

普通高等院校机械工程学科“卓越工程师教育培养计划”系列规划教材

# 机械振动学

JIXIE ZHENDONG XUE

◎主编 毛君



 北京理工大学出版社  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校机械工程学科“卓越工程师教育培养计划”系列规划教材

# 机械振动学

主 编 毛 君

副主编 陈洪月 谢 苗

 **北京理工大学出版社**  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书是普通高等院校机械工程学科“卓越工程师教育培养计划”系列规划教材之一,内容包括:单自由度系统线性振动的基本理论、振动方程的建立及其求解过程;二自由度、多自由度振动系统的无阻尼、有阻尼振动的求解方法;连续系统振动的基本求解方法;非线性振动系统的基本求解方法;随机激励下振动系统的响应问题;振动系统的数值求解方法。

本书可作为机械振动学专业本科生专业教材,也可作为研究生教学和工程技术人员学习参考用书。

版权专有 侵权必究

---

### 图书在版编目(CIP)数据

机械振动学/毛君主编. —北京:北京理工大学出版社,2016.1(2016.2重印)

ISBN 978-7-5682-1360-8

I. ①机… II. ①毛… III. ①机械振动 IV. ①TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 238658 号

---

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 13.25

字 数 / 307 千字

版 次 / 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 2 月第 2 次印刷

定 价 / 29.00 元

责任编辑 / 封 雪

文案编辑 / 张鑫星

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 马振武

---

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

## 编委会名单

主任委员:毛 君 何卫东 苏东海  
副主任委员:于晓光 单 鹏 曾 红 黄树涛  
舒启林 回 丽 王学俊 付广艳  
刘 峰 张 珂  
委 员:肖 阳 刘树伟 魏永合 董浩存  
赵立杰 张 强  
秘 书 长:毛 君  
副 秘 书 长:回 丽 舒启林 张 强  
机械工程专业方向分委员会主任:毛 君  
机械电子工程专业方向分委员会主任:于晓光  
车辆工程专业方向分委员会主任:单 鹏

## 编写说明

根据教育部教高〔2011〕5号《关于“十二五”普通高等教育本科教材建设的若干意见》文件和“卓越工程师教育培养计划”的精神要求,为全面推进高等教育理工科院校“质量工程”的实施,将教学改革的成果和教学实践的积累体现到教材建设和教学资源统合的实际工作中去,以满足不断深化的教学改革的需要,更好地为学校教学改革、人才培养与课程建设服务,确保高质量教材进课堂,由辽宁工程技术大学机械工程学院、沈阳工业大学机械工程学院、大连交通大学机械工程学院、大连工业大学机械工程与自动化学院、辽宁科技大学机械工程与自动化学院、辽宁工业大学机械工程与自动化学院、辽宁工业大学汽车与交通工程学院、辽宁石油化工大学机械工程学院、沈阳航空航天大学机电工程学院、沈阳化工大学机械工程学院、沈阳理工大学机械工程学院、沈阳理工大学汽车与交通学院、沈阳建筑大学交通与机械工程学院等辽宁省11所理工科院校机械工程学科教学单位组建的专委会和编委会组织主导,经北京理工大学出版社、辽宁省11所理工科院校机械工程学科专委会和编委会各位专家近两年的精心组织、工作准备和调研沟通,以创新、合作、融合、共赢、整合跨院校优质资源的工作方式,结合辽宁省11所理工科院校对机械工程学科和课程教学理念、学科建设和体系搭建等研究建设成果,按照当今最新的教材理念和立体化教材开发技术,本着“整体规划、制作精品、分步实施、落实到位”的原则确定编写机械设计与制造、机械电子工程及车辆工程等机械工程学科课程体系教材。

本套丛书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂。全书有较多的例题,便于自学,同时注意尽量多给出一些应用实例。

本书可供高等院校理工科类各专业的学生使用,也可供广大教师、工程技术人员参考。

辽宁省11所理工科院校机械工程学科建设及教材编写专委会和编委会

# 前 言

Qianyan

本书是普通高等院校机械工程学科“卓越工程师教育培养计划”系列规划教材之一，是机械振动学专业本科生专业教材，也可以作为研究生教学和工程技术人员学习参考用书。本书共分8章，第1章介绍了振动系统的组成、分析步骤及应用；第2章介绍单自由度系统线性振动的基本理论，研究了振动方程的建立及其求解过程，阐述了系统固有频率、等效系统的质量、刚度的计算方法；第3、4章研究了二自由度、多自由度振动系统无阻尼、有阻尼振动的求解方法；第5章研究了连续系统振动的基本求解方法；第6章研究了非线性振动系统的基本求解方法；第7章研究了随机激励下振动系统的响应问题；第8章研究了振动系统的数值求解方法。

本书第1章由辽宁工程技术大学毛君、谢苗编写；第2章、第3章、第5章由辽宁工程技术大学卢进南编写；第4章、第6章、第7章由辽宁工程技术大学陈洪月编写；第8章由辽宁工程技术大学师建国、刘克铭编写。

本书由毛君统稿。沈阳航空航天大学的曹国强教授和辽宁工业大学的何勃教授审阅了本书，并提出了宝贵的意见和建议，在此致以衷心的感谢。

本书在编写过程中得到了辽宁工程技术大学博士研究生张瑜、谢春雪、刘治翔及硕士研究生王鑫、田松、张坤、白雅静、贾灿、许文馨的帮助，他们在本书的排版、绘图及编写程序中做了大量工作。

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请读者给予批评和指正，不胜感激。

编 者

<b>第 1 章 绪 论</b> .....	001
<b>1.1 振动概述</b> .....	001
<b>1.2 振动类型</b> .....	002
<b>1.3 振动系统组成要素</b> .....	003
1.3.1 质量 .....	003
1.3.2 弹性 .....	003
1.3.3 阻尼 .....	004
<b>1.4 振动分析的一般步骤</b> .....	004
1.4.1 建立力学模型 .....	005
1.4.2 建立数学模型 .....	005
1.4.3 方程求解 .....	007
1.4.4 分析结论 .....	007
<b>1.5 简谐振动</b> .....	007
<b>1.6 谐波分析</b> .....	008
<b>1.7 机械振动学的应用</b> .....	010
<b>第 2 章 单自由度系统振动理论及应用</b> .....	011
<b>2.1 单自由度系统振动微分方程</b> .....	011
<b>2.2 无阻尼单自由度系统的自由振动</b> .....	013
<b>2.3 固有频率的计算</b> .....	016
2.3.1 静变形法 .....	016
2.3.2 能量法 .....	018
2.3.3 瑞利法 .....	019
<b>2.4 等效质量、等效刚度与等效阻尼</b> .....	020
2.4.1 等效质量 .....	020
2.4.2 等效刚度 .....	021
2.4.3 等效阻尼 .....	022
<b>2.5 具有黏性阻尼单自由度系统的自由振动</b> .....	024
2.5.1 具有黏性阻尼的自由振动 .....	024
2.5.2 黏性阻尼对自由振动的影响 .....	027
<b>2.6 无阻尼系统的受迫振动</b> .....	028
2.6.1 受迫振动的稳态振动 .....	029

# 目 录

# Contents

2.6.2	受迫振动的过渡过程	032
2.6.3	“拍振”现象	033
2.7	具有黏性阻尼系统的受迫振动	034
2.7.1	简谐激振的响应	034
2.7.2	影响振幅的主要因素	035
2.7.3	引起的受迫振动实例	036
2.8	系统对周期激振的响应	040
2.9	系统对任意激振的响应	041
2.10	单自由度振动理论的工程应用	041
2.10.1	单圆盘转子的临界转速	041
2.10.2	隔振原理及应用	043
2.10.3	单自由度系统的减振	044
2.11	思考与习题	049
<b>第3章</b>	<b>二自由度系统振动理论及应用</b>	<b>051</b>
3.1	二自由度系统振动微分方程	051
3.2	无阻尼二自由度系统的振动	056
3.2.1	无阻尼二自由度系统的自由振动	056
3.2.2	与自由振动有关的几种现象	059
3.2.3	无阻尼二自由度系统的强迫振动	062
3.3	阻尼二自由度系统的振动	065
3.3.1	具有黏性阻尼二自由度系统的自由振动	065
3.3.2	有阻尼二自由度系统的强迫振动	067
3.3.3	求强迫振动方程稳态解的复数法	069
3.4	二自由度振动系统工程实例求解	071
3.5	习题及参考答案	075
<b>第4章</b>	<b>多自由度系统振动理论及应用</b>	<b>080</b>
4.1	多自由度系统的振动微分方程	080
4.1.1	多自由度系统的作用力方程	080
4.1.2	多自由度系统的位移方程	081
4.2	刚度影响系数与柔度影响系数	082
4.2.1	刚度影响系数与刚度矩阵	082



4.2.2	柔度影响系数与柔度矩阵	082
<b>4.3</b>	<b>固有频率与主振型</b>	<b>084</b>
4.3.1	固有频率	084
4.3.2	主振型	085
<b>4.4</b>	<b>主振型的正交性</b>	<b>089</b>
<b>4.5</b>	<b>无阻尼系统的响应</b>	<b>090</b>
4.5.1	对初始条件的响应	090
4.5.2	对激励的响应	092
<b>4.6</b>	<b>多自由系统的阻尼</b>	<b>094</b>
4.6.1	比例阻尼	094
4.6.2	振型阻尼	098
<b>4.7</b>	<b>有阻尼系统的响应</b>	<b>099</b>
4.7.1	简谐激振的响应	099
4.7.2	周期激振的响应	102
<b>4.8</b>	<b>多自由度振动系统工程实例求解</b>	<b>103</b>
<b>4.9</b>	<b>习题及参考答案</b>	<b>104</b>
<b>第5章</b>	<b>连续系统的振动</b>	<b>108</b>
<b>5.1</b>	<b>弹性杆、轴和弦的振动</b>	<b>108</b>
5.1.1	杆的纵向振动	108
5.1.2	固有振型的正交性	113
5.1.3	轴的扭转振动	115
<b>5.2</b>	<b>弹性梁的振动</b>	<b>117</b>
5.2.1	弹性梁弯曲振动	118
5.2.2	固有振型的正交性	122
5.2.3	振型叠加法计算梁的振动响应	124
<b>5.3</b>	<b>梁振动的特殊问题</b>	<b>126</b>
5.3.1	轴向力作用下梁的横向振动	126
5.3.2	Timoshenko 梁的固有振动	128
5.3.3	梁的弯曲—扭转振动	130
<b>5.4</b>	<b>阻尼系统的振动</b>	<b>132</b>
5.4.1	含黏性阻尼的弹性杆纵向振动	132
5.4.2	含有材料阻尼的弹性梁简谐受迫振动	133

# 目 录

Contents

5.5	薄板的振动 .....	134
<b>第 6 章</b>	<b>非线性振动理论简介</b> .....	<b>137</b>
6.1	非线性振动系统的分类 .....	137
6.1.1	保守系统 .....	137
6.1.2	非保守系统 .....	139
6.2	非线性振动的稳定性 .....	141
6.3	基本的摄动方法 .....	142
6.3.1	Lindstedt-Poincare 摄动法 .....	143
6.3.2	多尺度法 .....	144
6.4	林斯泰特-庞加莱法 .....	145
6.5	KBM 法 .....	146
6.6	非线性振动系统实例 .....	148
<b>第 7 章</b>	<b>随机振动</b> .....	<b>152</b>
7.1	随机变量和随机过程 .....	152
7.1.1	随机变量 .....	152
7.1.2	随机过程 .....	155
7.2	随机信号的相关分析和谱分析 .....	160
7.3	单自由度系统对随机激励的响应 .....	163
7.4	计算随机激励的数值方法 .....	169
<b>第 8 章</b>	<b>振动系统 MATLAB 仿真</b> .....	<b>178</b>
8.1	单自由度振动系统 MATLAB 求解 .....	178
8.2	二自由度振动 MATLAB 求解 .....	184
8.3	多自由度振动系统 MATLAB 求解 .....	187
	参考文献 .....	197



# 第1章 绪论

## 本章导读

振动问题普遍存在于工业生产和工程的各个领域，振动分析与控制已经成为许多工程项目的必要措施。研究工程振动问题不仅可以解决系统的有害振动，提高系统的可靠性和寿命，还可以有效地利用振动，使之为我们服务。

## 本章主要内容

- (1) 振动系统的类型。
- (2) 振动系统的组成要素。
- (3) 振动分析的一般步骤。
- (4) 等效质量、等效刚度与等效阻尼。
- (5) 振动系统的应用。

## 1.1 振动概述

机械振动是一种特殊形式的运动，通常是指系统在某一平衡位置附近所做的往复运动。从运动学的观点看，机械振动是研究机械系统中某些物理量（如位移、速度、加速度）在某一数值附近随时间  $t$  变化的规律。振动是普遍存在的现象，人类的大多数活动都含有振动现象，如：血液循环与心脏的振动相关；呼吸与肺的振动相关；听觉与耳道内的鼓膜振动相关等。在工程和日常生活中也存在大量、丰富多彩的振动现象，如：车辆行驶时的振动、发动机运转时的振动、演奏乐器时乐器的振动等。在很多情况下振动是有害的，如机械系统中，振动会加剧机械零部件的磨损，使零部件受交变应力而导致疲劳失效；会使紧固件如螺母等松动脱落；切削金属时，机床和刀具的振动会降低零件的加工精度和表面质量。此外，一旦机械或结构的固有频率与外部激励的频率一致时，还会发生共振现象，从而引起机械或结构的过大变形乃至失效；在许多工程系统中，振动传递给人会引起人的不适及工作效率的降低，如发动机振动产生的噪声会使人感到烦躁，甚至恶心呕吐。所以，振动研究的主要目的之一就是适当的结构及基础设计减小振动。

虽然振动有其不利的一面，但在生活和生产实践中也可以被利用，如：振动输送机、振动布料器、振动筛、振动压实机、洗衣机、电动牙刷、牙医用的小电钻、钟表及推拿设备等。振动还可应用在管道的推进、材料的振动测试、振动磨削加工以及滤波电路中，此外，振动还可以提高某些机械加工、锻造和焊接过程的效率。

机械振动学是在力学模型的基础上，应用数学分析、实验测量和数值计算等方法研究结构振动的一般规律，解决实践中的振动问题，它是材料力学在机械系统动力学方面的扩展。

## 1.2 振动类型

在分析具体振动问题之前，明确问题的类别是非常重要的。振动问题的分类依赖于分类的出发点。一个振动系统包括了三个要素：输入、输出和系统模型（或系统特性）。输入就是动载荷，可以是力、力矩等，也可以是运动量。输出就是响应，包括系统的位移、速度、加速度或内力、应力、应变等。从输入、输出与系统特性三者的关系来说，可以将所研究的振动问题归纳为三大类。

第一类：已知系统模型和外载荷求系统响应，称为响应计算或正问题，这是研究最为成熟的问题。对于比较简单的系统，本书将介绍一些解析方法或近似解析方法求解其响应；对于复杂系统，目前已发展了许多有效的数值方法来进行计算，例如计算一般结构振动的有限元方法、计算复杂结构的子结构方法、计算轴系振动的传递矩阵法等。

第二类：已知输入和输出求系统特性，称为系统识别或参数识别，又称为第一类逆问题。表达系统特性的方式是多种多样的，例如系统的质量、刚度和阻尼，系统的频响函数、脉冲响应函数等都可以反映系统特性。它们彼此在理论上等效，但各有其优点，特别是频响函数等可用测量的方法得到。关键问题是如何从实测数据中精确地估计出我们需要的描述系统特性的参数。如果需要的是频率、阻尼、振型等模态参数，则称为模态参数识别，这方面的研究目前日趋成熟，有许多商品化软件可供使用。如果需要系统在物理坐标下的质量、刚度、阻尼，则称为物理参数识别。求解系统识别问题的目的之一是检验用分析方法所建立的系统模型是否正确和精确，能否用于今后的振动计算。与系统识别，特别是物理参数识别相关的问题是系统动态设计，即根据输入和输出设计系统特性，乃至系统的质量、刚度及其分布，这一类逆问题的解一般不唯一，目前多借助数值优化方法来解决。

第三类：已知系统特性和响应求载荷，称为载荷识别，又称为第二类逆问题。确定系统在实际工况下的振源及其数学描述是振动工程中最棘手的问题，一般需要具体问题具体处理。如：人们一直研究如何从实测的机身响应计算出直升机桨毂作用到机身的三个力和三个力矩，并取得了不小的成果。要使这一类问题取得精确的结果，必须与第一类逆问题紧密结合起来，也就是系统特性应该建立在可靠的基础上。

根据研究侧重点的不同，可以从不同角度对振动现象进行分类。振动现象按系统相应的性质可分为确定振动和随机振动两大类。

(1) 对于一个确定系统（不论它是常参数系统，还是变参数系统），在受到确定激励作用时，响应也是确定的，这类振动称为确定振动。

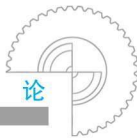
(2) 对于确定系统，在受到随机激励作用时，系统的响应是随机的，这类振动称为随机振动，随机振动只能用概率统计的方法描述。

对于随机结构系统来说，无论受到确定激励，还是随机激励作用，其响应均为随机的，这类振动称为随机振动。

此外，还可以按激励的控制方式进行分类：

(1) 自由振动：系统受初始激励作用后，不再受外界激励作用的振动。它一般指的是弹性系统偏离平衡状态以后，不再受外界激励作用的情形下所发生的振动。

(2) 强迫振动：系统在外界控制的激励作用下的振动，它指的是弹性系统在受外界控制的激励作用下发生的振动。此时，即使振动被完全抑制，激励照样存在。



(3) 自激振动：系统在自身控制的激励作用下的振动。它指的是激励受系统振动本身控制的振动，在适当的反馈作用下，系统会自动地激起定幅振动，但一旦振动被抑制，激励也就随之消失。

(4) 参激振动：系统本身参数变化激发的振动。这种激励方式是通过周期或随机地改变系统的特性参数实现的。

## 1.3 振动系统组成要素

机械系统之所以会产生振动是因为它本身具有质量和弹性，阻尼则使振动受到抑制。从能量观来看，质量可储存动能，弹性可储存势能，阻尼则消耗能量。当外界对系统做功时，系统的质量就吸收动能，使质量获得速度，弹簧获得变形能具有了使质量回到原来位置的能力。这种能量的不断转换就导致系统的振动，系统如果没有外界不断地输入能量，则由于阻尼的存在，振动现象将逐渐消失。因此，质量、弹性和阻尼是振动系统的三要素。此外，在重力场中，当质量离开平衡位置后就具有了势能，同样产生恢复力。如单摆，虽然没有弹簧，但可看成等效弹簧系统。

### 1.3.1 质量

在力学模型中，质量被抽象为不变形的刚体，质量元件对于外力作用的响应表现为一定的加速度。根据牛顿第二运动定律，若对质量作用一力  $F$ ，则此力和质量在与  $F$  相同方向获得的加速度  $\ddot{x}$  成正比，表示为

$$F = m\ddot{x} \quad (1.1)$$

式中，比例常数  $m$  为刚体质量，是惯性的一种量度。

对于扭振系统，广义力为扭矩  $M$ ，广义加速度为角加速度  $\ddot{\varphi}$ ，则扭矩与角加速度成正比，表示为

$$M = J\ddot{\varphi} \quad (1.2)$$

式中，比例常数  $J$  为刚体绕其旋转中心轴的转动惯量。质量  $m$  和转动惯量  $J$  是表示力（力矩）和加速度（角加速度）关系的变量。

通常认为质量元件是刚体（即不具有弹性特征），不消耗能量（即不具有阻尼特性），在对实际结构进行振动分析时，如果是突出某一部分的质量而忽略其弹性与阻尼，就得到没有弹性和阻尼的“质块”，同样可得到没有阻尼和质量的“弹簧”以及没有质量与弹簧的“阻尼器”等各种理想化的元件。

### 1.3.2 弹性

在力学模型中，弹簧被抽象为无质量而具有线性弹性的元件。弹性元件在振动系统中提供使系统恢复到平衡位置的弹性力，弹性力又称恢复力。恢复力与弹性元件两端的相对位移



的大小成正比，即

$$F = -kx \quad (1.3)$$

式中，负号表示弹性恢复力  $F$  与相对位移的方向相反； $k$  为比例常数，通常称为弹簧常数或弹簧刚度。扭转弹簧产生的是恢复力矩，扭转弹簧的位移是角度。

图 1-1 所示为弹性元件，对于弹性元件需要指出以下几点：

(1) 通常假定弹簧是没有质量的，而实际上，物理系统中的弹簧总是具有质量的，在处理实际问题时，若弹簧质量相对较小，则可忽略不计；若弹簧质量较大，则需对弹簧质量做专门处理或采用连续模型。

(2) 工程实践表明，大多数振动系统的振幅不会超出其弹性元件的线性范围，因此，这种线性化处理符合一般机械系统的实际情况。

(3) 对于角振动的系统，其弹簧为扭转弹簧，其弹簧刚度  $k$  等于使弹簧产生单位角位移所需施加的力矩，其量纲为  $ML^2T^{-2}$ ，通常取单位为  $(N \cdot m)/rad$ 。

(4) 实际工程结构中的许多构件，在一定的受力范围内都具有作用力与变形之间的线性关系，因此，都可以作为线性弹性元件处理。

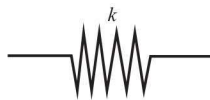


图 1-1 弹性元件

### 1.3.3 阻尼

振动系统的阻尼特性及阻尼模型是振动分析中最困难的问题之一，也是当代振动研究中最活跃的方向之一。

在力学模型中，阻尼器被抽象为无质量而具有线性阻尼系数的元件。在振动系统中，阻尼元件提供系统运动的阻尼力，其大小与阻尼器两端相对速度成正比，即

$$F = -c\dot{x} \quad (1.4)$$

式中，负号表示阻尼力的方向与阻尼器两端相对速度的方向相反； $c$  为比例常数，称为阻尼系数，满足式 (1.4) 表示的这种阻尼称为黏性阻尼系数。

图 1-2 所示为弹性阻尼元件，对于阻尼元件需要指出以下几点：

(1) 通常假定阻尼器的质量是可以忽略不计的。

(2) 对于角振动系统，其阻尼元件为扭转阻尼器，其阻尼系数  $c$  是产生单位角速度  $\dot{\theta}$  需施加的力矩，其量纲为  $ML^2T^{-1}$ ，通常取单位为  $(N \cdot m \cdot s) / rad$ 。

(3) 与弹性元件不同的是，阻尼元件是消耗能量的，它以热能、声能等方式耗散系统的机械能。

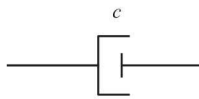
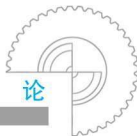


图 1-2 弹性阻尼元件

## 1.4 振动分析的一般步骤

研究机械系统的振动问题，一般分为下列几个步骤。



### 1.4.1 建立力学模型

实际的机械振动系统是很复杂的，为便于分析和计算，必须抓住主要因素，而略去一些次要因素，将实际系统简化和抽象为动力学模型。简化的程度取决于系统本身的复杂程度、要求计算结果的准确性以及采用的计算工具和计算方法等。

动力学模型要表示系统的主要动态特性及外部激振情况。机械系统本身结构的动态特性参数是质量、刚度（或弹性）和阻尼，如何进行简化是值得认真研究的。

图 1-3 (a) 所示为一辆汽车沿道路行驶时车身振动的力学模型，它是一个二自由度系统，其中弹簧常数就是悬架和轮胎的等效刚度，阻尼器表示减震器、悬架和轮胎的等效阻尼，车身的惯性简化为平移质量  $m$  和绕质心的转动惯量  $J$ 。图 1-3 (b) 所示为一桥式起重机起吊重物时的情况，研究突然吊起重物时绳索及桥架结构中的动力响应，可简化为双质量弹簧系统，其中  $m_1$  是小车质量加 1/2 桥架质量， $m_2$  为重物的质量， $k_1$  是桥架跨中的刚度， $k_2$  是绳索的刚度。建立的力学模型与实际的机械系统越接近，则分析的结果与实际情况越接近。

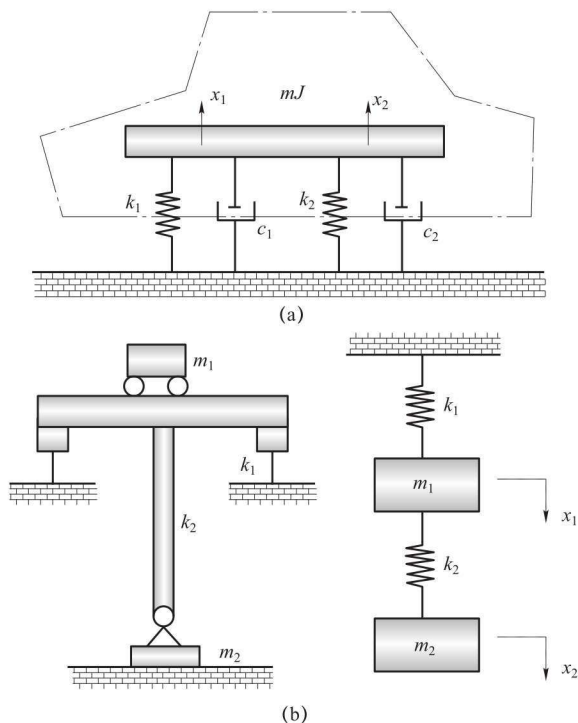


图 1-3 不同实验系统的力学模型

(a) 汽车车身振动；(b) 起重机起吊重物时的振动

### 1.4.2 建立数学模型

应用物理定律对所建立的力学模型进行分析，导出描述系统特性的数学方程，通常振动问题的数学模型为微分方程形式。



建立数学模型的目的是揭示系统的全部重要特性，从而得到描述系统动力学行为的控制方程。一个系统的数学模型应该包括足够多的细节，既能用方程描述系统的行为，又不致使其过于复杂。根据基本元件行为的属性，一个振动系统的数学模型可以是线性的，也可以是非线性的。线性模型处理简单、容易求解。非线性模型有时能够揭示线性模型不能够预测到的某些系统特性，所以需要实际系统做大量的工程判断以得到比较合理的振动系统模型。

有时为了得到更准确的结果，需要对系统的数学模型不断地进行完善。此时可以先用一个比较粗略的模型，以便能够较快地对系统的大体属性有所了解，之后再通过增加更多的元件和细节对模型进行不断改进，以便进一步分析系统的动力学行为。

图 1-4 所示为单摆，可绕水平轴转动的细长杆下端附有重锤，直杆的重量和锤的体积都可以不计，求单摆的运动微分方程及周期。

取偏角  $\theta$  为坐标，从平衡位置出发，以逆时针方向为正，锤的切向加速度为  $l\ddot{\theta}$ ，故有单摆的运动微分方程为

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad (1.5)$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

当  $\theta$  角很小时，可令  $\sin\theta \approx \theta$ ，则上式简化为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

设

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

式中， $\omega_n$  为固有频率。

则振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

其通解为

$$y = -\frac{g}{6l}\theta^3 + C_1\theta + C_2$$

式中， $C_1$ 、 $C_2$  为常数。

当  $\theta$  角较大时，显然，式 (1.5) 是一个非线性微分方程，将其中的  $\sin\theta$  展成泰勒级数， $\sin\theta = \theta - \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{1}{5}\theta^5 - \dots$  进行求解；但是当  $\theta$  角不是很小，也不十分大，如果不超过 1 弧度时，可删去  $\sin\theta$  展开式中的前两项，得到

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^2\right) = 0$$

其通解为

$$y = -\frac{g}{6l}\theta^3 + \frac{1}{72}\theta^4 + C_1\theta + C_2$$

可见单摆属于具有软特性的非线性振动系统。

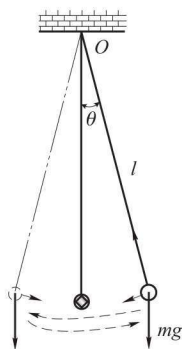
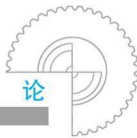


图 1-4 单摆





### 1.4.3 方程求解

为得到描述系统运动的数学表达式，需对数学模型进行必要的求解。通常这种数学表达式是位移为时间的函数形式，它表明系统运动、系统性质和激振（含初始干扰）的关系。求解方程的方法有：拉普拉斯变化方法、矩阵方法和数值计算方法等。

### 1.4.4 分析结论

根据方程解提供的规律和系统的工作要求及结构特点，可以做出设计和改进的决断，以获得所求问题的最佳解决方案。

## 1.5 简谐振动

结构振动时，描述振动情况的物理量是随时间变化的，可以表示为时间  $t$  的函数，如  $X(t)$ 、 $F(t)$  等。这种描述振动的方法称为时域描述，而函数  $X(t)$ 、 $F(t)$  称为时间历程。

周期振动中最简单的是简谐振动，可以用一个简单的实验来演示简谐振动的特性。图 1-5 所示为简谐振动，弹簧上悬挂着一个质量块，在静止时给质量块轻轻一击，质量块便在原来静平衡位置附近上下振动。如在质量块上放一个小光源  $s$ ，使一束光线照射在一条匀速水平移动的光敏纸带上，记录下质量块的运动过程，则这一运动过程可用下面正弦函数表达。

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (1.6)$$

式中， $T$  为周期； $A$  为离开静平衡位置的最远距离，称为振幅。这种按时间的正弦函数（或余弦函数）所做的振动，称为简谐振动。

上述简谐振动还可以看作一个做等速圆周运动的点在铅垂轴上投影的结果。如图 1-6 所示，一长度为  $A$  的直线段  $OP$ ，由水平位置开始，以等角速度  $\omega$  绕  $O$  点转动，任一瞬时  $OP$  在铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin \omega t \quad (1.7)$$

式中， $\omega$  的单位是  $\text{rad/s}$ 。 $\omega t$  称为相位，表示  $OP$  在时间  $t$  内的转角。

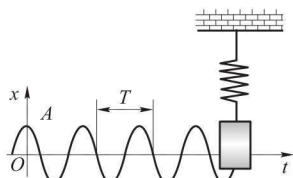


图 1-5 简谐振动

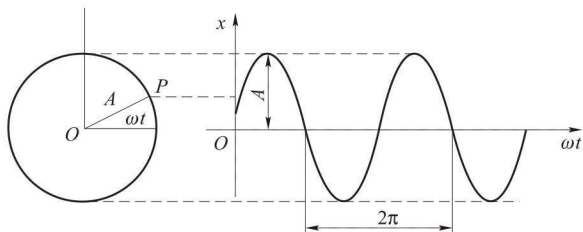


图 1-6 简谐运动表示为圆图上点的投影