20年高中教学经验
20个数学案例及问题推广
20个问题解决及课程教学应用

数学问题解决与课程教学

刘初喜◎著

在学习中，提出新问题
在研讨中，激发新灵感
在教学中，实践新方法

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

20年高中教学经验
20个数学案例及问题推广
20个问题解决及课程教学应用

数学问题解决与课程教学

刘初喜◎著

在学习中，提出新问题
在研讨中，激发新灵感
在教学中，实践新方法

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

数学问题解决与课程教学 / 刘初喜编著. —上海：华东理工大学出版社，2016.6

ISBN 978-7-5628-4661-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 111336 号

策划编辑/ 陈月姣
责任编辑/ 陈月姣
装帧设计/ 视界创意
出版发行/ 华东理工大学出版社有限公司
地　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：021－64250306
网　址：www.ecustpress.cn
邮　箱：zongbianban@ecustpress.cn
印　　刷/ 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本/ 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/ 9.75
字　　数/ 242 千字
版　　次/ 2016 年 6 月第 1 版
印　　次/ 2016 年 6 月第 1 次
定　　价/ 30.00 元

解决问题.我们希望学生通过数学问题的解决能够培养以下几点能力:理解实际问题的能力,抓住要点的洞察能力,抽象分析问题的能力,把文字语言用数学语言表达出来并形成数学模型的"翻译"能力,运用数学知识的能力,检验实际结论的能力.各方面能力加强了,学生就能对知识触类旁通,举一反三,化繁为简.加强数学应用性问题的探究,对学生而言,既可以巩固和升华基础模型,又能充实和提高数学建模思想,从而发展数学探索能力.

本书不完全以知识点为主线,而根据教学方法来组织安排内容,这本身就是一种新的尝试.尽管我们作了较大的努力,但毕竟水平有限,编写时间较紧,难免会有不尽如人意的地方,恳请读者批评指正.

2016 年 3 月 15 日　编者

目 录

上篇

数学问题解决的含义

第 1 章　数学问题和数学问题解决

1980 年美国数学教师联合会给第四届国际数学教育大会提交了一份纲领性报告:《关于行动的议程——关于 80 年代中学数学的建议》.这份报告明确指出:“问题解决是 20 世纪 80 年代学校数学的核心”(第一条),“数学课程应当围绕问题解决来组织”,“数学教师应当创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境”,“在问题解决方面的成绩如何,将是衡量数学教育成败的有效标准”.此后在《美国学校数学课程与评价标准》(2000)中,“作为问题解决的数学”是各个年段数学课程的首要标准;全美数学督导委员会从职业教育和继续教育的要求出发,提出 21 世纪学生应具备的 12 种“基础”的数学能力中,问题解决是其中的首要能力.这在世界各国掀起了以数学问题解决为主题的一系列数学教育改革和研究的热潮.

20 世纪 80 年代以来,问题解决已成为国际数学教育的一种潮流.由于它的研究与开发不仅关系到如何提高学生的科学文化素质、思想品德素质和教学质量问题,而且也与中小学数学教学内容、课程设置、教材教法、教学模式等各项改革密切相关.

一、数学问题和数学问题解决的含义

数学问题来源于人类的生产、生活实践,来源于人们了解自然、认识自然的科技活动.古代巴比伦人在观测天文、丈量土地和进行贸易中形成了位值观念和六十进制数系,并发现了大量数表、计算方法以及包括解一元二次方程在内的许多数学问题.早在公元前 5 世纪,古希腊人就已经形成后来被称为几何三大作图问题的倍立方问题、三等分任意角问题与化圆为方问题.成书于公元 1 世纪前后的《九章算术》,集中国古代数学问题之大成,记载了我国古代劳动人民在生产、生活和社会活动中形成的各种数学问题 246 个.《九章算术》是我国古代传统数学中具有最深远影响的一部著作,它反映出我国古代数学是怎样从实际生活中分析出数量关系,建立数学模型,又怎样从研究具体的数学问题入手,通过抽象与归纳而得到解决问题的数学方法的.纵观数学的发展历史,可以看到数学问题在数学的历史进程中的重要作用.它既是数学发现的起点,又是数学发现的路标;它既有数学发展的探索和导向作用,又可以为数学理论的形成积累必要的资料;它既可以导致数学的发现和理论的创新,又可以激发人们的创造和进取精神.

关于问题,不同的数学家给出了不同的定义:

波利亚在《数学的发现》中指出某个人“有问题”是“有意识地寻求某一适当的行动,以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的”.解决问题指的是寻找这种活动.如果“有问题”中“问题”是关于数学方面的内容,那么这个问题就是数学问题.

第六届国际数学教育大会指出:一个数学问题是一个人具有智力挑战特征的,没有现成的直接的方法、程序或算法的未解决的问题情境.

其实这些观点具有共同性,他们都认为“数学问题是指不能用现成的数学经验和方法解决的

一种情境状态."现在数学教育从事者们认为,如果对一个人来说,一个系统的全部元素、元素的性质和元素间对的关系都是已知的,那么这系统对于他来说是稳定的.如果系统当中至少有一个元素是未知的,那么对于他来说这个系统是问题.如果这个系统中的元素是关于数学的,那么这个问题是数学问题,稳定系统可以相对说是数学习题.按波利亚的观点就是:没有困难就没有问题.

数学问题有两个特别显著的特点:

一是障碍性,即学生不能直接看出问题的答案.

二是可接受性,即它能激起学生的学习兴趣,学生愿意用已有的知识去解决.但是数学问题是因人而异的,每个人的认知水平、心理发展等不一,所以对于甲来说是问题,但对乙来说就不一定是问题了.

数学问题作为一个问题系统,它的组成成分有:

(1) 条件信息:问题系统中已知的和给定的东西;

(2) 目标信息:数学问题求解后所要达到的结果状态;

(3) 运算信息:将数学问题从问题状态转化成目标状态的一系列的操作方式.

二、数学问题解决及其特征

首先,什么是数学教育中的"问题解决",数学教育从事者们给出了多种含义,总结起来有如下几种:

(1) 问题解决是一种教学目的.此观点认为:学习数学就是为了学习怎样解决问题.在我国课程标准目标中,问题解决也是重要部分之一.

(2) 问题解决是一种技能.问题解决是解决问题的方法、技巧以及把数学用于各种情境的能力.

(3) 问题解决是一种教学形式.应当在教学中增加讨论、研究问题解决和探索等形式.

(4) 问题解决是一种心理过程.在数学学习心理学中,问题解决是指一系列有目的指向的认识操作过程,是以思考为内涵、以问题为目标定向的心理活动过程.

其实以上的观点总结起来,数学问题解决就是综合地、创造性地运用各种数学知识去解决那种非单纯练习题式的问题,包括实际问题和源于数学内部的问题。问题解决有两种基本类型:创造性问题解决,它需要产生新的程序的问题解决;常规性问题解决,是运用已知或现成程序的问题解决.而数学中的问题解决一般属于创造性问题解决.以问题解决为数学教育的中心是指应当努力帮助学生学会"数学地思维".

三、数学问题解决的功能

1. 问题解决有利于提高学生数学知识的掌握水平

数学问题解决不是简单的模仿操作,而是一种加深数学知识的理解并灵活运用所学内容的过程.因此数学问题解决的学习有利于学生提高数学知识技能的掌握水平和对数学思想、经验的理解水平.

2. 问题解决能培养学生运用所学数学知识解决实际问题的能力

数学问题解决能使学生在原有的数学认知结构中去提取有用的信息,并运用于新的情境中,这一过程可以培养学生检索和提取有用信息的能力、将静态知识转化为动态知识的这种知识内化的能力,而且这一过程培养学生的知识技能迁移能力,使得学生能够主动运用原有的数学内容发现新问题并加以分析解决.

3. 问题解决能有效培养学生的数学意识

在数学问题解决中,能够让学生明确地认识到所学的数学知识的重要性,能培养学生用数学的眼光去看世界,以数学的思想去分析解决问题.

4. 问题解决能培养学生的探索精神和创新能力

数学问题中的问题是不能通过原有的知识直接获得答案的,它需要学生自己去思考、去探索,而不断地思考、探索就是对学生的探索精神和创新能力的培养.

四、数学问题解决的心理过程分析

许多心理学家与教育家进行了实验研究提出来多种结构模式,其中有:

1. 杜威模式

杜威将问题解决的过程划分为五个阶段,即:感觉疑难、确定疑难、提出可能答案、考虑各种结果、选择解答的方法.

2. 罗斯曼模式

罗斯曼将问题解决过程分为七个阶段,即:观察疑难现象、形成问题、调查资料、建立答案、考验答案、形成新观念、检验新观念.

3. 吉尔福德模式

吉尔福德是在他创立的智力活动的结构学说的基础上提出问题解决过程的结构模式的,这一模式将问题解决过程分三个阶段:

第一,初始信息分类阶段,也就是整理学生原有的或题目给定的信息为解决问题做准备的阶段.

第二,归类信息存储阶段,即对有用信息的记忆.

第三,材料转换阶段,也就是将我们认知记忆的材料转化成新的概念,形成解决问题的方案,并加以实现,检验的过程.

4. 波利亚模式

波利亚认为数学问题解决的过程必须经过理解问题、明确任务,拟订求解计划,实现求解计划,检验和回顾.

第 2 章　数学问题解决与课堂教学

如前所述,由于数学问题来源于人类的生产、生活实践,来源于人们了解自然、认识自然的科技活动,一般来说,它是非常规的、由情境给出的一种实际需求,并且具有一定的探究性.因此,数学问题的解决一般要通过以下几个过程来实现.

1. 分析问题背景,寻找数学联系.通过对所给问题的分析,理解问题背景的意义,从中找出它们与哪些数学知识有联系,以便建立有关的数学模型,使实际问题数学化,从而使非常规问题转化为常规问题来解决.在这个过程中,要充分发挥学生的积极主动性,必要时可以让学生分组开展讨论,以集体的力量和智慧攻克难关.分析问题的步骤非常重要,万事开头难,只要攻破了这一关,学生就会信心倍增,就会以更高的热情投入后面问题的探讨中去.在学生自主分析的同时,教师可在关键处给以必要的指导和点拨,以控制教学的进度,提高课堂教学效率.

2. 建立数学模型.在分析的基础上,将实际问题符号化并确定其中的关系,进而写出由这些符号和关系所确定的数学联系,用具体的代数式、函数式、方程式、不等式或相关的图形、图表等把这些数学联系确定下来,就形成了数学模型.在建立数学模型的时候,可要求学生独立完成,因为前面的分析过程,已经使问题明朗化,一般情况下学生都可以独立完成数学建模任务.对于有困难的学生,也可以通过小组讨论来完成这一工作.

3. 求解数学问题.根据数学模型的特征,可采用适当的数学思想、方法和数学知识,对数学模型进行求解.这里主要强调学生用数学的意识的培养和形成.一般情况下,只要数学模型建立起来以后,学生自然会去联想已学过的数学知识和熟悉的数学思想方法,通过推理和演算,达到问题的解决.

4. 检验.将数学问题的求解结果返回到实际问题中去进行检验,看它是否与实际问题的情形相吻合,从而确定是否要修改模型或另辟蹊径.

5. 交流和评价.在学生进行研讨、解决问题的过程中,教师要通过巡回观察及时了解和掌握学生的学习进度,对于有困难的学生及时给予必要的指导,也可以作为学生的伙伴和助手,参加到学生的探究活动中去.在多数学生完成任务以后,可组织学生进行交流,然后对各种模型进行评价.学生通过交流、评价,进一步完善各自的模型,同时也达到互相学习、取长补短、共同提高的目的.

6. 推广.如果问题得到了解决,看它是否可以进行推广.如果解决过的问题是一个具体问题,就可引导学生通过归纳、类比和猜测,得到普遍的结论,然后再证明这个结论.

例如:已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$,

(1) 求 $f(1)+f(3)-2f(2)$;

(2) 求证:$|f(1)|$,$|f(2)|$,$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

[**解**] (1) 显然 $f(1)+f(3)-2f(2)=(1+a+b)+(9+3a+b)-2(4+2a+b)=2$;

(2) 显然要利用(1)的结论,我们有

$$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|\geqslant|f(1)+f(3)-2f(2)|=2,$$

不妨设 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中最大值为 t,

则 $4t\geqslant|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|\geqslant 2$,

所以 $t\geqslant\dfrac{1}{2}$.从而问题得证.

此题引起了我们的反思:为什么先要求 $f(1)+f(3)-2f(2)$,而不求别的关系式,正好 $f(1)+f(3)-2f(2)$ 的结果是定值 2,难道这是偶然巧合吗?是不是别的关系式的结果都不是定值?其实 $f(1),f(2),f(3)$ 的线性关系式只有一个,对于本题来说,就是 $f(1)+f(3)-2f(2)=2$,解决本题的关键就是先要找出这个关系式.那么这个关系式究竟怎么找,我们不妨将本题推广为一般情形.

已知函数 $f(x)=x^2+ax+b,m<n<p$,

(1) 求出 $f(m),f(n),f(p)$ 的关系式;

(2) 求证:$|f(m)|,|f(n)|,|f(p)|$ 中至少有一个不小于 $\dfrac{(n-m)(p-n)}{2}$.

[解] (1) 易知 $m^2+ma+b=f(m)$, ①

$n^2+na+b=f(n)$, ②

$p^2+pa+b=f(p)$. ③

把它看成是关于 a,b 的方程组,先联立①②,分别求出 a,b,

再将它代入③,便能得到 $f(m),f(n),f(p)$ 的关系式.

具体求法是:②-①,并化简得 $a=\dfrac{f(n)-f(m)}{n-m}-(m+n)$,

将 a 的表达式代入①,便能得到

$$b=\frac{nf(m)-mf(n)}{n-m}+mn.$$

再将 a,b 的表达式代入③,并经化简整理,

便能得到 $f(m),f(n),f(p)$ 的关系式

$$(p-n)f(m)+(m-p)f(n)+(n-m)f(p)=(n-m)(p-m)(p-n).$$

(2) 不妨设 $f(m),f(n),f(p)$ 三者中的最大值为 t,则 $|(p-n)f(m)+(m-p)f(n)+(n-m)f(p)|$

$\leqslant(p-n)|f(m)|+(p-m)|f(n)|+(n-m)|f(p)|$

$\leqslant(p-n)t+(p-m)t+(n-m)t=(2p-2m)t$.

而 $(p-n)f(m)+(m-p)f(n)+(n-m)f(p)=(n-m)(p-m)(p-n)$.

所以 $(2p-2m)t\geqslant(n-m)(p-m)(p-n)$.

所以 $t\geqslant\dfrac{(n-m)(p-n)}{2}$.

所以 $|f(m)|,|f(n)|,|f(p)|$ 中至少有一个不小于 $\dfrac{(n-m)(p-n)}{2}$.

数学问题解决教学是通过创设情境，激发学生的求知欲望，使学生亲身体验和感受分析问题、解决问题的全过程.它强调使用数学的意识，培养学生的探索精神、合作意识和实际操作能力.通过问题解决能使学生对数学知识形成深刻地、结构化地理解，形成自己的、可以迁移的问题解决策略，而且产生更为浓厚的学习数学的兴趣、形成认真求知的科学态度和勇于进取的坚定信念.由于问题解决教学是近年来受到广泛重视的一种教学模式，它强调把学习设置到复杂的、有意义的问题情境中，通过让学习者合作解决实际问题来学习隐含于问题背后的科学知识，形成解决问题的技能，并形成自主学习的能力.所以，问题解决教学是通过高水平的思维来进行学习，来建构知识的.

传统的教学模式比较重视基础知识教学，基本技能训练，数学计算、推理和空间想象能力的培养，而不重视学生实践能力的培养和实际操作的训练，致使学生应用数学的意识不强，创造能力较弱.学生往往不能把实际问题抽象成数学问题，不能把所学的数学知识应用到实际问题中去，对所学数学知识的实际背景了解不多.学生机械地模拟一些常见数学问题解法的能力较强，而当面临一种新的问题时却办法不多，对于诸如观察、分析、归纳、类比、抽象、概括、猜想等发现问题、解决问题的科学思维方法了解不够.在中小学数学课程中体现问题解决的思想，在课堂教学中采用问题解决的教学模式，为克服上述问题开辟了一条有效的途径.应当看到，在解决来自实际和数学内部的数学问题中，问题解决的过程和方法是基本相同的.不仅如此，这种过程和方法与解决一般的、其他学科中问题的过程和方法有很多共同之处.在数学问题解决中学习的过程和方法可以迁移到其他学科的问题解决过程中.因而通过数学问题解决，可以较快地教给学生一般的问题解决的过程和思想方法，从而提高学生的综合素质和能力.

在数学问题解决的教学过程中，既要注重发挥学生的主体作用，又要重视教师主导作用的发挥，二者相辅相成，不可偏废.特别是在讲到探索、猜想、发现方面的问题时要侧重于“教”；有时候可以直接教给学生完整的猜想过程，有时候则要较多地启发、引导和点拨.因此，在一些典型的数学问题解决教学中，教给学生比较完整的解决实际问题的过程和常用方法，以提高学生解决实际问题的能力，应引起广大数学教师的高度重视.

我的几点思考

教育家孔子说过：疑是思之始，学之端.培养学生的问题意识是中学数学课程改革和发展学生潜力的需要.现代心理学研究也表明：意识到问题的存在是思维的起点，没有问题的思维是肤浅的、被动的思维.具有强烈问题意识的思维，才能促进人们去发现问题，解决问题，直至新的发现.在课堂教学中，教师注重培养学生的问题意识，对开发学生的智力、培养学生的创新精神和自主学习能力有着举足轻重的作用.

思考一：是否为学生提问创设环境

现象：实践发现学生随着年龄的增长提出问题的次数反而越来越少.我们忍不住要问学生问题意识薄弱的根源在哪里？“小学生踊跃举手，初中生很少举手，高中生坚决不举手”为诸多同仁所熟知.从这一现象中我们能够意识到这是一个渐变的过程.在实际的教学中，笔者也有切身体会：一是学生怕讲错或觉得提出的问题非常浅显会受到指责或嘲笑；二是老师是知识的权威，视知识的传授为唯一的目的，教师对学生大胆的发问、质疑不予重视或视为刁难、捣乱、钻牛角尖，

并加以批评、训斥甚至讽刺和挖苦,扼杀了学生的问题意识.由此可见教师有着不可推卸的责任.

解决策略:

首先,要营造民主、和谐的课堂教学氛围.民主、和谐的课堂教学氛围是启发学生积极提问的重要前提,是传授知识的无声媒介,是开启智慧的无形钥匙,它能消除学生的紧张感、压抑感和焦虑感,使学生有一种心理自由和心理安全感.我们教师要善于营造民主、和谐的课堂教学氛围,要放下尊严和架子,从讲台上走下来,与学生做朋友,要用体现需学生特点的教学方式,一起在知识的海洋中探索,成为学生的合作者,促进者.一石激起千层浪,心里想提的问题就多了.只有在民主、和谐的氛围中,学生的个性得以张扬,潜能得以激活,问题才能得以发现.

其次,要留给学生提问的时间和空间.爱因斯坦曾说过:“提出一个问题往往比解决一个问题更重要.”所以,我们在教学中要特别注意给学生一定的时间和空间.然而,自主不等与自觉,也不等于不要老师教,学生自主有余,似乎成为学习的主人,却收获甚微.因此,给学生提问题的时间和空间也需有“度”.当学生“山穷水尽疑无路”时,教师要有意识地引导显得非常必要,让他们步入“柳暗花明又一村”的佳境,这样才能达到预期的目的.

思考二:对学生在课堂教学中提出的问题能否做到合理的评价

心理学家杰姆士说:“人性最深层的需要就是渴望得到别人欣赏和赞美.”如果学生的提问得不到及时的赞赏和恰如其分的评价,则会丧失自信心.

现象:数学知识源于生活.而数学问题也是存在于生活中的方方面面.在数学学习过程中,绝大部分学生基本上不提问题或提不出问题,课堂教学中也以教师提问学生为主.究其原因主要有:(1) 学生就是有问题也不肯提出来,学生普遍有这样的想法,如:我提出的问题会不会被同学们耻笑?我讲不清楚,老师会不会批评我?别人不提问我也不提等;(2) 学生没有提问题的习惯,也不知道如何提出问题.由于长期受应试教育的熏陶,学生已习惯于等着教师告诉答案,缺乏提问题的能力和习惯;(3) 教师自身的因素,如:不重视,不知道怎么做,怕浪费时间等等.所以,在数学课堂教学中,要求老师具有各方面的综合素质,来积极引导学生发现问题及提出问题.还有的老师对学生提出的问题敷衍了事,没有给予耐心的说明和解释.这实际上是在否定学生的学习过程,会严重打击他们自主萌发的探索精神.

解决策略:我们对学生的主动提问应采取的态度是:无论自己有多忙多烦,都要做到有问必答,不能随便敷衍.平时在教学过程中对学生要平等相待,不能动不动拿老师的权威来压制他们.老师做到有效的引导、提示,其中可以包括知识的转化,实际问题的解决.在课堂上可以采取形式多样的活动,比如小组竞赛,学生板演,师生问答.在这些过程中,可以由学生发现出现的问题,并得出解决方案.这样的方式可以极大程度地提高学生的学习兴趣,并从中找到乐趣,体现学生的价值,增加学生的自信.在这个过程中学生会面临很多临时的问题需要自己和团队去解决,这样还能培养学生团队协作的意识.

对培养学生问题意识的几点设想

首先,设计开放性问题,培养学生的发散思维能力.发散思维是创造性思维的核心,培养学生的发散思维是培养创造能力的中心环节.在数学教学中,教师除了要有计划、有目的地设计一些一题多解、一题多变、一法多用等问题来培养学生全方位、多层次地探索问题的能力,还应设计一

些开放型问题,通过寻求问题的结论或某种规律,来训练学生的发散性思维,培养他们的创造精神.

其次,设计探究性问题,以培养学生求异思维的能力.求异思维,就是根据一定的思维定向,另辟蹊径,大胆设想,标新立异的思维活动,它是创造发明的动力.因此,教师应在数学教学中设计一些探究型问题,鼓励学生敢于设想,大胆创造,随时注意多方位思考,变换角度思维,使他们的思路开阔,处于一种主动探索的心理状态,从而通过活跃的思维达到求异、求佳、求新的目的.

第三,鼓励质疑问难,增强学生提问的自信度.《课程标准》明确指出:要启发学生动脑想问题,鼓励学生质疑问难,提出自己的独立见解.对于中学生来说,能提出一个有思考价值的问题,发现一种新的解题思路或方法,都是创新意识和创造能力的体现.所以,教师要给学生提供充分的“质疑”的机会,更好地培养学生的问题意识.质疑是探求知识,发现问题的开始.“疑”是创新思维的“火花”,是创新的前提.因此,在教学过程中,要重过程,轻结论,教给学生思维和学习的方法,引导学生开动大脑参与学习,使学习内容与大脑中原有的知识经验产生同构,激励学生树立创新的自信.古人云:“小疑则小进,大疑则大进.疑者,觉悟之机也,一番觉悟,一番长进”.教学实践表明,强化学生的问题意识,提高解决问题的能力,是培养学生创新意识和实践能力的重要途径.因此,在课堂教学中不仅要学生会“答”,更要会“问”,给学生创造一个良好的学习环境,培养学生的问题意识.

第四,重视合作交流,提高学生提问的参与度.以往教学是个体之间孤立和封闭的学习活动,缺少知识和经验的交流,因而学习的主动性,全凭个人自觉性和能力为基础,很容易对学习产生厌倦.合作交流是以学生的活动为主,教师为学生创设宽松愉悦的活动环境,给学生自主交流的时间和空间,这样有利于发挥学生的创造才能.在自主交流中,要强调群体间经验交流,学生可以相互合作,相互启发,相互借鉴,产生更多有质量的问题,让学生形成自信、自强的精神;同时,同伴之间的交流还使学生养成容纳不同意见的习惯,从而使谦虚和自信有机结合起来,使得每个人都可以充分地无拘无束地表现自己.课堂教学实际是师生之间及学生之间的人际交流过程,师生关系融洽,课堂氛围宽松、和谐,对教学过程起着积极影响的作用.

随着素质教育的全面推进,“创新精神与实践能力”的培养已成为素质教育的核心.问题解决能力就是“创新精神与实践能力”在数学教育领域的具体体现,是一种重要的数学素质.本课题力图通过教学实践研究,寻找“问题解决”能力培养与课程教材知识体系学习之间的互补与平衡,形成稳定简明的教学理论框架及其操作性较强的数学课堂教学模式,促进学生的数学意识、逻辑推理、信息交流、思维品质等数学素质的提高,为学生的自主学习、发展个性打下良好基础.

第 3 章 数学问题大师——戴维·希尔伯特

戴维·希尔伯特(Daivd Hibert)是二十世纪上半叶德国乃至全世界最伟大的数学家之一.他在横跨两个世纪的六十年的研究生涯中,几乎走遍了现代数学所有前沿阵地,从而把他的思想深深地渗透进了整个现代数学.希尔伯特是哥廷根数学学派的核心,他以其勤奋的工作和真诚的个人品质吸引了来自世界各地的青年学者,使哥廷根的传统在世界产生影响.希尔伯特去世时,德国《自然》杂志发表过这样的观点:现在世界上难得有一位数学家的工作不是以某种途径导源于希尔伯特的工作.他像是数学世界的亚历山大,在整个数学版图上,留下了他那显赫的名字.

一、希尔伯特与他的“23 个问题”

希尔伯特(1862—1943),生于德国名城哥尼斯堡,这里是著名哲学家康德一直居住的城市,希尔伯特出生时正是普鲁士王国首相俾斯麦积极推行德国统一建立德意志帝国时期,统一的德国促进了国内工业、技术、科学和教育的发展,从而也使德国的数学突飞猛进.

希尔伯特不是高斯那样的天才人物,也不如他的朋友闵可夫斯基年纪轻轻就荣获法国科学大奖而名扬国际.他在 19 岁时才进入家乡的哥尼斯堡大学学习,22 岁大学毕业并获博士学位,从这时起开始了他的研究生涯.

1895 年,希尔伯特前往世界数学中心——哥廷根大学任教授,1899 年,出版的《几何基础》开创了公理化方法的先河,此书之后被再版达 17 次之多.

1899 年,希尔伯特的骄人成就吸引了第二届国际数学家大会的注意,特意邀请他在大会上作主要发言.

1900 年 8 月 6 日,第二届国际数学家大会在巴黎召开,38 岁的数学家希尔伯特走上讲台,发表了题为《数学问题》的著名讲演.他根据过去特别是十九世纪数学研究的成果和发展趋势,提出了 23 个最重要的数学问题.这 23 个问题通称希尔伯特问题,后来成为许多数学家力图攻克的难关,对现代数学的研究和发展产生了深刻的影响,并起了积极的推动作用,希尔伯特问题中有些现已得到圆满解决,有些至今仍未解决.他在讲演中所阐发的相信每个数学问题都可以解决的信念,对于数学工作者是一种巨大的鼓舞.希尔伯特的 23 个问题分属四大块:第 1 个—第 6 个问题是数学基础问题;第 7 个—第 12 个问题是数论问题;第 13 个—第 18 个问题属于代数和几何问题;第 19 个—第 23 个问题属于数学分析.

据统计,1936 年至 1974 年被誉为数学界诺贝尔奖的菲尔兹(Fields)国际数学奖的 20 位获奖人之中,至少有 12 人的工作与希尔伯特的问题有关.1976 年美国数学会评论 1940 年以来的美国十大数学成就,就有 3 项是希尔伯特问题的解决.1975 年,在美国伊利诺斯大学召开的一次国际数学会议上,数学家们回顾了四分之三个世纪以来希尔伯特 23 个问题的研究进展情况.当时统计,约有一半问题已经解决了,其余的大多数问题也都有重大进展.

科学发展的每一时代都有自己的问题，一个科学家如此自觉地、集中地提出一整批问题并且持久影响一门学科的发展在科学发展史上还是罕见的.

值得高兴的是中国数学家在希尔伯特的第 8 个和第 16 个问题上做出了重要贡献.

第 8 个问题是“素数问题”，陈景润的成果至今在世界上领先，他部分解决了这个问题.

第 16 个问题是“代表曲线和代数曲面的拓扑问题”.中国数学家董金柱、叶彦谦、秦元勋、蒲富金、史松龄、王明淑等的研究成果世界领先.1983 年，秦元勋进一步证明了二次系统最多有 4 个极限环，并且是(1,3)结构，从而最终解决了二次微分方程的解的结构问题，并为研究希尔伯特第 16 个问题提供了新的途径.

二、希尔伯特的数学贡献

希尔伯特的报告不是大会报告，而是数学史组的分组报告，从这个意义上来讲，那时人们的确重视科学发展的历史，而也正是这种重视历史的心态，才使这些最伟大的数学家成就其历史的伟业.从另外一个意义上来讲，希尔伯特的 23 个问题是一个继往开来的文献.它不仅总结了 19 世纪几乎所有未解决的重要问题，这些问题还推动了 20 世纪数学的进步.因此各数学大国，如美国、苏联、日本以及法国、德国和英国的数学家或组织起来或单独研究希尔伯特问题的历史和现状，并进一步提出新的问题.

回顾一个世纪数学的发展，我们的确可以看到希尔伯特通过他自己的工作和提出的问题，把 20 世纪数学带上一条健康发展的道路.到 20 世纪末，数学已发展成庞大的领域，已经找不到一个人来提出全面数学问题的清单，他的工作需要几十人来代替.这些领袖人物虽然不像希尔伯特那样广博，但绝不是狭窄领域的专家，他们都多少传承了希尔伯特的思想，在学科交叉上预示了数学发展的未来.

三、希尔伯特教育观

戴维 · 希尔伯特，作为一位数学界的时代领袖，德国人民伟大的儿子，于 1943 年在哥廷根与世长辞.人们开始回顾他所留下的精神印记和慢慢消失在地平线下的那个数学时代，似乎感到希尔伯特的时代比起以往和以后都贯穿着更完美的平衡——精通单个具体问题和形成一般抽象概念之间的平衡.希尔伯特通过自己的工作做出了巨大的贡献，开创了二十世纪初那个数学大发展的时代，我们将这个时代称为希尔伯特的时代.希尔伯特是推动着这个时代的数学的人.“在以后的时代里我们还没有找到可以达到与他相比的崇高形象”(赫尔曼 · 外尔语).

戴维 · 希尔伯特对数学的贡献和影响是我们所无法估量的，但他的崇高人格更加为人称道的.许多在数学发展中起了相当大作用的年轻数学家，都曾在 1900 至 1914 年间侨居哥廷根，师从希尔伯特.而他的问题、观点和数学研究方法的影响更远远超过直接受他教导所鼓舞的那些人的范围.希尔伯特的政治人格同样崇高，他是独一无二地没有国家和种族偏见的人，他反对沙文主义，并且主张“科学无国界”，在政治上始终站在自由和民主的一方.我们研究希尔伯特的数学思想和数学成就，以及产生这种成就的源泉，就要领略他伟大的人格，追溯他的人生轨迹.

希尔伯特提出，要以问题解决为基础来改革数学教学和课程，为学生提供能够反映所要学的