(B) $\frac{\partial z}{\partial x}$存在；

(C) $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$存在；

(D) $\varphi$可导，且$1-2yz\varphi'(z^2)\neq 0$。

答：（　　　）

5．（6分）曲线$y=\sin 2x$，$y=\cos x$与直线$x=0$，$x=\pi$所围成的平面图形的面积等于：

(A) 1；　　　　(B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$；

(C) $\frac{4}{3}$；　　　　(D) $\frac{1}{2}$。

答：（　　　）

6．（6分）方程$x=\ln ax$（$a$是常数且$a\neq 0$）

(A) 当$a<0$时，没有实根；

(B) 当$0<a<e$时，有一个实根；

(C) 当$a=e$时，有三个实根；

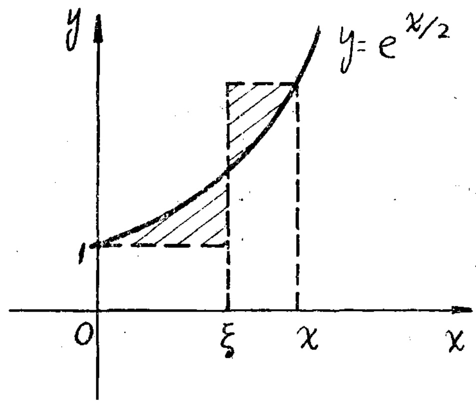
(D) 当$a>e$时，有二个实根。

答：（　　　）

二、（本题10分）对指数曲线 $y=e^{\frac{x}{2}}$

1．（6分）试在原点$o$与点$x$（$x>0$）之间找一点$\xi=\theta x$（$0<\theta<1$），使在这点左、

右两边有阴影部分的面积相等（如右图），并写出θ的表达式。



图(一)-2

2．（4分）求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$

三、（本题12分）

1．（6分）讨论广义积分

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^n}}$$

的收敛性，其中$n>0$，$D$：$x^2+y^2\leqslant R^2$

2．（6分）在直线$x+y=\frac{\pi}{2}$位于第一象限的那部分上求一点，使该点的横座标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大，并求出此最大值。

四、（本题12分）设有幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}x^{2k+1}$

1．（4分）求它的收敛区间；

2．（8分）求它在收敛区间内的和函数。

五、（本题16分）设有方程

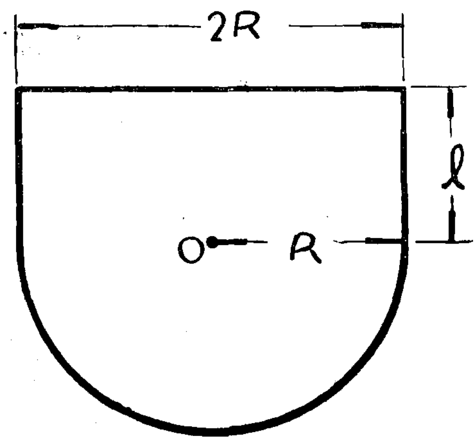
$$(1+x)y=\int_0^x[2y+(1+x)^2y'']dx-\ln(1+x),\quad (x\geqslant 0)\quad y'(0)=0$$

1．（10分）求此方程确定的函数$y(x)$；

2．（6分）将函数$y(x)$展开成麦克劳林（Maclaurin）级数。

六、（本题12分）

在球心位于原点、半径为$R$的均匀半球体靠圆形平面的一旁拼接一个半径与球的半径相等、材料相同的均匀圆柱体，使拼接后的整个立体的重心位于球心，试确定圆柱体的长$l$应为多少（如图）？



图(一)-3

七、（本题八分）设函数$f(x)$具有一、二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，且$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=2$，证明

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f''(x)\}\leqslant -16$$

## 上海交通大学

Ⅰ．高等数学部分(共80分)

一、（12分）选择题（本题共有4个小题，每一个小题都给出代号$A$、$B$、$C$、$D$的四个结论。请选择一个，选对的得3分，不选或选错一律为0分。）

1．$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 9x}{\sin 8x}$等于：（$A$）1、（$B$）$\frac{9}{8}$、（$C$）$-\frac{9}{8}$、（$D$）$A$、$B$、$C$都不是。

2．$f(x)$为$[-1,1]$上的连续函数，则$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\cos y}^{\sin x}f(t)dt$等于：（$A$）$f(\sin x)-f(\cos y)$；（$B$）$f(\sin x)\cos x+f(\cos y)\sin y$；（$C$）$f(\sin x)\cos x$；（$D$）$f(\cos y)\sin y$。

3．若函$f(x,y)$在区域$D$内具有二阶偏导数：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$。

（$A$）则必有$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$。

（$B$）则$f(x,y)$在$D$内必连续；

（$C$）则$f(x,y)$在$D$内必可微；

（$D$）$A$、$B$、$C$都不是

4．判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$的敛散性：

（$A$）$\because 1+\frac{1}{n}>1$，∴级数收敛；

（$B$）$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=0$，∴级数收敛；

（$C$）$\because\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}<\frac{1}{n}$，∴级数收敛；

（$D$）$A$、$B$、$C$都不是。

二、（10分）

1．计算

$$\int\frac{\operatorname{tg}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$$

（$a$、$b$为常数，且$a\neq 0$）

2．设$|y|\leqslant 1$，求$\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx$。

三、（6分）设$Z=y^x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

四、（10分）计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz,$$

其中$\Sigma$为由曲面$y=x^2+z^2$与平面$y=1$，$y=2$所围立体表面的外侧。

五、（12分）求解下列微分方程：

1．$\begin{cases} 2yy'+2xy^2=xe^{-x^2} \\ y(0)=1 \end{cases}$

2．$y''+y=\cos 2x+e^x$

六、（12分）

1．判别级数

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{9}+\frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{9}\right)^2+\frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{9}\right)^3+\frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{9}\right)^4+\cdots$$的敛散性。

2．当$|x|<1$时，试求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$的和。

七、（10分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$0<f(x)<1$，对于$(0,1)$内所有$x$有$f'(x)\neq 1$。证明：在$(0,1)$内有且只有一数$x$，使$f(x)=x$。

八、（8分）设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$$

（$n$为正整数）。试作出$y=f(x)$在$[-1,1]$上的函数图形。

**Ⅱ、工程数学部分（共20分，请任选两题）：**

1．（10分）求方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1+4x_2-7x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

的通解。

2．（10分）设有分布密度的连续型随机变量X，Y相互独立且服从同一分布。试证：

$$P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{2}；$$

3．（10分）若$C$为任意一条绕原点的正向闭曲线，求证：

$$\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{zt}}{t^{n+1}}dt.$$

## 同　济　大　学

### （B　类）

一、1.（4分）设$f(x)=\begin{cases} 1+x & 当x<0 \\ 1 & 当x\geqslant 0 \end{cases}$求$f[f(x)]$。

2.（5分）求$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$。

二、求下列积分（每小题 6 分）：

1. $\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$；　　2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$。

三、1（5 分）设函数$z=z(x, y)$由方程 $F(x, x+y, x+y+z)=0$ 确定，其中函数$F$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

2.（5 分）把下列二次积分换成极坐标形式的二次积分：

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})dy, \ (a>0).$$

四、1.（6 分）把函数$f(x)=\ln\frac{x}{1+x}$展开成$x-1$的幂级数，并指明级数的收敛区间（包括对端点收敛性的讨论）。

2.（6分）把函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{l}x & \text{当 } 0\leqslant x<\frac{l}{2} \\ 1 & \text{当 } \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$ 展开成正弦级数，并指明展开式成立的范围。

五、1.（7 分）由平面$Z=0$、圆柱面$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$以及圆锥面 $Z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ 围成空间区域$\Omega$，求$\Omega$的体积。

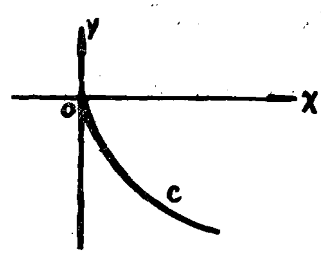
2.（8 分）设$C$为由曲线$y=\sin x$及 $y=2\sin x$（$0\leqslant x\leqslant\pi$）所围成的闭曲线，按逆时针定向，求曲线积分

$$\oint_c (1+y^2)dx+xydy.$$

六、（8 分）证明$\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，（$n$为正整数）。

七、（8 分）设$f'(x)$连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}.$$




图(一)－4

八、（8 分）设$\Sigma$为旋转抛物面 $Z=x^2+y^2$介于 $0\leqslant Z\leqslant 1$ 的部分，$\Sigma$的面密度为1，求$\Sigma$对$Z$轴的转动惯量。

九、（10分）物体在重力作用下沿平面曲线 $C$无摩擦滑下（如图，其中 $y$ 轴负向为重力方向）其下降的速度 $-V_y=a$ 为常量，已知曲线 $C$通过原点，且在原点处的切线斜率为$-1$（即物体在原点的速率为$\sqrt{2}a$），求$C$的方程。

十、（8 分）设$f(x)$在$[x_0, +\infty)$中连续，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\int_{x_0}^{x} f(t)e^t dt=0.$$