

高等学校教学用书

三角学专门教程

上册

С. И. 諾渥塞洛夫著

高等教育出版社

3300157

电子学研究所图

51.24054

864

上

高等学校教学用书



三角学专门教程

上册

С. И. 諾渥塞洛夫著
鄭醒華等譯

高等教育出版社

51.24054
869

高等学校教学用书

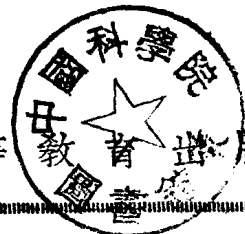


三角学专门教程

下册

С. И. 諾渥塞洛夫著
郑醒华等译

高等教育出版社



本書系根據蘇聯國立“蘇維埃科學”出版社（Государственное издательство “Советская наука”）出版的諾渥塞洛夫（С. И. Новоселов）著“三角學專門教程”（Специальный курс тригонометрии）1954年第二版譯出。原書經蘇聯文化部高等教育司審定為師範學院教學參考書。

本書由西北大學鄭醒華、張以信、張玉田與紀琰翻譯，趙根榕校訂。

DU04/13

三角學專門教程

上 冊

С. И. 諾渥塞洛夫著

鄭 醒 華 等 譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

中華書局上海廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·42 開本 850×1168 1/32 印張 8 2/16 字數 195,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—20,000

定價(8) ¥ 0.95

本書根据苏联國立“蘇維埃科学”出版社(Государственное издательство «Советская наука»)出版的諾渥塞洛夫(С. И. Новоселов)著的“三角学專門教程”(Специальный курс тригонометрии) 1954年第二版譯出,原書經苏联文化部高等教育司審定为师范学院教学参考書。

本書中譯本分上下兩册,由西北大学鄭醒華、張以信、張玉田、紀琰翻譯,由趙根榕校訂。

三角学專門教程

下 册

С. И. 諾渥塞洛夫著

鄭醒華等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海三星印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 19010·196 開本 850×1168 1/32 印張 9 4/16 字數 254,000

一九五六年十二月上海第一版

一九五六年十二月上海第一次印刷

印數 1—22,000

定價(8) 1.10

序

本書預計作为师范学院物理数学系初等数学專門教程“三角学”部分的教学参考書之用。編寫這本書的时候所遵循的原則和我在“初等代数專門教程”一書的原則一样，在那本書的序言中已經把它們詳細敘述了，茲不复贅。

高等师范学校的学生必須深入与系統地研究初等数学，即研究他們將來在中学里要教的那門科目，这恐怕是不需要多加說明的了。在高等师范学校中所研究的“高等”数学的各門課程，虽然它們具有巨大的价值，但它們本身並不能保証未來的教师具备必要的業務上的修养。

以前，人們錯誤地認為：师范学院的学生僅只在學習教学计划中称为“初等数学專門教程”的那个科目时才研究初等数学。这个科目只包含初等数学的相当少的和主要的問題，同时只研究它們相互間的关系与它們跟“高等”数学的諸科目之間的关系。然而数学教学法的研究、教育實踐的學習与特別實習課的工作却都需要学生認真地独立研究初等数学。因此我認為：關於初等数学的教学書籍，不能嚴格地局限於“專門教程”大綱的範圍，而应当包含初等数学的系統的、深入的、有科学根据的与全面的敘述。在初等数学的教科書与教学参考書中，学生应当能找到他在中学数学教程的內容方面所發生的各种各样的問題的答复。这些理由，迫使我在寫這本書时給出了關於三角的有系統的敘述；其实在“專門教程”大綱中，三角問題比較起來所佔的比重並不大。

本書应当看成我的“初等代数專門教程”一書的延續，所以凡

是在“初等代数專門教程”中的对三角学教程的某些部分是必要的那些問題(例如,方程与不等式的一般概念),在課文中不再敘述,而只引証“初等代数專門教程”里有关的節次。

本書第七章包含复数域的初等超越函数論的基礎。这些材料本來並不屬於三角学。我把它加到三角学教程中來,是因为不能彼此無关地來研究复数域的指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数。

必須指出:初等数学“專門教程”是“年青的”、尙待建成的教学科目;現行大綱只在不久以前編成;而教学書籍还是首次寫作。因此本書不可能沒有缺点,我希望从高等师范学校的教师、中学教师与大学生那里得到有助於消除这些缺点的批評、願望与意見。

我認為有必要指出莫斯科区师范学院代数教研組所給予我的巨大的帮助,謹向該教研組主任安得洛諾夫(И. К. Андронов)与組員奧庫涅夫(А. К. Окунев)及希姆比列娃婭(Е. П. Шимбирева)表示真誠的謝意。

謝謝拉里切夫(П. А. Ларичев)、庫圖佐夫(Б. В. Кутузов)、孟傑諾夫(П. С. Моденов)与列紹夫(Н. О. Решов)在我編著這本書时所給予的帮助;謝謝阿塔別科夫(Н. А. Атабеков)為本書繪制插圖。

在这第二版中,为了適應师范学校物理数学系的現行大綱,新添一章:“球面三角学原理”並改正了第一版中的許多錯誤。

所有關於本書的批評与願望,請寄 Москва, 64, Подсосенский пер., д. 20, Издательство “Советская наука”。

С. И. 諾渥塞洛夫

1954年1月1日,於莫斯科



目 錄

引 論

§ 1. 論三角学教程的内容.....	1
§ 2. 射影理論的基本概念.....	3
§ 3. 角及其量度.....	7
§ 4. 坐标平面	14
§ 5. 論單調函数	17
§ 6. 週期函数	20

第一章 三角函数的几何理論

§ 7. 角的三角函数	23
§ 8. 三角函数的各种解釋	28
§ 9. 三角函数的自变量	34
§ 10. 三角函数的定义域.....	37
§ 11. 自变量的某些特別值的三角函数.....	38
§ 12. 三角函数的週期性.....	41
§ 13. 三角函数正負号的开区間.....	42
§ 14. 三角函数的偶性和奇性.....	45
§ 15. 三角函数值的集合.....	46
§ 16. 按三角函数的給定值,求所有弧的集合的方法	52
§ 17. 三角函数間的关系. 三角恆等式.....	56
§ 18. 三角函数的單調区間.....	71
§ 19. 三角函数的連續性.....	81
§ 20. 連續延拓原理, 自变量的奇值.....	85
§ 21. 三角函数的圖象.....	89

第二章 加法定理及其推論

§ 22. 加法定理.....	93
-----------------	----

§ 23. 簡化公式.....	110
§ 24. 倍弧的三角函数.....	119
§ 25. 分自变量的公式.....	121
§ 26. 三角函数的積化为和的公式.....	127
§ 27. 三角函数的和化为積的公式.....	132
§ 28. 各种三角变换的例題.....	138
§ 29. 一些三角函数的和与積的計算.....	149
§ 30. 輔助角的引入与三角代換式.....	173
§ 31. 有理化代換.....	182
§ 32. 研究函数的例題.....	189

第三章 反三角函数

§ 33. 反三角函数.....	198
§ 34. 施於反三角函数的三角运算.....	211
§ 35. 反三角函数間的关系.....	216
§ 36. 對於三角函数施行反三角运算.....	224
§ 37. 加法公式.....	230
§ 38. 反三角函数和的变换的例題.....	240
§ 39. 切貝謝夫多項式.....	249

下 册 目 錄

第四章 方程与不等式

§ 40. 三角方程	255
§ 41. 关于方程的解的奇異情形	262
§ 42. 具有相同的已知三角函数值的兩弧之間的关系	265
§ 43. 利用代換式解方程	273
§ 44. 有理化代換	277
§ 45. 三角方程一般解的公式的变換	283
§ 46. 三角方程的各种特殊解法	288
§ 47. 几个三角方程組及其解法	302
§ 48. 反三角函数符号下含有未知量的方程	311
§ 49. 几个超越方程解法的例子	322
§ 50. 最簡三角不等式	326
§ 51. 三角不等式及其他超越不等式的各种解法	333
§ 52. 含有自变量及其三角函数的不等式	345
§ 53. 几个著名的極限	353
§ 54. 几个最大值与最小值的问题	355
§ 55. 超越方程的近似解	361

第五章 几何圖形的元素的計算。三角学的应用

§ 56. 一般概念	364
§ 57. 三角形的基本元素之間的关系	365
§ 58. 三角形的角所滿足的三角恆等式与不等式	371
§ 59. 各次元素。連比	376
§ 60. 三角形的各种元素之間的关系	378
§ 61. 陶洛波夫解三角形的一般原理	390
§ 62. 三角形解法的基本情形	392
§ 63. 三角形解法的非基本情形	400
§ 64. 关于多角形解法的问题	405
§ 65. 三角学在立体几何問題中的应用	413
§ 66. 測量問題的概念	425
§ 67. 三角学在物理学、力学、工程方面的应用	432

3301037

§ 68. 利用三角函数表的計算	439
------------------------	-----

第六章 三角函数的解析理論

§ 69. 三角学中公理化的方法	450
§ 70. 唯一性定理	460
§ 71. 函数 $C(x)$ 和 $S(x)$ 的几何解釋	463
§ 72. 三角函数的各种具体定义	454
§ 73. 关于三角函数理論的各种構成法	474
§ 74. 三角函数的超越性	480
§ 75. 用解析方法計算三角函数的值	482

第七章 复数域中的初等超越函数

§ 76. 复数域中的指数函数及其与三角函数的关系	484
§ 77. 复自变量的三角函数	491
§ 78. 对数函数	497
§ 79. 复自变量的反三角函数	501
§ 80. 幂函数, 一般指数函数与一般对数函数	506

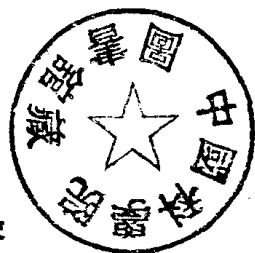
第八章 球面三角学原理

§ 81. 基本概念	512
§ 82. 球面三角形元素間的基本关系	517
§ 83. 直角球面三角形元素間的关系	522
§ 84. 直角球面三角形解法	523
§ 85. 关于斜角球面三角形解法的概念	529
§ 86. 球面三角形的角盈和面積的計算公式	535
§ 87. 球面三角学的各种应用	537

俄文名詞索引

中文名詞索引

引 論



电子学研究所

§ 1. 論三角学教程的内容

三角是由計算實踐的需要產生的，也就是由於創造一種工具，以便按照各種幾何圖形的足夠個已知元素而計算其他元素的這種需要而產生的。早在古代希臘，由於解一系列天文學的計算問題，三角就得到了相當大的發展。第九到十三世紀中，中亞細亞——塔什克，烏茲別克，阿捷爾拜疆——的科學家的著作，在作為獨立科學的三角學的建成這一方面有着奠基的意義。雖然三角學得到了作為具有專門研究法的科學科目的獨立性，但畢竟它的最終目的還在於制定最簡單的幾何圖形（平面三角形和球面三角形）的元素的計算方法。三角函數的學說一直是以幾何作圖為基礎的；用幾何方法所建立的三角函數間的代數關係，使我們能夠用代數方法，以研究三角函數、以施行變換、以建立幾何圖形元素間的各种關係。這樣一來，便形成了以幾何為基礎同时又廣泛應用代數方法的三角學所特有的性質。

科學的進一步的發展證明，三角函數的價值不僅在於制定解決幾何計算問題時所必要的工具；在研究週期過程時這些函數在力學和物理上也獲得了重要的意義。這樣，三角函數的理論有了獨立的意義，並且引起了這個理論的不依賴於幾何的解析結構的需要。

三角函數的解析理論奠基於偉大的學者、彼得堡科學院院士尤拉的著作。偉大的俄羅斯數學家羅巴切夫斯基提出不依賴歐氏

几何系統以定义三角函数的問題后，創立了三角函数的解析理論，幂級数的工具是这理論的基礎。

現代，三角学作为独立的科学已不存在：关于几何圖形的元素的計算問題自然屬於几何，这兒三角只起着“輔助的”作用；另一方面，三角函数的解析理論自然归併到分析中講述初等函数的一般理論那一章里。虽然現在三角学不再作为独立的科学而存在，但是它仍旧是很重要的独立的教學課目。在中学的数学教程中三角学确实佔有相当大的比重。

因为建立三角函数解析理論所必需的十分發达的解析工具远超出大綱的范围，所以中学的三角学教程势必要以几何为基礎。此外，三角函数的几何理論在很大的程度上適應着三角学的实际应用。

在現代中学三角学教程里反映出兩種路綫，即函数路綫和計算路綫。第一种表現在三角函数作为数字自变量的函数的研究上，由於三角函数在現代数学解析中、物理中、力学中、工程中起着巨大的作用，而有重要的原則性的价值。第二种表現在几何圖形的元素的計算方面，因为給出几何、物理、工程、天文、測量等等所必需的計算方法，而有重要的实用价值。^①

按照师范学院初等数学專門教程的总任务，三角学專門教程

① 中学教程中上述兩種路綫的适当配合是数学教學法的任务。我們只提出，下面兩種極端的观点是同样錯誤的。

第一种極端表現在忽視函数路綫而認為三角学只是“三角形的解法”。这种在許多旧教科書中佔統治地位的观点現在已变成史話了。

另一种極端表現在忽視計算的路綫。依照國外“改良主义运动”的函数濫用，“三角形解法”被認為是某种“無思想性”与“低級的”东西。这种观点之不能为苏維埃教學法所接受，正認為三角学好像只是数学分析的一章，因而“取消”三角学作为一个独立的教學課目的那种不切实际的想法一样。國外的这种歪曲以及与其类似愚笨的主張，比方說將內容貧乏的微積分“概要”放到中学教程中，在現在先進的教學法中是不受欢迎的。

的目的在於加深、發展三角學教程，並打下它的科學基礎以及通曉三角的實際應用。三角學專門教程包含中學數學教程中所有問題的廣泛敘述，因此與初等數學專門教程的其他章節同樣，從中學教師業務修養的觀點來看，它有很重要的價值。師範學院的教學計劃包含着數學解析與函數論的詳細的教程。因此專門教程中包括三角函數的解析理論和它有關的初等復變函數的學說的基礎，這可使未來的教師領會到中學教程中數學科目的科學內容。

在引論這一章中，概述一下在師範學院所研究的其他課目中已知的知識，和作為三角學教程以後各章敘述的基礎的知識。

§ 2. 射影理論的基本概念

為了寫出由點 A 和 B 所界的線段的確定方向，按一定次序給出點 A 和 B ；第一個點（寫在第一個位置上的）叫做線段的始點，第二個點（寫在第二個位置上的）叫做它的終點（圖 1）。有向線段叫做向量。

設 AB 是已知向量；經過點 A 和 B 的直線 l 含有線段 AB 的一切點；向量 AB 的始點 A 將直線 l 分成兩條射線，其中一條包含向量的端點 B ，我們說：這條射線和向量 AB 的方向相同；另一條不包含點 B ，我們說：這第二條射線和向量的方向相反（圖 2）。



圖 1.



圖 2.

如果點 A 和 B 相重，就說：向量 AB 是零向量。

將某個線段 l 取作長度單位。線段 AB 的長（對於已知的量度單位來說）叫做向量 AB 的長或模。向量的模是這樣表示： $|AB|$ 。

設 AB 和 CD 是位於同一直線 l 上的兩個異於零向量，而且都異於零向量；這兩個向量可能方向相同，也可能方向相反。這表示下列事實：第一種情形中，直線 l 上和 AB 同方向的射線與和 CD 同方向的射線有公共部分，它也是直線 l 上的射線（圖 3）；第二種情形中這兩條射線的公共部分或者是線段，或者是點（公共始點），或者是空集合（兩射線沒有公共部分）（圖 4）。

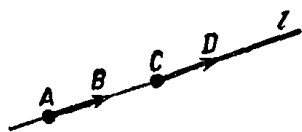


圖 3.

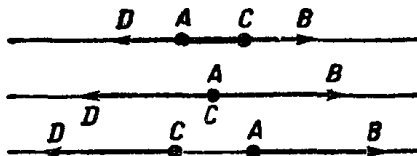


圖 4.

設 AB 和 CD 是平面上位於二平行直線上的兩個異於零向量的向量；這二向量可能方向相同，或者方向相反。這表示下列事實：第一種情形中已知向量的終點 B 和 D 位於平面上直線 AC 的同側，直線 AC 是他們始點的連線（圖 5）；在第二種情形中點 B 和 D 位於直線 AC 的異側（圖 6）。

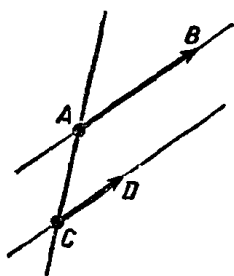


圖 5.

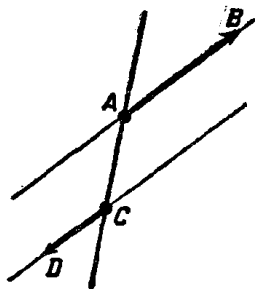


圖 6.

兩向量當且僅當它們平行，或位於同一直線上、方向相同、且長度相等時，才認為是相等的（圖 7）。

用和某向量相等的向量來代替它，叫做向量的平移。

設 l 是已知直線, 在其上給出兩點: 原點 O 和單位點 E , 這時線段 OE 的長度等於 1。我們說: 在直線上由點 O 和 E 確立了正方向: 直線 l 上各種異於零向量的向量, 其方向與單位向量 OE 的方向相同(相反)時, 看成正(負)方向(圖 8)。零向量認為是沒有方向的。

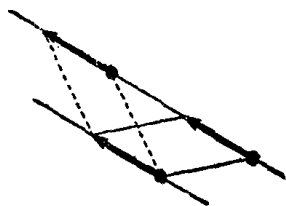


圖 7.

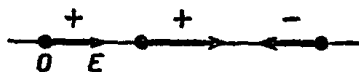


圖 8.

確立了正方向和選取了單位線段的直線, 叫做軸。

設 AB 是位於軸 l 上的向量; 如果它有正方向, 它的長度就叫做向量的量; 如果有負方向, 它的長度加上負號叫做向量的量; 零向量的量看成等於零。向量 AB 的量是這樣表示: AB 。

向量加法按照下列法則進行: 為了加已知向量, 應當(利用平移法)使第二個向量的始點連結到第一個的終點上, 第三個向量的始點連結到第二個向量的終點上, 余依此類推, 然後作一連結第一向量的始點和最後向量的終點的向量。

設 $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ 是已知點; 這時按照上述法則, 有:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1} = A_1A_{n+1} \quad (\text{圖 9}).$$

在特別情形, 如點 $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ 位於一直線上(圖 10,

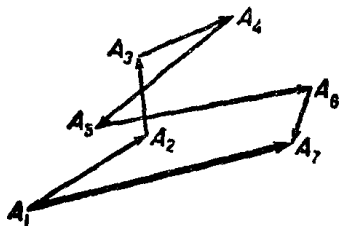


圖 9.

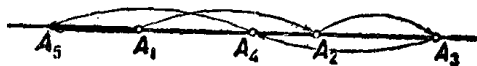


圖 10.

$n=4$), 法則也可適用。如 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是位於軸上的向量 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ 的量, 則向量和(或叫和向量)的量等於被加向量的量的和:

$$A_1A_{n+1} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1}$$

或

$$A_1A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

最后的这个等式, 在几何中, 對於兩個被加向量的情形, 可以借助於直接討論點 A_1, A_2, A_3 的一切可能的相互配置(六種情形)而建立, 用完全歸納法, 且可以推廣到任意個被加向量的情形。

如所週知,

1°. 自點 A 引至軸 l 的垂線的垂足 A_1 叫做點 A 在軸 l 上的射影。

2°. 向量 AB 與軸 l 在同一平面上。聯結 AB 的始點的射影 A_1 與終點的射影 B_1 , 得向量 A_1B_1 。這個向量的量 A_1B_1 叫做 AB 的射影。 $\pi_l AB = A_1B_1$ (圖 11)。為簡便起見, 向量 A_1B_1 的量 A_1B_1 與向量 A_1B_1 本身, 常常用同一術語, 統叫做射影。

向量平移時它在已知軸上的射影不變 (圖 12)。

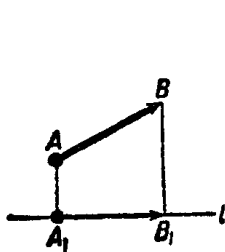


圖 11.

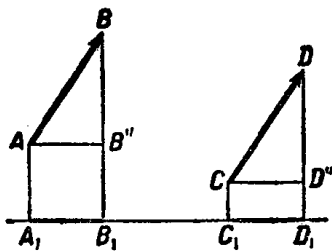


圖 12.

設 $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ 是平面上的任意折線。把這個折線的各節看作向量 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$, 其方向由頂點的給出次序而決定。和向量

$$A_1A_{n+1} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1}$$