

李光元 许巍 楼设荣 薛小刚 编著

机场工程设计优化 与CAD技术

JICHANG GONGCHENG
SHEJI YOUHUA
YU CAD JISHU

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

机场工程设计优化与 CAD 技术

JICHANG GONGCHENG SHEJI YOUHUA YU CAD JISHU

李光元 许巍 楼设荣 薛小刚 编著

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

机场工程设计优化与 CAD 技术/李光元主编. —西安:
陕西科学技术出版社, 2013. 7

ISBN 978—7—5369—5773—2

I. ①机… II. ①李… III. ①机场—建筑工程—计算
机辅助设计—AutoCAD 软件 IV. ①TU248.6—39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 128574 号

机场工程设计优化与 CAD 技术

出版者 陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社

西安北大街 131 号 邮编 710003

电话 (029)87211894 传真 (029) 87218236

[http : //www. snstp. com](http://www.snstp.com)

发行者 陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社

印 刷 陕西天地印刷有限公司

规 格 787 mm×1092 mm 16 开本

印 张 14.75

字 数 332 千字

版 次 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978—7—5369—5773—2

定 价 45.00 元

版权所有 翻印必究

前 言

近年来,通过参与一些机场工程的实际设计工作,了解了本研究领域国内的发展状况,掌握了目前国内机场的设计理论和方法。同时感到目前国内机场工程的优化设计没有比较系统的参考资料,在工作中缺乏指导,一定程度上制约了优化设计在工程中的应用。针对这种状况,为了满足教学的需要,推进优化技术在机场工程中的应用,总结国内外的研究成果,编写了本教材。

全书共 13 章。第 1 章介绍了机场设计的主要工作和国内研究的总体情况,第 2 章介绍了线性规划的基本理论和在机场工程中的应用,第 3 章介绍了非线性规划的基本理论,第 4 章介绍了机场地势优化设计理论,第 5 章介绍了飞行场地优化设计的内容,第 6 章讲述了净空的数学模型,第 7 章讲述了航线动态评定的方法,第 8 章讲述了机场排水 CAD 的设计方法,第 9 章介绍了 AutoCAD 的定制方法,第 10 章介绍了 AutoLisp 开发的基础知识,第 11 章介绍了 VBA 开发的基本原理,第 12 章通过综合实例程序介绍了开发技术在机场工程中的应用,第 13 章介绍了目前国内使用较广泛的 AECAD 的情况。

全书由李光元、许巍、楼设荣、薛小刚编写。

本书作为高等学校机场工程专业高年级的参考书,可以供道路与铁道工程专业机场工程研究方向的硕士研究生使用;对于机场工程研究人员也有一定的参考价值。

目 录

第 1 章 概论	(1)
1.1 机场设计的主要阶段	(1)
1.2 机场计算机辅助设计的研究内容	(3)
1.3 机场优化与 CAD 的技术路线	(6)
1.4 国内外研究概况	(7)
第 2 章 线性规划在机场工程中的应用	(9)
2.1 线性规划的基本理论	(9)
2.2 机场土方最优调配	(13)
2.3 MATLAB 线性规划工具箱	(19)
2.4 机场多种土的方格土方计算及土方调配	(21)
2.5 机场土方最优调配图	(23)
第 3 章 非线性规划的基本原理	(28)
3.1 基本概念	(28)
3.2 等式约束条件下多变量函数的寻优方法	(31)
3.3 MATLAB 无约束非线性规划工具箱	(33)
3.4 MATLAB 约束最优化工具箱	(35)
第 4 章 大型机场地势优化设计理论	(42)
4.1 引 言	(42)
4.2 飞行场地设计表面几何模型	(42)
4.3 机场地势优化设计的数学模型	(46)
4.4 机场地势优化设计的求解方法	(55)
4.5 机场地势优化设计的数值分析方法	(59)
第 5 章 飞行场地位置综合优化设计	(63)
5.1 引 言	(63)
5.2 飞行场地数字地面模型	(63)
5.3 飞行场地位置优化设计的数学模型	(64)
5.4 飞行场地位置优化设计的最优化方法	(66)
第 6 章 机场净空规格评定的算法与实现	(68)
6.1 引 言	(68)
6.2 坐标系及坐标变换	(68)
6.3 军用机场净空评定问题的数学模型	(69)
6.4 民用机场净空评定问题的数学模型	(71)

6.5	机场净空评定程序介绍	(72)
第 7 章	面向选址的机场净空动态航线评定	(77)
7.1	引 言	(77)
7.2	飞机飞行状态的数学表示	(77)
7.3	飞机起落航线的数学表示	(78)
7.4	飞行区地面透视图的绘制	(80)
7.5	飞机沿起落航线飞行过程的动态模型	(85)
第 8 章	飞行场地排水优化设计	(87)
8.1	引 言	(87)
8.2	人工智能与专家系统的基本原理	(87)
8.3	飞行场地排水系统平面布置	(88)
8.4	飞行场地排水线路纵断面设计	(89)
8.5	飞行场地排水系统水文水力计算	(90)
8.6	飞行场地排水系统 CAD 软件介绍	(94)
第 9 章	AutoCAD 的定制方法	(95)
9.1	脚本文件	(95)
9.2	菜单定制	(101)
第 10 章	AutoLISP 语言基础	(105)
10.1	AutoLISP 语言的基本知识	(105)
10.2	AutoLISP 语言的运算函数	(111)
10.3	AutoCAD 的输入输出函数	(121)
10.4	AutoLISP 语言应用实例	(132)
第 11 章	VBA 基础	(140)
11.1	VBA 语言入门	(140)
11.2	VBA 应用实例	(145)
第 12 章	机场工程 CAD 常用程序设计	(153)
12.1	采集地形图上标高的方法	(153)
12.2	土方计算图	(158)
12.3	设计表面等高线	(179)
12.4	道面分仓图生成原理	(192)
12.5	AutoLISP 在绘制机场平面图中的应用	(195)
12.6	VBA 在绘制机场平面图中的应用	(199)
第 13 章	机场工程 CAD 软件	(207)
13.1	AECAD 软件	(207)
13.2	数字地面模型	(210)
13.3	飞行场地位置优化设计数据	(211)
13.4	机场地势优化设计数据	(215)
13.5	机场地势设计算例	(222)
参考文献		(229)

第 1 章 概 论

1.1 机场设计的主要阶段

机场勘测设计的过程通常包括选址、可行性研究、总体规划、初步设计和施工图设计几个阶段。图 1.1 显示了机场建设的程序。对于机场设计工作来说,可行性研究、初步设计、施工图设计是主要的阶段。

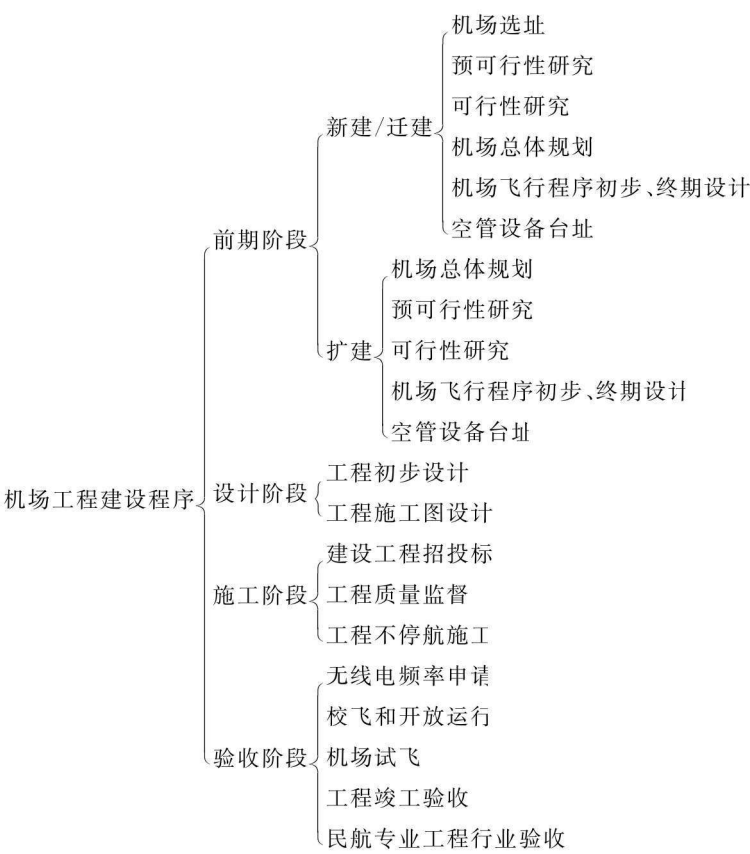


图 1.1 机场工程建设程序

1.1.1 可行性研究阶段

可行性研究阶段在选址批复以后进行,有时进一步细分为预可行性研究及可行性研究二个阶段。

可行性研究的目的主要在于确定修建该机场的必要性和可行性。可行性研究阶段的内容主要包括以下几个方面:

(1)研究当地人口、经济、社会发展的状况及该地区所处的政治、军事及经济地位,提出在该地区修建机场的政治、军事意义及经济价值;

(2)调查当地的交通及经济发展状况,预测其近期及远期航空业务量(飞行架次);

(3)进行当地的水文气象条件、建筑材料来源调查及工程地质勘察;

(4)根据当地的净空条件进行机场位置初选及土石方工程量估算;

(5)研究并提出修建机场后对周围环境的影响程度;

(6)确定机场建设规模及工程造价估算;

(7)确定机场建设资金来源;

(8)综合考虑各方面因素,提出修建该机场的必要性和可行性。

可行性研究阶段主要成果是可行性研究报告,主要解决机场建设项目在政治上、技术上和经济上是否可行的问题。

在此阶段还要进行飞行程序预先研究,研究该地区能否有效编成飞行程序,是否有重大飞行障碍或安全隐患。

1.1.2 初步设计阶段

初步设计阶段前有总体规划阶段。总体规划是对机场未来的规划期内的发展和建设规模进行规划和预测,在其后的建设项目应遵守总体规划的要求。

初步设计阶段应该在总体规划批复后进行,内容主要包括以下几个方面:

(1)进行机场净空评定及飞行程序初步设计;

(2)进行飞行场地平面尺寸设计及机场的适应性分析;

(3)根据初选的飞行场地位置,进行工程地质勘探及工程测量;

(4)进行机场道面初步设计,确定各区域的道面结构层厚度;

(5)进行机场地势初步设计,进一步优化飞行场地平面布置;

(6)进行机场排水系统平面规划、水文水力计算及排水结构物初步设计;

(7)进行机场通信导航系统、供油系统、供电及助航灯光系统等设计;

(8)进行机场供水、消防及其他配套设施设计;

(9)进行工程量计算及工程造价概算。

初步设计阶段的成果主要是设计图纸和概算,是上报国家用于批复投资和主要技术方案的依据。

1.1.3 施工图设计阶段

施工图设计阶段应该在初步设计批复后进行,内容主要包括以下几个方面:

(1)进行机场地势详细设计,进一步优化飞行场地表面设计坡度;

(2)进行机场道面详细设计,确定各区域的道面结构层厚度及分仓高程;

(3)进行机场排水系统平面设计及纵断面设计;

- (4)进行机场排水结构物大样图设计；
- (5)进行机场通信导航系统、供油系统、供电及助航灯光系统等详细设计；
- (6)进行机场供水、消防及其他配套设施的详细设计；
- (7)进行工程量计算及工程造价计算。

初步设计和施工图设计阶段是机场设计中工作量最大的阶段,它们是机场工程建设具体实施的技术方案。初步设计还是国家批复投资的依据,施工图是机场建设施工的依据,竣工验收和决算的主要依据。

1.2 机场计算机辅助设计的研究内容

机场场道工程在初步设计和施工图设计阶段的图纸在细节要求上有所差别,适合采用计算机辅助设计的技术工作主要体现在数值计算和图纸自动生成上。其中数值计算就包含了方案的优化选择。

机场工程的设计工作通常分为道面工程、土方工程、排水工程、附属设施等四个部分。

1.2.1 道面工程

道面工程的核心是确定道面的结构层组合设计和计算厚度。计算依据是《军用机场水泥混凝土道面设计规范》和《军用机场沥青道面技术规范》。《军用机场水泥混凝土道面设计规范》是基于可靠性理论的有限元回归计算方法。《军用机场沥青道面技术规范》是基于弹性层状体系的计算理论的一种方法。

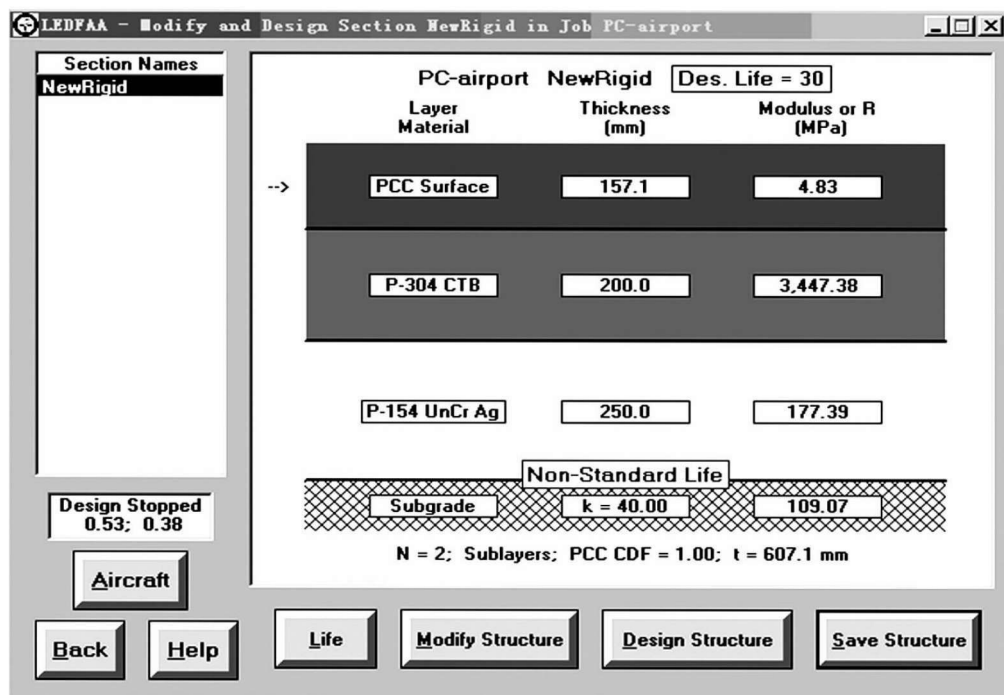


图 1.2 LEDFAA 程序界面

我国民航部门道面设计按照《民用航空运输机场水泥混凝土道面设计规范》实行。此外在设计过程中还常采用美国 FAA 的 LEDFAA 程序。

道面工程的主要图纸有：

(1)场道工程总平面图。本图主要内容是平面详细定位,包括每一个关键点的机场坐标,每一个关键尺寸的标注,它是机场施工过程中放样的定位依据,也是计算道面工程量的重要数据来源。其中有关各部位的尺寸计算在可研阶段基本解决。工作量比较大的是跑道长度计算、各关键点的坐标计算和标注等。

(2)场道工程道面结构平面图。本图主要表示各部位道面的道面结构平面分布,是道面工程量计算的主要依据。本图计算量不大,绘图比较简单,比较复杂的是计算道面工程量。

(3)道面结构图。本图主要表示道面各设计断面的结构组合、构造状况。

(4)道面分仓图。本图是道面图中最复杂的图纸,每一个分块点的标高计算工程量巨大,几乎无法运用手工计算和绘制图纸,必须采用程序来完成和修改。同时每一块道面板的尺寸必须明了,尤其是异形板,必须至少有一边的长度需要标注。

(5)道面接缝补强结构图。本图主要表示接缝形式、系机环、静电接地等设施。

(6)道面标志图。本图机场同公路一样,采用道路漆在道面上标示出飞机运动轨迹、停放位置、其他辅助飞行的标志。

(7)道面工程材料统计表。统计出所有道面工程量,含有面层、基层等所有道面工程和材料的用量。

1.2.2 土方工程

机场工程中土方工程占有重要位置,具有图纸多、计算量大的特点。土方工程的主要图纸有：

(1)机场地形图。本图主要把机场布置在天然地形图上,用于分析原始地形。机场地形图的绘制方法,一般是由勘察单位提供的电子地图加上设计平面图构成,不需要采用更复杂的计算绘图技巧。

(2)机场坡度控制图。本图主要表示所有的控制点的位置和高程,各个坡段的长度等信息。根据设计模型采用程序来生成,也可以自行在 AutoCAD 中绘制,计算工作量比较大,需要标注控制点标高和各个坡度间的坡度与坡长。由于在设计过程中需要对方案反复修改,进一步增加了工作量。

(3)机场跑道纵断面图。主要表示跑道中心线的标高和地质剖面。主要需要计算表面设计标高、槽底设计标高、工作标高,还需要标注天然标高,注意每个数据的推求方法、修改方法、竖曲线的计算方法。

(4)机场滑行道纵断面图。主要表示滑行道中心线的标高和地质剖面。与跑道纵断面类似,注意每个数据的推求方法、修改方法、竖曲线的计算方法。

(5)机场横断面图。主要表示某位置断面的标高和地质剖面。与纵断面类似,注意每个数据的推求方法、修改方法。

(6)机场设计表面等高线图。一般标注全场设计表面标高,然后以一定的等高距来绘

制设计面的等高线,飞行区内部是设计标高,飞行区以外的天然土面区是天然标高插值,注意等高线的推求原理。

(7)土方计算图。一般需要标注天然标高、设计标高、工作标高和土方量,要掌握各个标高的含义、推求方法、计算方法、零线的画法、土方的统计原理、优化设计的理念。特别要注意由于道面结构厚度的影响,如何处理道槽边缘的土面错台。

(8)土方调运图。表示全场土方调运的规律。掌握土方调运图中各个数据的来源,线性规划的运用。

(9)机场地基处理设计图。包含机场地基处理方法的确定、范围的确定、对机场土方量的计算的影响等内容。

1.2.3 排水工程

机场排水工程的总体造价占机场的比例不高,但是设计工作非常重要,图纸的量比较多,而且很多工作比较零碎,设计人员劳动强度也比较大。其主要图纸有:

(1)飞行区场外防洪及场内排水工程平面图。本图主要表现洪水线路的布局等内容,主要工作有流域特征的计算、各计算断面的流量计算、坐标的计算等。

(2)各排水沟结构图。本图主要表现排水构筑物的断面形状,主要工作有根据结构和流量计算尺寸、确定结构等。

(3)各排水沟配筋图。结构计算采用现行规范规定的方法进行,采用力学原理和极限状态理论计算配筋。

(4)各排水沟纵断面图。主要工作量与跑道纵断面图相像,需要计算各个点的标高。

(5)各节点大样图。大样图一般不规则,难以采用计算机自动生成,一般采用标准图或采用手工计算绘图,结合查标准图的方式进行。

(6)排水工程工程量统计表。排水工程的工程量统计比较繁杂,工程量种类比较多,工程量的计算与构筑物密切相关,由于构筑物中有许多节点构筑物,一般采用手工计算,结合定额查表。

1.2.4 附属工程

附属工程主要包括道路、围界等零星工程。道路可以采用相关道路 CAD 软件设计。实际上由于道路工程量很小,等级很低,设计工作量不大,采用手工设计绘图也不复杂。其主要图纸有:

(1)道路、围界总平面图。本图主要计算工作是各个点坐标的计算。

(2)道路结构图。与道面结构图类似。

(3)围界结构图。一般可以采用通用图纸。

(4)各个大门构造图。本图需要按相关规范进行大门结构稳定性计算。

(5)附属工程材料统计表。

在具体工程中,究竟需要多少设计计算和设计图纸也不是一成不变的,需要针对当地的具体工程技术问题具体分析。

1.3 机场优化与 CAD 的技术路线

1.3.1 优化的理论基础

最优化问题是一个古老的问题。在 17 世纪,英国伟大的科学家 Newton 开创了微积分时代,已经提出了极值问题,后来出现了 Lagrangian 乘数法;1847 年法国数学家 Cancky 研究了函数沿何方向下降最快的问题;1949 年苏联数学家提出解决下料问题和运输问题这两种线性规划问题的求解方法。在 20 世纪 40 年代后,随着计算机技术的发展,优化理论得到了突飞猛进的发展,形成了线性规划、整数规划、非线性规划、几何规划、动态规划、随机规划等理论。近年来,神经网络理论、遗传算法等理论也逐步发展,开始在实际科学中得到推广。

尽管优化的数学理论多种多样,有传统的像线性规划和二次规划这样的数学模型法,也有比较现代的神经网络、遗传算法等。这些方法在机场工程中都有应用研究,但是目前在实际工程中得到比较广泛的应用的还是数学规划法。其他方法都在研究阶段,并未广泛应用到实际工程中。

1.3.2 CAD 的实现方法

由于优化技术总是离不开计算机技术,在机场工程的应用中总是和软件编程技术联系在一起。机场优化与 CAD 的实现一般有以下几个关键步骤:

- (1)获取原始数据。就是通过测绘、勘察等手段获得用于设计的原始资料。
- (2)建立设计模型。设计理论是设计方法的核心,依据设计理论,建立符合计算机运算特点的设计模型是键的技术问题。
- (3)求解模型。对于建立的模型,一定要有适当的求解方法,使之获得稳定解。
- (4)分析结果。运算获得的解不一定完全符合设计习惯,这时候就需要对结果进行分析,或者进行必要的人工修改。
- (5)形成工程图或计算报告。计算机辅助设计的目的是获得设计方案,工程设计的最终成果一般要体现在工程图纸上。

在以上几个步骤中,每一步都有比较复杂的过程,涉及方方面面的知识。如获取原始数据就包括获取地形数据、飞机数据、气象数据、土壤地质资料等。每一种数据的获取方法都有其独特的方法,都会运用到其独特的专业知识和一些交叉学科的知识。

本教材不介绍设计的具体技术问题,具体技术问题请参考相关的技术规范,内容集中在数学模型的建立和求解部分,特别是如何获得优化的方案,以及如何把计算结果生成满足工程要求的图纸。通常在实现绘图功能时有两条技术路线,一条是开发独立平台,完成全部功能;二是借助通用平台如 AutoCAD 等,在其基础上进行二次开发,不再开发通用功能,直接读取数值分析结果,自动按照设计规范生成工程图纸。目前第二种方法是应用比较普遍的方法,也是本书介绍的方法。

1.4 国内外研究概况

1.4.1 国外研究概况

早在 20 世纪 70 年代初,美国等发达国家已开始进行机场工程 CAD 课题的研究,到 20 世纪 80 年代末,已经达到了较高水平。美国 Intergraph 公司有一套机场工程 CAD 软件。软件所包含的内容比较全面,主要包括计算机辅助机场净空评定,计算机动态模拟飞机沿起飞着陆航线飞行,计算机辅助机场地势设计,计算机辅助机场道面设计,计算机辅助机场排水设计以及计算机辅助机场灯光、通讯导航、供油供电系统等机场辅助设施的设计等。除了美国的 Intergraph 软件外,国外在该领域比较优秀的软件还有英国的 Moss 软件和德国的 Card 软件等。Autodesk 公司的 Auto civil 3D 也是一款功能十分强大的土木工程软件,可以完成机场的部分设计,特别是场地平整设计。

1.4.2 国内研究概况

国内开展此项课题的研究相对较晚。20 世纪 70 年代末,国内一些从事机场工程专业的教学、科研和设计人员自发地进行了一些探索性研究。到 20 世纪 80 年代末,开始出现了一批初步研究成果。1978 年 9 月,空军工程学院机场建筑工程系冯国任等人研究并提出了“机场地势设计最佳折面法”的理论,提出了飞行场地设计表面为空间连续折面的几何模型。由于“最佳折面法”缺乏系统的优化理论指导,在最优解的求解过程中会出现无解现象,因此,未能得到推广应用。

1980 年 4 月,广州军区空军勘察设计所张春星与中山大学吴兹潜等人研究并提出了“机场地势的优化设计”方法,该方法提出了“瞎子爬山法”的优化理论,尽管从理论上讲,用此方法肯定能够得到最优设计方案,但是,由于其收敛速度太慢,计算时间太长,因此,也未能得到推广应用。

1984 年 12 月,空军工程学院机场建筑工程系张季霖等人研究并提出了“机场地势优化设计技术——等式约束迭代法”的理论。“等式约束迭代法”是在“最佳折面法”的基础上,针对“最佳折面法”所存在的问题进行进一步研究的结果。同样,由于“等式约束迭代法”缺乏坚实的数学理论基础,尽管其收敛速度较快,但是,在最优解的求解过程中也会出现无解现象,因此,也未能得到推广应用。

1985 年 6 月,空军工程学院机场建筑工程系楼设荣经过深入细致的数学理论研究,完整地推导出了机场地势优化设计的数学模型,并提出了用“起作用集法进行机场地势优化设计”的理论,从而,奠定了机场地势标准断面优化设计的理论基础。

1987 年 12 月,楼设荣发表了“用微机进行机场地势优化设计”一文,进一步解决了机场地势优化设计的数值分析方法,实现了用微机进行机场地势优化设计,从而,使此项课题进入了实际推广应用阶段。

1988 年 3 月,由空军工程学院机场建筑工程系研制的“机场地势优化设计技术”成果,

在西安通过了专家技术鉴定。该成果解决了机场地势标准断面优化设计的理论及程序设计问题。此项成果获得了 1990 年度中国人民解放军科技进步二等奖。

1988 年 12 月,由广州军区空军勘察设计与中山大学联合研制的“RUNWAY 软件”在广州通过了专家技术鉴定。该成果解决了飞行场地方格网土方工程图的计算机辅助绘图问题。此项成果获得了 1991 年度中国人民解放军科技进步三等奖。

1991 年 1 月,楼设荣发表了“机场地势非标准断面优化设计”一文,提出了飞行场地设计表面为空间连续扭曲面的几何模型,推导出了机场地势非标准断面优化设计的数学模型,并提出了其求解的最优化方法,从而,解决了机场地势非标准断面的优化设计问题。

1991 年 2 月,由空军工程学院机场建筑工程系研制的“机场表面设计计算机辅助设计技术”成果,在北京通过了专家技术鉴定。该成果解决了机场地势非标准断面优化设计的理论及机场地势主要设计图纸的计算机辅助绘图问题。此项成果获得了 1993 年度中国人民解放军科技进步三等奖。

1995 年 4 月,楼设荣提交的“机场工程优化与 CAD”研究论文,该研究成果综合应用了最优化技术、CAD 技术、数据库技术以及计算机动画技术,研究了机场工程优化设计的理论及计算机辅助设计方法,实现了计算机辅助各种规格等级的军用及民用机场净空评定,飞机沿给定起飞着陆航线飞行过程的计算机动态模拟,飞行场地表面位置平、纵、横综合优化设计,机场土方最优调配,旧机场道面加厚层的优化设计以及机场场道工程主要设计图纸的计算机自动绘图等问题。该成果已被应用于 20 多个新建或扩建机场的实际工程设计,取得了十分显著的经济效益和社会效益。

同济大学建立了一个基于样条曲面的机场模型,同时在机场道面的维护与管理方面作出了贡献。

中国民航机场建设集团公司开发了一个比较综合的机场 CAD 软件,可以进行大部分机场图纸的设计。杭州飞时达软件、红叶、家园土方等都可以进行土方计算和场地平整,这些软件由于不是以机场为研究对象,所以使用不方便,不符合机场的设计习惯,在压实度的控制与分压实度土方的统计上难以实现,在坡度设计上需要人工控制来体现机场的技术要求,不能智能控制。

我国与国外的技术标准有比较大的差别,尤其在军用机场领域,由于飞机的不同,技术规格走的是独立自主的路线,不能直接使用国外的软件。需要研究的问题很多。主要研究方向有:基于地理信息系统的 CAD 研究;基于人工智能或其他先进理论的决策系统,确定机场最优设计方案;基于勘测、设计、施工和管理的工程全寿命计算机应用体系。

国内机场 CAD 的尚未规模化、产业化,需要大量有志于本行业的专家学者不断深入研究。

第2章 线性规划在机场工程中的应用

在机场优化中线性规划是被广泛应用的一种规划,主要应用在土方调运、物资分配等项目中。线性规划又是数学规划理论中较为基础的理论,它为更复杂的数学规划理论奠定了优化的基本思路。

2.1 线性规划的基本理论

2.1.1 几个定义

根据数学规划的有关理论,对于线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (LP) \quad (2-1)$$

设 $\mathbf{K} = (k_{ij})_{s \times t} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_t)$, $R(\mathbf{K}) = s$ 。

定义 1: $\mathbf{K}$ 的任意一个非奇异的 $s \times s$ 子矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \dots, \mathbf{p}_{j_s})$$

称为 (LP) 的一组基。

$\mathbf{B}$ 非奇异 $\Leftrightarrow |\mathbf{B}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \dots, \mathbf{p}_{j_s}$ 线性无关。

定义 2: 如果变量 x_j 所对应的列向量 $\mathbf{p}_j$ 包含在 $\mathbf{B}$ 中, 则称 x_j 为基变量, 否则称 x_j 为非基变量。

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + \dots + x_s \mathbf{p}_s + x_{s+1} \mathbf{p}_{s+1} + \dots + x_t \mathbf{p}_t = \mathbf{f} \quad (2-2)$$

定义 3: 设有一组基

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \dots, \mathbf{p}_{j_s})$$

相应地, 记 $\mathbf{B}$ 的基变量为:

$$\mathbf{x}_B = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s})^T$$

则方程组 $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{f}$ 有唯一解 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}$ 。

若再令其余变量(非基变量)等于零, 就得到 $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ 的一个解: $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}$, 其余 $x_j = 0$ 。这样的解称为 (LP) 的基本解。

定义 4: 如果 (LP) 的基本解中所有变量非负, 则称这个解为基本可行解。相应的基称为可行基。

定义 5: 如果 (LP) 的基本可行解中非零的变量个数正好是 s 个, 则称这个 (LP) 是非退化的。否则, 当非零变量个数少于 s 个时, 称为是退化的。

2.1.2 线性规划的基本定理

定理 1: 方程组 $Kx=f$ 的任意解 $x=(x_1, x_2, \dots, x_t)^T$ 是基本解的充分必要条件是: x 的非零分量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}$ 所对应的列向量 $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_s}$ 线性无关。

定理 2: 设 G 是 (LP) 的可行域, $x \in G$, 则 x 是 G 的极点 (或称顶点) 的充分必要条件是: x 是 (LP) 的基本可行解。

定理 3: 如果 (LP) 有可行解, 则 (LP) 一定有基本可行解。

定理 4: 如果 (LP) 有最优解, 则最优解一定在可行域的某一个极点达到。如果在多于一个极点达到最优值, 则对于这些极点的任意一个凸组合, 目标函数值相同。

定理 5: 设有一个极点 $x^{(0)}$, 不妨设前 s 个分量为非零分量, 即 $x^{(0)} = (x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, \dots, 0)^T$; 所对应的一组基向量为 $B = (p_1, p_2, \dots, p_s)$; 相应的一组非基向量为 $N = (p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_t)$; 并设 $B^{-1}N = D^T$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_s, c_{s+1}, \dots, c_t)^T = (c_B^T, c_N^T)^T$; 则 $x^{(0)}$ 是 (LP) 的最优解的充分必要条件是向量 $\lambda = c_N - Dc_B \geq 0$ 。即,

$$\lambda_j = c_j - \sum_{i=1}^s c_i d_{ij} \geq 0, \quad j = s+1, s+2, \dots, t。$$

[证明]

设

$$\begin{aligned} x &= (x_B^T, x_N^T)^T \\ K &= (B, N) \\ x^{(0)} &= ((x_B^{(0)})^T, 0^T)^T \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} Kx &= f \\ \Downarrow \\ (B, N)(x_B^T, x_N^T)^T &= f \\ \Downarrow \\ Bx_B + Nx_N &= f \\ \Downarrow \\ x_B &= B^{-1}f - B^{-1}Nx_N \\ &= x_B^{(0)} - D^T x_N \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &= c^T x \\ &= (c_B^T, c_N^T)(x_B^T, x_N^T)^T \\ &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (x_B^{(0)} - D^T x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T x_B^{(0)} - c_B^T D^T x_N + c_N^T x_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^{(0)} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{Dc}_B)^T \mathbf{x}_N \\
&= f(\mathbf{x}^{(0)}) + \lambda^T \mathbf{x}_N
\end{aligned}$$

当 $\mathbf{x}$ 是基本可行解时, 必有 $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$ 。

因此, $\lambda \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \mathbf{x}^{(0)}$ 是 (LP) 的最优解。

证毕。

定理 6: 如果存在某个 $\lambda_j = c_j - \sum_{i=1}^s c_i d_{ij} < 0, j \in I = \{s+1, s+2, \dots, t\}$, 但所有的 $d_{ij} \leq 0, i \in E = \{1, 2, \dots, s\}$, 则 (LP) 无可行解。

定理 7: 如果有某个 $\lambda_j < 0$, 且至少存在一个 $d_{ij} > 0$, 那么, 可以构造一个新的基本可行解 $\mathbf{x}^{(1)}$, 使 $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$ 。

从上述基本定理, 我们可以看出: 定理 1 至定理 4 给出了线性规划问题 (LP) 的解的性质, 这些定理表明 (LP) 的最优解只能在可行域的极点处达到; 定理 5 和定理 6 给出了 (LP) 的最优解的判别准则, 因此, 被称作为最优解的判别定理, 其中 λ_j 称之为检验数。定理 7 称之为极点转换定理, 可证明如下:

[证明]

设初始解 $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}, 0, \dots, 0)^T$, 并设 $\lambda_\beta < 0, \beta \in I = \{s+1, s+2, \dots, t\}, d_{i\beta}$ 不全小于或等于零, $i \in E = \{1, 2, \dots, s\}$

初始基 $\mathbf{B} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_s)$, 则非基向量 $\mathbf{p}_\beta$ 可以表示为基向量的线性函数, 即

$$\mathbf{p}_\beta = \sum_{i=1}^s d_{i\beta} \mathbf{p}_i = d_{1\beta} \mathbf{p}_1 + d_{2\beta} \mathbf{p}_2 + \dots + d_{s\beta} \mathbf{p}_s \quad (\text{a})$$

又因为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 为初始极点, 则有:

$$\mathbf{Kx}^{(0)} = \mathbf{f}$$

或,

$$x_1^{(0)} \mathbf{p}_1 + x_2^{(0)} \mathbf{p}_2 + \dots + x_s^{(0)} \mathbf{p}_s = \mathbf{f} \quad (\text{b})$$

则 $(\text{b}) - \theta(\text{a})$ 得:

$$(x_1^{(0)} - \theta d_{1\beta}) \mathbf{p}_1 + (x_2^{(0)} - \theta d_{2\beta}) \mathbf{p}_2 + \dots + (x_s^{(0)} - \theta d_{s\beta}) \mathbf{p}_s + \theta \mathbf{p}_\beta = \mathbf{f}$$

设

$$\bar{\mathbf{x}}^{(1)} = (x_1^{(0)} - \theta d_{1\beta}, x_2^{(0)} - \theta d_{2\beta}, \dots, x_s^{(0)} - \theta d_{s\beta}, 0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0)^T$$

则 $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ 是一个解。欲使 $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ 成为可行解, 必须使

$$\begin{cases} x_i^{(0)} - \theta d_{i\beta} \geq 0, & i \in E = \{1, 2, \dots, s\} \\ \theta \geq 0 \end{cases}$$

即 x 满足

$$0 \leq \theta \leq \min \left\{ \frac{x_i^{(0)}}{d_{i\beta}} \mid (d_{i\beta} > 0, i \in E) \right\}$$

不妨设

$$\theta_a = \frac{x_a^{(0)}}{d_{a\beta}} = \min \left\{ \frac{x_i^{(0)}}{d_{i\beta}} \mid (d_{i\beta} > 0, i \in E) \right\}$$

则取 $\theta = \theta_a$ 时, $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ 成为基本可行解, 设为 $\mathbf{x}^{(1)}$ 。即,