高等数学实训教程（下册）

吴少祥 胡雅彬 主编

西北大学出版社

高等数学实训教程(下册)

吴少祥　胡雅彬　主编

西北大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学实训教程/吴少祥,胡雅彬主编. —西安:西北大学出版社,2009.9
ISBN 978-7-5604-2641-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①吴…②胡… Ⅲ. 高等数学-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP 数据核字(2009) 第144858 号

高等数学实训教程

出版发行	西北大学出版社	社址	西安市太白北路229 号
电话	029 - 88303313	经销	新华书店经销
印刷	陕西奇彩印务有限责任公司印刷	开本	787 ×1092 1/16
版次	2009 年9 月第1 版	印次	2009 年9 月第1 次印刷
字数	243 千字	印张	10
书号	ISBN 978 - 7 - 5604 - 2641 - 9	定价	20.00 元

前 言

本书是根据教育部最新制定的《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》编写的实训教材.该书既可作为教师教学参考用书,也可作为学生学习《高等数学》课程的训练提高用书.

本书内容包括:函数极限与连续、导数与微分及应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分学、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换以及线性代数等九章内容.本书结合理工类专业的实际情况,着重对高等数学的基本概念、基本理论与基本方法进行剖析,对学生的训练题目作了严格地筛选,重点突出、特点鲜明.

本书的结构和特点为:

1.以"应用为目的,必须够用为度"兼顾学生后续学习为原则,不拘泥于数学学科自身的严密性、逻辑性.

2.每章按"知识要点、例题选讲、实训题目"形式进行编写,结构清晰.

3.实训题型全面、难度适中、不强调过分复杂的运算技巧及论证,注重高等数学基本知识内容的掌握.

参加本书编写的有:西安电力高等专科学校数学教研室胡雅彬(上册知识要点、例题选讲),吴少祥(下册知识要点、例题选讲),余庆红(第一章实训题目(作业)及答案),姚振宇(第二章实训题目(作业)及答案),寇磊(第三章实训题目(作业)及答案),吴文海(第四章实训题目(作业)及答案),赵启峰(第五章实训题目(作业)及答案),马小燕(第六章实训题目(作业)及答案),廖虎(第七章实训题目(作业)及答案),任晓全(第八章实训题目(作业)及答案),段东东(第九章实训题目(作业)及答案),本书由段东东制定编写大纲,由吴少祥、胡雅彬负责全书统稿.

本书由吴文海主审,并提出了许多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢.另外,本书在编写过程中也得到了西安电力高等专科学校有关部门领导及西北大学出版社的大力支持,在此一并致以诚挚的感谢.

由于作者水平有限,本书中难免有不妥之处,恳请读者多给予批评指正.

编 者

2009 年6 月

目　录

第六章 微分方程

知识要点

1.微分方程的基本概念:微分方程的定义、阶、通解、特解.

2.可分离变量的微分方程:

形式:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y).$$

求解可分离变量微分方程的步骤:

(1) 分离变量;

(2) 两端分别积分,可得原方程的通解.

如果问题为求特解,只需将初始条件代入求得的通解,确定常数 C 的值即可.

3.一阶线性非齐次微分方程:

形式:
$$y'+P(x)y=Q(x).$$

求解方法有以下两种:

(1) 常数变易法:

第一步,先求对应的齐次微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$;

第二步,设 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为
$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)}\mathrm{d}x$$

代入原方程可求得 $C(x)$
$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

从而所求一阶线性非齐次微分方程的通解为
$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

(2) 直接利用公式求解.

4.可降阶的微分方程:

(1)$y^{(n)}=f(x)$ 型:

求解方法:方程两端分别积分 n 次,便可得包含 n 个独立常数的通解.

(2)$y''=f(x,y')$ 型:

求解方法:作变换 $y'=P(x)$,则 $y''=P'$,代入原方程可将原方程化为一阶微分方程
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$$

若其通解为 $P=\varphi(x,C_1)$,则
$$y'=\varphi(x,C_1)$$

两端积分,可得原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x_1,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

5.二阶常系数齐次线性微分方程：

(1) 二阶常系数齐次线性微分方程的通解结构.

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解可写成

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

其中 $y_1(x),y_2(x)$ 是该方程的两个线性无关的特解.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程的解法.

二阶常系数齐次线性微分方程的解法一般步骤为：

第一步,写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；

第二步,求出特征根 r_1,r_2；

第三步,根据 r_1,r_2 的三种情况,按下表直接写出齐次方程的通解.

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

6.二阶常系数非齐次线性微分方程：

(1) 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解结构.

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的通解可写成

$$y=Y(x)+y^*(x)$$

其中 $Y(x)$ 是该方程对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解,而 y^* 是该方程的特解.

(2) 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解 y^* 的解法.

特解的求法可根据 $f(x)$ 的不同形式,运用待定系数法求之,具体设法可由下表详细给出.

自由项 $f(x)$ 的形式	特解 y^* 的形式
$f(x)=P_n(x)$ ($p_n(x)$ 为 n 次多项式)	$q\neq0$ 时：$y^*=Q_n(x)$ $q=0$ 而 $p\neq0$ 时：$y^*=xQ_n(x)$ $q=0$ 且 $p=0$ 时：$y^*=x^2Q_n(x)$
$f(x)=Ae^{\lambda x}$	λ 不是特征方程的根时：$y^*=ae^{\lambda x}$ λ 是特征方程的单根时：$y^*=axe^{\lambda x}$ λ 是特征方程的重根时：$y^*=ax^2e^{\lambda x}$
$f(x)=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$	$\lambda+i\omega$ 不是特征根时：$y^*=e^{\lambda x}(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$ $\lambda+i\omega$ 是特征根时：$y^*=xe^{\lambda x}(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$

例题选讲

例1 指出下列方程中哪些是微分方程,若是请指出其阶数.

(1)$x'(y')^2 - yy' + 1 = 0$; (2)$x = (\sin y)''$; (3)$y^3 = 2^x$;

(4)$y = (\sin 2x)'''$; (5)$x\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$; (6)$(ye^x)' = y'e^x + ye^x$.

解 方程(1)、(2)和(5)均为微分方程,阶数分别为一阶、二阶和一阶.其余均不是微分方程.因为,方程(3)不含导数,方程(4)中虽有导数运算,但只是已知函数 $\sin 2x$ 的导数,而没有未知函数的导数.(6)式是一个恒等式.

例2 试求分别以下列函数为通解的微分方程(其中 C、C_1、C_2 为任意常数).

(1)$y = C_1x + C_2$; (2)$y = x\tan(x + C)$.

解 $y = C_1x + C_2$ 中含两个任意常数,以其为通解的微分方程应是二阶微分方程.$y = C_1x + C_2$ 两次对 x 求导得,$y' = C_1$,$y'' = 0$.

因此 $y'' = 0$ 即为所求二阶微分方程.

(2)$y = x\tan(x + C)$ 中只含一个任意常数,以其为通解的微分方程应是一阶微分方程.两边求导得

$$y' = \tan(x + C) + x\sec^2(x + C)$$

把 $\tan(x + C) = \dfrac{y}{x}$ 代入上式消去 C 得

$$y' = \frac{y}{x} + x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

化简得微分方程 $$xy' = x^2 + y^2 + y.$$

说明:此类问题是求微分方程解的反问题,基本解法是利用微分法消去函数中的任意常数,得出相应的微分方程.

例3 求微分方程 $y' + 2y(y - a) = 0$ 的通解.

解 将所给方程分离变量得

$$-\frac{1}{2y(y - a)}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

两边积分

$$-\int \frac{1}{2y(y - a)}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x,\text{即}\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - a}\right)\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

所以 $$\ln\frac{y}{y - a} = 2a(x + C_1)$$

故所求微分方程的通解为

$$\frac{y}{y - a} = Ce^{2ax} \quad (C = e^{2aC_1}).$$

例4 若 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \ln 2$,求 $f(x)$.

解 方程两边同时对 x 求导数得 $f'(x) = 2f(x)$.分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}f}{f} = 2\mathrm{d}x$,两边积分得 $\ln f(x) = 2x + \ln C$,

即
$$f(x)=Ce^{2x}$$

由于 $f(0)=\ln 2$,代入上式得 $C=\ln 2$,所以 $f(x)=e^{2x}\ln 2$.

说明:带有未知函数的变上限积分的方程称为积分方程,通常是方程两边对 x 求导,把积分方程变为满足一定初始条件的微分方程来解.

例 5 求微分方程 $y'+y\tan x=\sec x$ 的通解.

解 方法一:公式法

由于 $p(x)=\tan x,Q(x)=\sec x$,所以原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]\\&=e^{-\int \tan x dx}\left[\int \sec x e^{\int \tan x dx}dx+C\right]\\&=e^{\ln\cos x}\left[\int \sec x e^{-\ln\cos x}dx+C\right]\\&=\cos x\left[\int \sec^2 x+C\right]\\&=\cos x(\tan x+C).\end{aligned}$$

方法二:常数变易法

方程对应的齐次方程为 $y'+y\tan x=0$,其通解为
$$y=C\cos x$$

设原方程的通解为 $y=C(x)\cos x$,则
$$y'=C'(x)\cos x-C(x)\sin x$$

将上述 y 和 y' 代入原方程整理得 $C'(x)=\sec^2 x$,所以
$$C(x)=\int \sec^2 x dx=\tan x+C$$

因此原方程的通解为
$$y=\cos x(\tan x+C).$$

例 6 求微分方程 $x^2dy+(2xy-x+1)dx=0$ 在 $y|_{x=1}=0$ 时的特解.

解 已知方程可写成
$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2}$$

这是一阶非齐次线性微分方程,利用通解公式直接求解.

由于
$$P(x)=\frac{2}{x},Q(x)=\frac{x-1}{x^2}$$

所以原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]\\&=e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int \frac{x-1}{x^2}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx+C\right]\\&=\frac{1}{x^2}\left[\int \frac{x-1}{x^2}\cdot x^2dx+C\right]\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+C\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}\end{aligned}$$

将初始条件 $y|_{x=1}=0$ 代入上式中，可得 $C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}.$$

例 7　设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

分析：$F(x)$ 满足的微分方程应含有其导数，先对 $F(x)$ 求导，并将其余部分转化用 $F(x)$ 表示，即可得出相应的微分方程，解之求出 $F(x)$ 的表达式.

解　(1) 由
$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2\mathrm{e}^x)^2-2F(x)\end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$.

(2) 利用一阶线性非齐次微分方程的通解公式得

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$，于是 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

例 8　求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

解　所给方程是非线性的，由于不含 y，属 $y''=f(x,y')$ 型，可用降阶法求解.

令 $y'=p$，则 $y''=p'=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1+p^2$$

分离变量，解得

$$\arctan p=x+C_1$$
$$p=\tan(x+C_1)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(x+C_1)$$

积分得通解为

$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

例 9　微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的两个线性无关的特解是(　　).

A. e^{2x} 与 $2\mathrm{e}^{2x}$　　B. e^{-2x} 与 $x\mathrm{e}^{-2x}$　　C. e^{-2x} 与 $4\mathrm{e}^{-2x}$　　D. e^{2x} 与 $x\mathrm{e}^{2x}$

解　$y''-4y'+4y=0$ 的特征方程为 $r^2-4r+4=0$，特征根为 $r_1=r_2=2$，所以原方程的两个线性无关的特解是 e^{2x} 与 $x\mathrm{e}^{2x}$，故应选 D.

A 中两个函数线性相关，B 和 C 中函数不是方程的解，均不可选.

例 10　微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解是________.

解　$y''-2y'-3y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r-3=0$，特征根为 $r_1=-1$，$r_2=3$. 所以通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

例 11　设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1$、$C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，求该方程.

解 通解所对应的特征根 $r_1=1+i, r_2=1-i$，即有特征方程为 $r^2-2r+2=0$，于是所求方程为 $y''-2y'+2y=0$.

说明：本题知识点为二阶常系数齐次线性微分方程特征方程与特征根的概念，由通解形状要能看出所对应的特征根.

例 12 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解 自由项 $f(x)=3x+1$ 为一次多项式，且 $q=-3\neq 0$，所以设特解为 $y^*=a_0x+a_1$.

将 y^* 代入原方程得

$$-3a_0x-2a_0-3a_1=3x+1$$

比较系数得 $$a_0=-1, a_1=\frac{1}{3}$$

于是所求方程的一个特解为 $$y^*=-x+\frac{1}{3}.$$

例 13 求微分方程 $y''+y=2\sin x$ 的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$.
所以对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为自由项为 $f(x)=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ 型，且 $\lambda=0, \omega=1$.
而 $\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的单根，因此设特解为

$$y^*=x(a\cos x+b\sin x)$$

将 y^* 代入原方程并化简得

$$2b\cos x-2a\sin x=2\sin x$$

比较两端的系数得 $$a=-1, b=0$$

于是所求的特解为 $$y^*=-x\cos x.$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x.$$

第七章 无穷级数

知识要点

一、常数项级数

1. 主要概念：常数项级数、收敛、发散、部分和.

2. 常数项级数的性质：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) 级数与其倍乘级数敛散性相同.

(3) 收敛级数的和差级数也收敛.

(4) 增减有限项不改变级数的敛散性.

(5) 收敛级数任意加括号仍收敛，反之不然.

3. 常数项级数敛散性的判定：

(1) 判定正项级数的敛散性.

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定发散.

② 利用比值审敛法判定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

若 u_n 中含有 $n!$，n^n，a^n 等因子时，选用比值审敛法比较简便. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$，则改用比较审敛法.

③ 利用比较审敛法判定正项级数的敛散性.

正项级数的比较法需要用已知敛散性的级数作比较，常用的参考级数有：等比级数（几何级数）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，其中 $a \neq 0$；p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$，其中常数 $p > 0$ 以及调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. 必须熟悉上述级数的敛散性.

(2) 利用莱布尼兹定理判定交错级数的敛散性.

(3) 判定级数绝对收敛与条件收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛，称为绝对收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

二、幂级数

1. 主要概念：幂级数、收敛半径、收敛区间、收敛域.

2. 求幂级数的收敛半径和收敛区间.

(1) 不缺项情形，如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若设$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则：

① 当$0<\rho<+\infty$时，收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$，收敛区间为$(-R,R)$.

② 当$\rho=0$时，收敛半径$R=+\infty$，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

③ 当$\rho=+\infty$时，收敛半径$R=0$，级数仅在$x=0$点收敛.

(2) 缺项情形，如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n-1}$，只需将后项与前项绝对值相比，取极限. 若设

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+1}}{a_nx^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|x^2=\rho x^2$$

则当$\rho x^2<1$时，原级数绝对收敛；当$\rho x^2>1$时，原级数发散.

若$\rho\neq 0$，则收敛半径$R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}$，收敛区间为$(-R,R)$；当$\rho=0$时，收敛半径$R=+\infty$，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$；当$\rho=+\infty$时，收敛半径$R=0$，级数仅在$x=0$点收敛.

在解题时，若仅求收敛区间，可以不讨论端点；若求收敛域，必须讨论端点处的敛散性.

3. 求幂级数的和函数.

求幂级数的和函数主要是利用幂级数的运算性质，对级数进行逐项求导或逐项积分等分析运算，把待求和函数的幂级数转化为已知其和函数的幂级数.

4. 将函数展开为x或$x-x_0$的幂级数.

利用间接法展开，需要记住e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\frac{1}{1-x}$，$\ln(1+x)$的展开式，以此作为公式使用，把所要展开的函数作恒等变形或求导、积分化为上述标准公式中的函数形式，而间接展开.

例题选讲

例 1　根据级数敛散性的定义判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$的敛散性，如果收敛，则求其和.

解　该级数的通项可以拆解成两项之差，即$u_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，因此前$n$项的和

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

因为$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$收敛，和为$\frac{1}{2}$.

说明：用定义判断级数是否收敛，即判断部分和数列$\{S_n\}$是否有极限，一般要尽量将通项u_n拆成两项之差$u_n=f(n)-f(n+1)$的形式，以求得S_n，这种方法叫做拆项法.

例 2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^n}{(1+n)^n}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{3}{\mathrm{e}} \neq 0$，所以该级数发散.

例 3 下列命题是否正确？

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 也收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也发散；

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

解 (1) 正确，利用级数加括号的性质判定.

(2) 不正确，如取 $u_n = \dfrac{1}{n}$，$v_n = -\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=0$ 收敛.

(3) 正确. 用反证法：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[(u_n+v_n)-u_n]$ 收敛，与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散矛盾.

(4) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而非充分条件. 如取 $u_n = \dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

例 4 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\dfrac{\pi}{4^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a^n}$　$(a>0)$.

解 (1) 级数的一般项满足

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 是取掉首项的调和级数，它是发散的. 由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

(2) 级数的一般项满足

$$0 < 3^n \sin\frac{\pi}{4^n} < \pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 收敛，由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$ 收敛.

(3) 级数的一般项满足

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是 $p=2$ 的 p 级数,由比较审敛法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

(4) 对一般项中的 a 进行讨论:

当 $a<1$ 时,$a^n\to 0(n\to\infty)$,此时一般项

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散. 当 $a=1$ 时,原级数为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 也是发散的.

当 $a>1$ 时,级数的一般项满足

$$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

因为此时 $a>1$,所以 $\frac{1}{a}<1$,由已知的几何级数的敛散性知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛. 综上所述,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 当 $0<a\leqslant 1$ 时发散,当 $a>1$ 时收敛.

说明:使用比较审敛法时,常根据一般项的形式将其放大或缩小,使得放大后的级数收敛,缩小后的级数发散. 有时需要用一些常用不等式,如 $\ln(1+x)<x(x>0)$;$0<\sin x<x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

例 5 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{n^n}$.

解 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4=\frac{1}{2}<1$,所以由比值审敛法知该级数收敛.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{(n+1)}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{5^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{\mathrm{e}}>1$,所以由比值审敛法知该级数发散.

例 6 判断下列级数是否收敛,若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$;

(4) $\frac{1}{1+\frac{1}{1}}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}+\cdots$.

解 (1) 这是交错级数,且

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$$

故级数满足莱布尼兹定理条件,所以级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p=\frac{1}{2}$ 的 p 级数,所以原级数是条件收敛的.

(2) 因为 $|u_n|=\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以原级数是绝对收敛的.

(3) 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$

由比值审敛法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}\right|$ 收敛,所以原级数是绝对收敛的.

(4) 由于 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$

很显然当 $n\to\infty$ 时,$(-1)^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ 没有极限,由级数收敛的必要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

例 7 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于( ).

A. 3 B. 7 C. 8 D. 9

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=10-2=8$,故应选 C.

例 8 下列级数中绝对收敛的是( ).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi$ D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

解 只须判断正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$的敛散性即可.

由于$\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$,故 A 项级数不绝对收敛;

$\left|(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$,故 B 项级数绝对收敛;

$\left|\dfrac{1}{n}\cos n\pi\right|=\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$,故 C 项级数不绝对收敛;

$\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n+1}\right|=\dfrac{n}{2n+1}$,但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$发散,D项级数不绝对收敛,故应选 B.

例 9 求下列幂级数的收敛半径与收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^{n+1}\cdot nx^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

解 (1) 因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+2}\cdot(n+1)}{4^{n+1}\cdot n}=4$,所以收敛半径$R=\dfrac{1}{4}$,收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

(2) 令$t=x-1$,原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$,因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

所以幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$的收敛半径$R=1$,收敛区间为$(-1,1)$.

又由于$x=t+1$,故原幂级数的收敛半径$R=1$,收敛区间为$(0,2)$.

(3) 幂级数缺少奇数项,不能利用普通的求收敛半径的公式去求收敛半径,这时可根据正项级数比值审敛法求其收敛半径.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot x^2\right|\\&=\frac{1}{2}|x^2|\end{aligned}$$

当$\dfrac{1}{2}|x^2|<1$,即$|x|<\sqrt{2}$时,幂级数收敛;当$\dfrac{1}{2}|x^2|>1$,即$|x|>\sqrt{2}$时,幂级数发散.

所以收敛半径$R=\sqrt{2}$,收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 10 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}\,2^n}$的收敛域.