线性代数

XIANXINGDAISHU

主　编　程开敏　陈相兵

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

内容提要

本书严格按照应用型本科大学的数学教学大纲进行编写,并且在满足教学基本要求的前提下适当降低对理论推导的要求,注重解决线性代数问题的矩阵方法,力求做到语言通俗,便于自学.本书内容包括行列式,矩阵,线性方程组,特征值和特征向量,二次型,共5章,书末附有习题参考答案.

本书可供应用型本科高校各专业使用,也可供相关科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 程开敏,陈相兵主编.—重庆:重庆大学出版社,2017.1

ISBN 978-7-5689-0295-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①程…②陈… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 303673 号

线性代数

主 编 程开敏 陈相兵

副主编 王 妍 赵春燕

钟 琴 周 鑫

责任编辑:文 鹏 版式设计:文 鹏

责任校对:张红梅 责任印制:邱 瑶

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@ cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆荟文印务印刷

*

开本:720mm×960mm 1/16 印张:14.5 字数:246 千

2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5689-0295-3 定价:38.00 元

前　言

大学数学是自然科学的基本语言,是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于非数学专业的学生而言,大学数学的教育,其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已.事实上,在大学生涯中,就提高学习基础,提升学习能力,培养科学素质和创新能力而言,大学数学是最有用且最值得大学生努力的课程.而线性代数课程又是大学数学的主干课程之一,所以对低年级大学生而言,学好线性代数这门课程显得尤为重要.

自20世纪80年代以来,随着计算机应用的普及,线性代数理论被广泛应用到科学、技术和经济管理领域,线性代数课程也成为高校理工科和经济管理类各专业的一门公共基础课.它涵盖了行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值和特征向量以及二次型和线性变换等内容.在线性代数课程中,概念多、内容广,并且都较为抽象,有一定的学习难度.所以几十年来,我国的大学数学教育工作者一直都在线性代数课程上尝试着各种教学实践、探索和改革,也涌现了一大批教学成果。但是,目前国内的线性代数课程教学中也存在一些不可忽视的问题,如重理论、轻应用,重理论推导、轻数值计算,教学形式、教学手段比较单一等,同时也经常步入“学生学起来难,老师教起来难”的两难境地.由于教学中使用的教材对教学具有导向性,所以这些问题的出现或多或少都与使用的教材有关联.针对目前教学中出现的问题,我们的教学团队总结数年的教学经验,对线性代数课程教学做了不少实践与探索,最后决定出版一本适合于应用型普通本科高校的优质教材.

本教材具有以下特点:

1.受众对象明确.本教材是完全按照普通应用型本科高校学生培养计划和目标来编写的,即本教材面向的对象为应用型普通本科高校的学生.

2.合理编写教材内容.在本教材编写的过程中,我们吸收了国内现有教材的优点,力求做到知识引入自然合理,文字阐述通俗易懂,便于自学.在内容上做到合理取舍,避免偏深、偏难的理论证明,在保证知识完整性的同时,力求做到内

容的难易适中,以适应应用型本科生读者的需要.

3.用问题贯穿每个章节.在本教材的编写中,我们一直用问题来引导每一章节,使得读者清晰地知晓每个章节需解决的重要问题,通过问题学习知识和方法,然后又通过所学方法来解决更深层的问题.

4.注重方法和技能的传授.考虑到我们受众读者的理论知识层次,我们在编写该教材时,更加偏向对线性代数课程方法和技能的传授,即对那些较深的定理我们只需重点强调它们的意义和应用,而对于那些定理的证明只做简化处理,尽量多做直观解释,增加方法性的例题,努力做到有助于学生理解基本概念和基本原理,提高学生的学习兴趣,增强学生融会贯通地分析问题和解决问题的能力.

5.安排适当精准的课后习题.为方便读者做巩固训练,我们在每个小节后都附有少量的练习题,这部分题全为基础题,可作为读者巩固所学的课后练习题,也可作为教师上课时所布置的课堂练习题.另外,为了方便读者做自我检测,同时也为了那些学有余力或有志于考研的读者,我们特别在每章末附有总习题,总习题分为 A、B 组,A 组是基础题,B 组是历年考研真题.

正如美国《托马斯微积分》的作者 G.B.Thomas 教授所说,“一本教材不能构成一门课;教师和学生在一起才能构成一门课”,教材只不过是支持这门课程的信息资源.教材是死的,课程是活的.课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体,所以要使得教材作用发挥充分,就必须真正做到以学生为中心,以教师的教学为核心,让教与学形成良性的互动.

全书由程开敏、陈相兵主编,其中参加编写的作者有:陈相兵(负责第一章),程开敏(负责第二章),赵春燕、王妍和周鑫(负责第三、四章),钟琴(负责第五章),全书由执行主编程开敏统稿.在此教材出版之际,我们非常感谢原四川大学数学学院副院长、现四川大学锦江学院数学教学部主任韩泽教授,是他在百忙中抽出时间来牵头并悉心指导、督促我们编写团队的编写工作,我们的编写任务才得以顺利完成.另外,我们还要感谢董洪英女士,在统稿中她提供了不少有建设性的意见.

由于作者水平所限,教材中难免有错误和不妥之处,请读者不吝赐教,我们深表感谢.

编　者

2016 年 10 月于成都

目 录

第 1 章 行列式 …………………………………………………………… 1

1.1 二阶与三阶行列式 …………………………………………………… 1

1.2 n 阶行列式 ………………………………………………………… 3

1.3 行列式的性质 ………………………………………………………… 9

1.4 行列式的按行(列)展开 …………………………………………… 15

1.5 克拉姆法则…………………………………………………………… 27

总习题一 ……………………………………………………………………… 32

第 2 章 矩阵 ……………………………………………………………… 37

2.1 矩阵的概念…………………………………………………………… 37

2.2 矩阵的运算…………………………………………………………… 42

2.3 逆矩阵………………………………………………………………… 51

2.4 分块矩阵……………………………………………………………… 58

2.5 矩阵的初等变换……………………………………………………… 66

2.6 矩阵的秩……………………………………………………………… 76

总习题二 ……………………………………………………………………… 82

第 3 章　线性方程组 …… 87
3.1　消元法 …… 88
3.2　向量组的线性组合 …… 103
3.3　向量组的线性相关性 …… 111
3.4　向量组的秩 …… 119
3.5　n 维向量空间 …… 125
3.6　线性方程组解的结构 …… 131
总习题三 …… 139

第 4 章　矩阵的特征值 …… 145
4.1　向量的内积 …… 145
4.2　矩阵的特征值与特征向量 …… 151
4.3　相似矩阵 …… 158
4.4　实对称矩阵的对角化 …… 167
总习题四 …… 174

第 5 章　二次型 …… 180
5.1　二次型及其矩阵 …… 180
5.2　化二次型为标准形 …… 184
5.3　正定二次型 …… 193
总习题五 …… 199

部分习题参考答案 …… 204

第 1 章　行列式

1.1　二阶与三阶行列式

学习目标：

1. 理解二、三阶行列式的概念；

2. 熟练掌握二、三阶行列式的对角线法则.

在线性代数研究的一些问题中，如线性方程组、矩阵等问题，常要利用行列式作工具. 经济管理、工程技术及数学的其他分支也常常要用到行列式. 特别是本课程中，它是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的重要工具.

1.1.1　二阶与三阶行列式

定义 1　记方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，那么表示式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为**系数行列式**，且为二阶行列式，并记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则记忆.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

图 1.1 中，a_{11} 到 a_{22} 的**实连线称为主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的**虚连线称为副对角线**. 于是，二阶行列式等于主对角线上的两元

素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 的系数组成数表,两边各加上一条竖直线段,它表示一个数.

我们定义,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

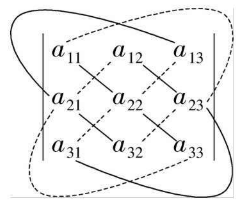

图 1.2

称为**三阶方阵行列式**.它含三行三列,是 6 项的代数和.可由如图 1.2 所示的对角线法则得到.取正号的三项,一项是主对角线上三元素的乘积;另两项是位于主对角线的平行线上两元素与其对角上的元素之积;取负号的三项可由副对角线类似得到.这样计算三阶行列式的方法,称为**对角线法则**.

三阶行列式的计算也可采用沙路法则:

$$D = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

即 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

注 对角线法则只适用于二阶、三阶行列式,更高阶的行列式有待研究.

例 1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$D = 1 \times 4 \times 3 + (-1) \times 1 \times 1 + 1 \times 2 \times 0 - 1 \times 1 \times 0 - (-1) \times 2 \times 3 - 1 \times 4 \times 1 = 13.$$

例 2　已知$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$,求 λ 的值.

解　$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)-(\lambda-2)=\lambda(\lambda-2)^2=0.$

所以　$\lambda=0$　或　$\lambda=2$.

习题 1.1

利用对角线法则计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin^2 x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} y & y & x+y \\ x & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

1.2　n 阶行列式

学习目标:

1. 了解排列与逆序概念;
2. 理解 n 阶行列式的概念;
3. 掌握行列式的一般运算.

从三阶行列式的定义可以发现以下几个特征:①三阶行列式共有 $3!=6$ 项;②行列式中每一项都是不同行不同列的 3 个元素之积;③行列式中每一项符号

都与元素下标有关.受此启示,我们引入 n 阶行列式的定义.

1.2.1 排列与逆序

把 n 个不同的元素排成一列,叫作这 n 个元素的全排列(简称排列).一般,n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列可以记作 $i_1i_2\cdots i_n$,其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是某种次序下的自然数 $1,2,3,\cdots,n$.n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示.且有

$$P_n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

定义 1 n 个不同的自然数,规定自小到大为**标准次序**,此时,对应的排列称为**自然排列**.于是在这 n 个元素的任意排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个**逆序**.一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.**逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.**

例 1 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1)42531;　　　　(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1)对于所给排列,4 排在首位,逆序个数为 0;2 的前面有 1 个比它大的数,逆序个数为 1;5 的前面有 0 个比它大的数,逆序个数为 0;3 的前面有 2 个比它大的数,逆序个数为 2;1 的前面有 4 个比它大的数,逆序个数为 4.把这些数加起来,即

$$0+1+0+2+4=7.$$

故排列 42531 的逆序个数为 7,即 $\tau(42531)=7$,因而是奇排列.

(2)同理可得:

$$\begin{aligned}\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)] &= 0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\ &= \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列.

定义 2 在排列中,将任意两个元素交换位置,其余的元素不动而得到新排列的变换称为**对换**.将相邻两个元素对换,称为**相邻对换**.

相邻对换会使得排列的逆序数改变 1,而任意对换可以通过奇数次相邻对换来实现,因此有:

对换改变排列的奇偶性,即对换使奇排列变为偶排列,偶排列变为奇排列.

当 $n>1$ 时,n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,偶排列与奇排列的个数相

同,都为$\dfrac{n!}{2}$个.

1.2.2　n 阶行列式的定义

先研究三阶行列式的展开式的构成,由此给出 n 阶行列式的定义.三阶行列式的定义为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \tag{1.2.1}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出式(1.2.1)右边的每一项恰是位于不同行、不同列的3个元素的乘积.因此,式(1.2.1)右端的每一项除正负号外都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,其中行标(第一个脚标)构成自然排列123,列标(第二个脚标)构成排列 $j_1j_2j_3$.由于这样的排列共有 3!个,因此这样的项共有 3!项.

再观察式(1.2.1)右端各项的正负号与列标排列的奇偶性的关系.

带正号的3项列标排列是123,231,312,它们都是偶排列;带负号的3项列标排列是132,213,321,它们都是奇排列.

因此项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 所带的正负号可以表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$,其中$\tau(j_1j_2j_3)$为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中,$\tau(j_1j_2j_3)$为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数,$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对3个自然数1,2,3的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

仿此,可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 3　设有 n^2 个元素组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

取位于不同行、不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,得到形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.2}$$

的项,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因此形如式(1.2.2)的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.3}$$

称为 n 阶行列式,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素,式(1.2.3)称为行列式 D 的展开式.

显然,按此定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的.

注:

(1)行列式是一种特定的算式,它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的,是满足条件的所有项的代数和.

(2)n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积.

(3)当 $n=1$ 时,称为一阶行列式,规定一阶行列式 $|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

(4)行列式是一个数(或值),因此两个行列式相等,指的是二者的值相等.

例 2 在五阶行列式中,项 $a_{23}a_{14}a_{31}a_{52}a_{45}$ 应带什么符号?

解 按定义 3 计算:$a_{23}a_{14}a_{31}a_{52}a_{45}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}$,而 $\tau(43152)=0+1+2+0+3=6$,所以前边应带正号.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 方法一:用行列式定义的式(1.2.3),有

$$\begin{aligned}\text{原式}=&(-1)^{\tau(123)}\times1\times3\times2+(-1)^{\tau(132)}\times1\times1\times1+\\&(-1)^{\tau(213)}\times2\times(-2)\times2+(-1)^{\tau(231)}\times2\times1\times(-3)+\\&(-1)^{\tau(312)}\times3\times(-2)\times1+(-1)^{\tau(321)}\times3\times3\times(-3)\\=&28.\end{aligned}$$

方法二:用对角线法则计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,得

$$\text{原式} = 1\times3\times2+(-2)\times1\times3+(-3)\times2\times1-1\times1\times1-2\times(-2)\times2-3\times3\times(-3)$$
$$=28.$$

例 4 计算对角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 由行列式定义的式(1.2.3),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}\times a_{11}\times a_{22}\times a_{33}\times a_{44}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

同理可证得 n 阶对角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5 计算三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 由行列式定义的式(1.2.3),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}\times a_{11}\times a_{22}\times a_{33}\times a_{44}$$
$$= a_{11}\times a_{22}\times a_{33}\times a_{44}.$$

同理可证得 n 阶下三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

请读者自己思考一下,行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

分别等于什么?

习题 1.2

1.求下列各排列的逆序数:

(1)341782659; (2)987654321;

(3)$n(n-1)\cdots321$; (4)$13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

2.写出四阶行列式中含有因子 $a_{22}a_{34}$ 的项.

3.求下列行列式中元素 a_{21} 的代数余子式:

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; (2)$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4.计算下列行列式:$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & b & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \end{vmatrix}$.

1.3　行列式的性质

学习目标：

1. 熟悉行列式的性质；
2. 掌握利用行列式的性质化简行列式.

直接按定义计算 n 阶行列式，当 n 较大时，计算是比较麻烦的. 下面介绍 n 阶行列式的基本性质，只要能灵活地应用这些性质，就可以大大简化 n 阶行列式的计算，而且这些性质在理论上也具有重要意义.

定义 1　将行列式 D 的行、列位置互换后所得到的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

命题 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式定义

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D. \end{aligned}$$

命题 2　互换行列式的两行（列），行列式反号.

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列,得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 I 为排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数,在 D_1 中必有与之对应的一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n},$$

(当$j \neq p,q$时,第j列元素取$a_{i_j j}$,第p列元素取$a_{i_q q}$,第q列元素取$a_{i_p p}$),其中I_1为排列$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$的逆序数,而$i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$与$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$只经过一次对换,$(-1)^I$与$(-1)^{I_1}$相差一个符号,又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

所以对于 D 中任一项,D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等,又 D 与 D_1 的项数相同,所以 $D=-D_1$.

交换行列式 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换行列式 i,j 两列,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　若行列式有两行(列)元素对应相等,则行列式为零.

命题 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以此行列式.第 i 行(列)乘以数 k,记作 $k \times r_i (k \times c_i)$.

推论 2　行列式中若有两行元素对应成比例,则此行列式为零.

命题 4　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命题 5 把行列式某一行(列)的元素乘以数 k 并加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 i 行上的元素加到第 j 行对应元素上,记作 r_j+kr_i,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{j1} & a_{j2}+ka_{j2} & \cdots & a_{jn}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i\neq j).$$

注 行列式的命题 2、命题 3 和命题 5 合称行列式的**初等变换性质**.

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,r_4+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$