修正課程標準適用

新編

高中平面幾何學

下冊

編者 蔣介石

中華書局印行

修正課程標準適用

高中平面幾何學下冊

目次

修正課程標準適用

高中平面幾何學

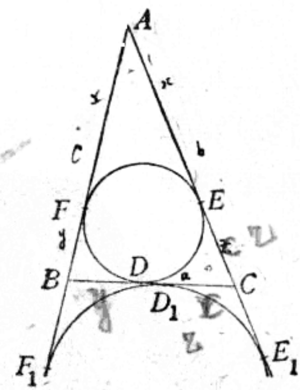
下冊

第六編

幾何計算　極大極小

93.代數在幾何上的應用　有許多幾何量間關係,宜用代數運算去推求. §90 的定理卽爲一例.玆舉一例如下:

例　已知一三角形各邊長,求其內切圓各切點與所在邊頂點的距離.



解　設 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, 且命 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$ (以後各節皆用此記法).又因 $AE=AF$, $BF=BD$, $CD=CE$,

依次設爲 x, y, z,

則 $x+y=c$,

$y+z=a$,

$z+x=b$.

解得 $x=\frac{1}{2}(s-a)$,

$$y=\frac{1}{2}(s-b),\ z=\frac{1}{2}(s-c).$$

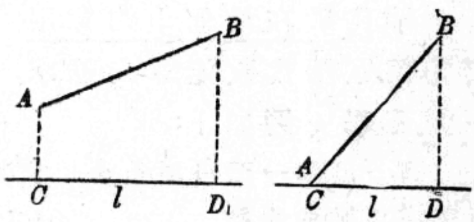
証　如 $\angle A$ 內旁切圓,與邊及延線上切點爲 D_1, E_1, F_1,　則

$$AE_1=AF_1=s;BD_1=\frac{1}{2}(s-c)=CD,$$

$$CD_1=\frac{1}{2}(s-b)=BD.$$

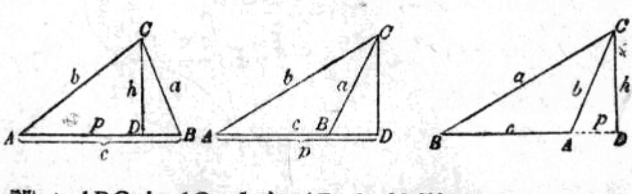
讀者當不難推論 $\angle B$, $\angle C$ 二角內旁切圓的情形.

94.<u>任意三角形各邊關係</u>　(一)射影　自一線段兩端,作他直線上垂線,則兩垂趾間距離,叫做這線段在那直線上射影.



如圖, AB 線段在直線 l 上射影是 CD.

(二)畢氏定理推廣　**任何三角形中,銳(或鈍)角的對邊等於餘二邊平方和減(或加)一邊與他邊在這邊上射影乘積的二倍.**



設 $\triangle ABC$ 中 $AC=b$ 在 AB 上射影是 $AD=p$.

今須證(一)如 $\angle A$ 是銳角,則 $a^2=b^2+c^2-2cp$(左中圖),

(二)如 $\angle A$ 是鈍角,則 $a^2=b^2+c^2+2cp$(右圖)

在 $rt.\triangle ADC$ 中, $\quad h^2=b^2-p^2 \qquad (1)$

又在 $rt.\triangle BDC$ 中, $\quad a^2=h^2+BD^2 \qquad (2)$

但 $\angle A$ 爲銳角時, $BD=c-p$ 或 $p-c$, $\angle A$ 爲鈍角時, $BD=c+p$. 代入(2)後,幷自(1)與(2)消去 h,卽得

$\angle A$ 爲銳角時 $\quad a^2=b^2+c^2-2cp \qquad (3)$

$\angle A$ 爲鈍角時 $\quad a^2=b^2+c^2+2cp \qquad (3)'$

95.三角形的間接元素 三角形的三邊和三角,叫**直接元素**,其餘如高,分角線,中線等,叫**間接元素**.今應用推廣畢氏定理求幾種間接元素.

(一)設在 AB 邊上的頂垂線長 h_C,則就上節(3)解出 p,代入(1)式化簡得

$a^2=c^2+b^2-2cp$

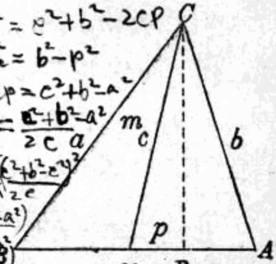
$h_c^2=b^2-p^2$

$2cp=c^2+b^2-a^2$

$$h_C=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (4)$$

$p=\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$

$h_c^2=b^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)^2$



(二)設在 AB 邊上中線爲 $m_C=CM$,則就 $\triangle ACM,\triangle BCM$ 得

$=\left(b+\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)$

$$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m_C^2+2.\frac{c}{2}\cdot p$$

$=\left(\frac{c^2+2cb+b^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc-c^2-b^2+a^2}{2c}\right)$

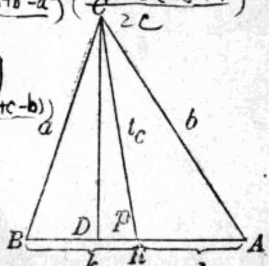
$$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m_C^2-2.\frac{c}{2}\cdot p$$

$=\left(\frac{(c+b)^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2-(c-b)^2}{2c}\right)$

消去 p 卽得

$=\left(\frac{(c+b-a)(c+b+a)}{2c}\right)\left(\frac{(a-c+b)(a+c-b)}{2c}\right)$

$$m_C=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} \qquad (5)$$



(三)設 $CR=t_C$ 爲 $\angle C$ 內分角線,則 $\frac{k}{a}=\frac{l}{b}=\frac{k+l}{a+b}=\frac{c}{a+b} \qquad (6)$

$h_c^2=\frac{(c+b-a)(c+b+a)(a-c+b)(a+c-b)}{4c^2}$

$\therefore h_c^2=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4c^2}$

$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2} \qquad \therefore h_c=\sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}}$

但在$\triangle ARC$, $\triangle BRC$中,

$$a^2=t_c^2+k^2+2kp,$$
$$b^2=t_c^2+l^2-2lp. \qquad (7)$$

自(6)得 k, l 代入(7)中二式,再消去p,化簡卽得

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{bcs(s-a)}. \qquad (8)$$

例 試證一三角形中,如(一)二高相等,(二)二中線相等,或(三)二分角線相等,則必為等腰三角形.

解 (一)如 $h_b=h_c$, 則按(4)式

$$\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore b=c.$$

(二)如 $m_b=m_c$,則按(5)式

$$2a^2+2c^2-b^2=2a^2+2b^2-c^2, \text{卽 } 3c^2=3b^2$$

$$\therefore b=c.$$

(三)如 $t_b=t_b$ 按(8)式

$$\frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

陸續化簡得 $$\frac{a+b-c}{c+a-b}=\frac{c(a+b)^2}{b(c+a)^2}$$

$$\frac{b-c}{a}=\frac{c(a+b)^2-b(c+a)^2}{c(a+b)^2+b(c+a)^2}=\frac{(b-c)(bc-a^2)}{(bc+a^2)(b+c)+4a.bc}$$

$$(b-c)[(bc+a^2)(b+c)+a^3+3abc]=0$$

$$\therefore b=c.$$

註 參看著者編新課程標準適用高中三角學第四章.(本局出版)

習題二五

1. 有二圓內切於P,作一割線依次與圓交於A,B,C,D四點,試證 $\angle APB=\angle CPD$.

2. 四邊形 $ABCD$ 中, AB與 DC 延線交於P, BC 與 AD 延線交於Q, $\angle APD$, $\angle AQB$ 的分角線交於 O,求證

$$\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle BCD).$$

3. $ABCD$ 爲一外切四邊形,試證 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 的二內切圓必互相外切.

4. $ABCD$ 是一梯形, $AD \parallel BC$,求證

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2\cdot AD\cdot BC.$$

5. $\triangle ABC$ 的 AB 邊與一圓相切, A 爲切點,且 $\angle A$ 的旁切圓心 I_1 在這圓上,設 BC 邊與延線交於D,E,試證 I_1C 是 $\angle DI_1E$ 的分角線.

6. 在 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上取一點P,使 $m.BP=n.CP$,求證 $m\cdot AB^2+n\cdot AC^2=(m+n)\cdot AP^2+m\cdot BP^2+n\cdot CP^2$
(阿波羅尼斯 Apollonius 定理的推廣)

7. 在四邊形 $ABCD$ 中, $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$,則其二對角線必垂直,試用間接證法證明.

8. 在等腰三角形 ABC 的底邊 BC 或其延線上任取一點P,求證 $AB^2-AP^2=BP\cdot PC$.

9. 四邊形$ABCD$ 的 BD, AC 二對角線中點,各爲M,

N,求證 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

10.設 $\triangle ABC$ 的重心是 G,又任取一點 P,試證

(一)$BC^2+3\cdot AG^2=AC^2+3\cdot BG^2=AB^2+3\cdot CG^2$,

(二)$AB^2+BC^2+CA^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$,

(三)$PA^2+PB^2+PC^2=AG^2+BG^2+CG^2+3\cdot PG^2$.

11.以一三角形各中線為邊作一新三角形,再就這新三角形依同法另求一三角形,試證其與原三角形必相似.

12.在線段 AB 上任一點 C,向同側作等邊三角形 $\triangle ACE$, $\triangle CBF$. 設其重心為 P, Q,試證

$AB^2+BC^2+CA^2=6\cdot PQ^2$.

$PD^2+DQ^2=PQ^2$
$DQ=QF-DF$
$PQ^2=PD^2+(QF-PE)^2$
$=PD^2+QF^2-2QF\cdot PE$
$+PE^2$

13.設 $\triangle ABC$ 中 $BC=a, CA=b, AB=c$. 在 BC 上取一點 E,令 $BE=m, EC=n$.試證如 $AE=d$,則 $d^2a=mb^2+nc^2-amn$.(司梯瓦 Stewart 定理).

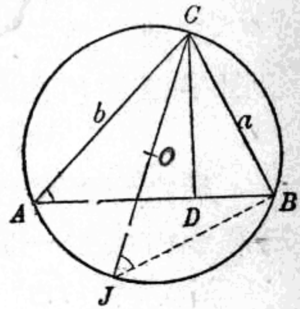
96.三角形邊長與面積關係 由 §58(二)和 §94 中(4)式卽可得由三角形各邊長求面積的公式.

設 $\triangle ABC$ 中 A, B, C 的對邊各為 a, b, c 且 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 如以前各節.作 $CD\perp AB$, 命 $CD=h_c$,則 $\triangle ABC$ 的面積 $\triangle$ 為

$$\triangle\left(=\frac{1}{2}ch_c\right)=\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$$

97.三角形外接圓和內切圓半徑

(一)外接圓半徑.



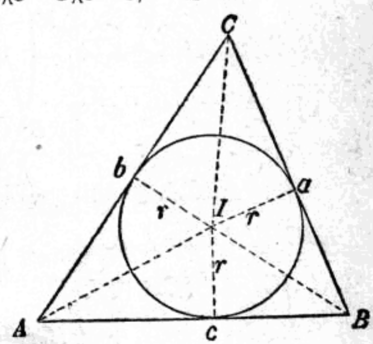
設$\triangle ABC$的外接圓為$\odot O$.作直徑$CJ=2R$,幷聯JB,則在$\triangle ADC$,$\triangle JBC$中,$\angle ADC=rt.\angle=\angle JBC$(因$\angle JBC$內接於半圓).
又　$\angle CAB=\angle CJB$(因同為$\overset{\frown}{CB}$的一半所度,§55 系二).

故　$rt.\triangle ADC \backsim rt.\triangle JBC$　(相似△條件三,§68)

$\therefore$　$CA:CD=CJ:CB$　即　$b:h_c=2R:a$

$$\therefore \quad R=\frac{ab}{2h_c}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{abc}{4\triangle}$$

(二)內切圓半徑



設$\triangle ABC$的內切圓為$\odot I$,其半徑為r,聯IA,IB,IC,

則　$\triangle=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA=\frac{1}{2}r.c+\frac{1}{2}r.a+\frac{1}{2}r.b$

$=rs.$

$$\therefore \quad r=\frac{\triangle}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

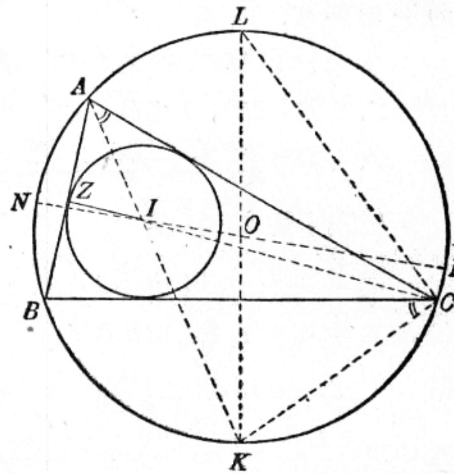
註　自§95至下面的§98所論,只是三角形各邊與面積或相關圓半徑關係.至含有各角的關係,須用三角學方可求.可參看著者編新課程標準適用高中三角學§§69.70,72,73,76,80.即明

98.三角形內心外心距離

定理　設一三角形的內切圓半徑爲 r,外接圓半徑爲 R,內外二心距離爲 d,則

$$d^2 = R(R-2r).$$

反之,合於這種關係的二圓,必有無窮個的三角形,內接於一圓而外切於其他.



設 $\triangle ABC$ 的內切圓爲 I, 外接圓爲 O. 聯 AI, 交 $\odot O$ 於 K. 則因 $\angle BAK = \angle KAC$, 故有 $\widehat{BK} = \widehat{KC}$, 而得 $\angle BCK = \angle KAC$ (§55 系二).

就 $\triangle ICA$, 卽知 $\angle KIC = \angle IAC + \angle ACI$, 但 $\angle ACI = \angle ICB$,代入得 $\angle KIC = \angle BCK + \angle ICB = \angle ICK$. 由 $\triangle ICK$, $IK = KC$,

聯 IO, 交 $\odot O$ 於 M,N;命 $IO = d$, $\odot O$ 半徑爲 R, $\odot I$ 半徑爲 r, 則 $IM = R+d$, $IN = R-d$,而

$$AI \cdot KC = AI \cdot IK = IM \cdot IN = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2.$$

作 $\odot O$ 的直徑 KL, $\odot I$ 的半徑 IZ, Z 爲 AB 與 $\odot I$ 切點,則 $\angle LCK = \angle IZA = rt. \angle$, 又 $\widehat{BK} = \widehat{KC}$, 故 $\angle BAK = \angle KLC$. $\therefore$ $rt.\triangle AZI \backsim rt.\triangle LCK$,

而 $AI:LK=IZ:KC.$

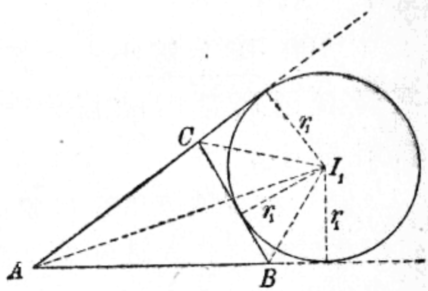
或 $IZ.LK=AI.KC$,即 $2Rr=R^2-d^2$, $\therefore d^2=R(R-2r)$

設有 $\odot I$, $\odot O$ 二圓,合於最後一式的關係,在 $\odot O$ 上任取一點 A,作 $\odot I$ 的二切線 AB, AC, 則 AI 必平分 $\angle BAC$. 如據最後關係式,依上法逐步逆推,便可證 $\odot I$ 內切於 $\triangle ABC$.

注意 合於這關係式的二圓必相含,而無交點,因 $(R-r)^2=R^2-2Rr+r^2>R^2-2Rr=d^2$, 故 $R-r>d$ (§42).

99.三角形旁切圓半徑 求法與 §96 相倣.

設 $\triangle ABC$ 對 $\angle A$ 的旁切圓為 $\odot I_1$,其半徑為 r_1.聯 I_1A, I_1B, I_1C,則有



$\triangle=\triangle I_1AB+\triangle I_1CA-\triangle I_1BC=\frac{1}{2}r_1c+\frac{1}{2}r_1b-\frac{1}{2}r_1a=r_1(s-a).$

$$r_1=\frac{\triangle}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}$$

同法便可求得對 $\angle B$, $\angle C$ 二旁切圓半徑 r_2, r_3.

習題二六

1. 寫出 $\triangle ABC$ 中對 $\angle B$, $\angle C$ 的旁切圓半徑公式.

2. 詳細補出 §98 定理前一段中略去的逆推各步驟.

3. 做 §98 方法,求三角形旁心與外心距離.

4. 求證 $rs=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$.

5. 求證 $r(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)=r_1r_2r_3$.

6. 求證 $\triangle=r\sqrt{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}$.

7. 利用 §96 公式證明 $\triangle ABC$ 的九點圓半徑爲 $\frac{1}{2}R$.

8. 求證 $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

9. 求證 $OI^2+OI_1{}^2+OI_2{}^2+OI_3{}^2=12R^2$.

10. 設 L, M, N 爲 $\triangle ABC$ 各垂線 AL, BM, CN 的垂趾,試證 $\triangle ABC$ 的面積等於其外接圓半徑與 $\triangle LMN$ 周界之半二者的乘積.

100. 極大極小 一羣同類量中,如無大於某量者,則那量叫做**極大**;如無小於某量者,則那量叫**極小**.

註 在高等算學裏所謂極大(極小),係指一量綿續變化時較其隣近諸值爲大(或小)的一值,幷非指在全部變值中最大(或小)者,關於此點可參看著者編高中代數學 §101的註.

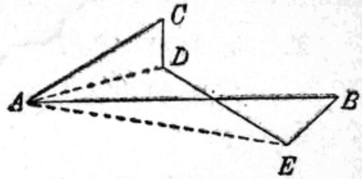
極大極小問題的研究,原屬微積分範圍,本書只能就其淺近而重要者,略述一二.

101. 極大極小的基本要理

(一)三角形二邊和差定理(§17)

例一 二點間聯線,直線最短.

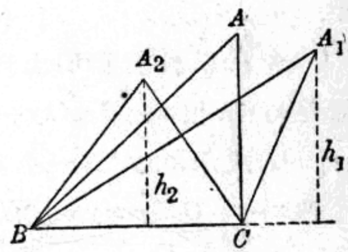
證　$AC+CD+DE+EB>AD+DE+EB>AE+EB>AB.$



(二) 垂線最短定理
(§24 (二))

例二　**在一羣三角形,其中二對邊對應相等,試證當這二邊夾角爲直角時,面積極大.**

證　右圖中 $CA=CA_1$, $=CA_2$,而 $AC\perp BC$;又 h_1,h_2 各爲 $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$ 中 BC 邊上的高,則 $h_1<CA_1,h_2<CA_2$.



$$\therefore \quad \triangle ABC=\frac{1}{2}AC.BC>\frac{1}{2}h_1.BC=\triangle A_1BC$$

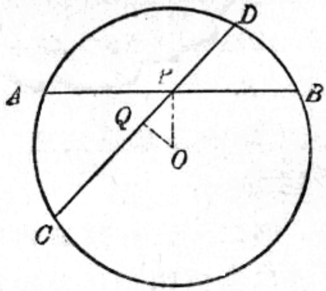
同理易見 $\triangle ABC>\triangle A_2BC$.故 $\triangle ABC$ 的面積最大.

102. 極大極小證題法　這問題的直接證法爲:**證某羣量中任意一量,均小於(或大於)其中一定量**,上述各例,都是用這法證明,茲再舉數例如下:

例一　過圓內一定點諸弦,以被這點所平分的爲最短.

證　下圖中定點 P 爲 AB 弦中點,CPD 爲任意一弦,自圓心 O 作 $OQ\perp CD$,則 $OQ<OP$,故 CD 距圓心較

近,因而$AB<CD$.



註 在此有$AP\cdot PB=CP\cdot PD=$定量,故由本題得一要理如下:

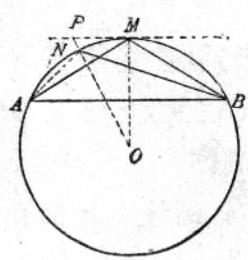
二量乘積若為定值,則其和以當二量相等時為最小.

今更以代數證明上理,設x, y表二變量,則按題設條件$xy=k$.但$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2=4k+(x-y)^2$ (1)

(I)式示$(x+y)^2$為一常數與正數$(x-y)^2$的和,故以$x=y$,即$x-y=O$時$x=y=\sqrt{k}$為最小.

用這法也可證明本題.

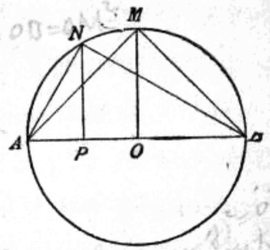
例二 一羣三角形底邊一定,頂點在以邊為弦的一弧上,當頂點平分這弧時,面積為最大,



證 右圖中M為$\widehat{AB}$中點N為弧上任意一點.連接ON,或,延長之,與$\odot O$在M點切線交於P,則$OP>OM=ON$,所以N必在MP, AB二平行線內.由此可知自M至AB的距離,大於自N至AB的距離,故$\triangle AMB$面積大於$\triangle ANB$的面積.

註 設AB為直徑,作$NP\perp AB$,在此$AP+PB=AO$

$+OB=$定量.　AP : NP = NP : BP
AP·BP = NP², AO·OB = OM²



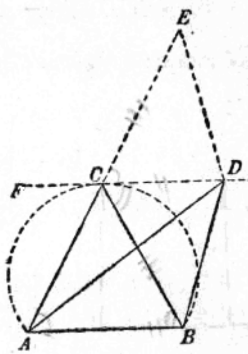
但　$AP.PB=NP^2<MO^2=AO.OB$

故如二量和爲一定,則其積以當二量相等時爲極大.

這理與上題註中所說的理,都很爲重要.

又由　$xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2]=\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}(x-y)^2$ 也可證明這理.

例三　等底等積的諸三角形中,以當他二邊相等時,周界爲極小,又頂角爲極大.



證　設 $AC=BC$, $\triangle ABC=\triangle ADB$,則 $CD \parallel AB$,延長 AC 到 E,使 $CE=CA$,并聯 ED.

因 $\angle ECD=\angle FCA=\angle CAB=\angle CBA=\angle BCD$.

$\therefore$　$\triangle ECD\equiv\triangle BCD$.

$\therefore$　$DE=DB$,　又 $CE=CB$.

$\therefore$　$AD+DB=AD+DE>AE=AC+CB$.

即　$AD+DB+BA>AC+CB+BA$.

又作 $\triangle ABC$ 的外接圓,則 CD 爲切線,故 D 點在這圓外,因而 $\angle ADB<\angle ACB$.

習題二七