高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

微 积 分 讲 义

上 册

朱光贵 主编

宇航出版社

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

微积分讲义

上　　册

朱光贵　主编

学报出版社

内 容 简 介

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习微积分而编写的函授教材。

全书分上、下两册，共八章，按照现行高等院校财经类专业本科学生学习的要求编写。

本书编写的特点是便于自学：重点突出，深入浅出，辅以较多的例题和习题，对部分习题作了解答。

本书可作为成人高校财经类专业的教材，也可作为全日制高校学生和自学青年学习微积分的参考书。

微 积 分 讲 义

上 册

朱光贵 主编

责任编辑：姜明河

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷所印刷

开本：850×1168 1/32　印张：12.75　字数：330千字

1988年6月第1版第1次印刷　印数：1—12,000册

ISBN 7-80034-065-1/G·012　定价：4.20元

前　言

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习微积分而编写的函授教材，也可供自学微积分的读者参考。

全书共分八章。第一章函数，第二章极限与连续，是微积分的基础；第三章导数与微分；第四章中值定理与导数的应用，是一元函数的微分学部分；第五章不定积分；第六章定积分，是一元函数的积分学部分；第七章多元函数，主要介绍二元函数的微积分；第八章是无穷级数。

作为函授教材，本书编写的基本指导思想是便于学员自学，因此在阐述每一问题时，力求讲得条理清楚，重点突出，概念明确，深入浅出。对于读者在自学中可能发生困难的地方，都作了比较详尽的分析和推导。每一基本内容后面的例题也选得较多，同时将解题过程尽量写得易于接受。每一章基本内容的后面均附有学习的基本要求和内容提要，以便学员复习和掌握重点。

进行函授学习，首要的环节就是自学，即自己阅读教材，一定要在每次面授课之前自学完指定的章节。自学可以按以下步骤进行：第一步先粗略地读一遍，初步了解一下这一部分的内容；第二步是精读，要逐字逐句地仔细阅读，搞清每一概念，掌握每一定理或计算方法，尽量弄懂证明的过程；第三步回忆并记住这一部分主要的内容，将没有弄懂的地方（证明过程或计算方法）做上记号，然后参加面授课，听完面授课之后，再复习一下这部分内容，做到基本掌握。最后，认真地做所布置的作业，在做作业时最好不要看书，即不要边看书边做作业，力争独立地完成作业。如果实在做不出来，可以参考例题或题解，但最终一定要自己真正掌握解题的方法。

由于编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

编　者

1987年3月

目 录

目　录

第五章　不定积分

一元函数积分学的基本问题之一，是求函数的不定积分，它是微分法的逆运算。本章主要介绍不定积分的概念、性质及求不定积分的一些基本方法。

§5.1　原函数与不定积分的概念

在这以前，我们学过了一元函数的微分法，微分法的中心问题是，给定一个函数 $f(x)$ 之后，如何求它的导数 $f'(x)$ 或微分 $f'(x)dx$。

在很多实际问题中，常常遇到相反的情形：如果已知一个函数的导数 $f'(x)$，如何求出这个函数 $f(x)$？

例如，若已知 $f(x)=x^2$，要你求导数 $f'(x)$，则由第三章求导数的方法可知：$f'(x)=2x$。

现在的问题是，若已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=2x$，试求 $f(x)$。由上面讲的可知 $f(x)=x^2$，即 $f(x)=x^2$ 的导数等于 $2x$。

我们暂且不谈给了函数的导数 $f'(x)$ 之后如何求这个函数 $f(x)$ 的一般方法。

仍然考虑刚才的例子，我们还可以得到另一个答案：$f(x)=x^2+1$ 时，也有 $f'(x)=2x$，即 $f(x)=x^2+1$ 也符合题目的要求。

进而，$f(x)=x^2+c$，（其中 c 为任意常数），也符合题目的要求。

为了区别这些情况，于是引进了原函数和不定积分两个概

念。我们先看原函数的概念。

一、原函数

定义：设已知 $f(x)$ 是定义在某区间上的一个函数，如果存在一个函数 $F(x)$，使得在该区间上的每一点，都有

$$F'(x)=f(x)，\text{或} dF(x)=f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数。

例1　设 $f(x)=2x$

由于 $(x^2)'=2x$

所以 $F(x)=x^2$ 是 $f(x)=2x$ 的一个原函数。

同样，$F(x)=x^2+1$ 也是 $f(x)=2x$ 的一个原函数。

例2　设 $f(x)=\cos x$

由于 $(\sin x)'=\cos x$

所以 $F(x)=\sin x$ 是 $f(x)=\cos x$ 的一个原函数。

同样，$F(x)=\sin x-2$ 也是 $f(x)=\cos x$ 的一个原函数。

从上面举的两个例子可见：

首先，给了函数 $f(x)$ 之后求它的原函数 $F(x)$ 的方法，全靠过去求导数的方法反推；

其次，对于同一个函数 $f(x)$，求出它的原函数不止一个，实际上有无穷多个。因为如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+c$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 c 为任意常数都是对的。

二、不定积分

上面我们讲到：如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+c$ 必定是 $f(x)$ 的原函数，即 $f(x)$ 的原函数有无穷多个。

现在的问题是：如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $F(x)+c$ 是否包含了 $f(x)$ 的所有的原函数呢？即是否还有可能存在 $f(x)$ 的另一个原函数 $\Phi(x)$，它不能写成 $F(x)+c$ 的形式呢？

这个问题的答案是肯定的。就是说，$F(x)+c$ 必定包含了 $f(x)$ 的所有的原函数。因为如果设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函

数，则由第四章拉格朗日定理的推论2可知：$\Phi(x)$ 与$F(x)$之差只能是一个常数，即

$$\Phi(x)=F(x)+c$$

于是我们得到了一个重要的结论：如果函数 $f(x)$ 有一个原函数$F(x)$，那么它就有无穷多个原函数，且所有的原函数刚好组成函数族$F(x)+c$，其中 c 为任意常数。

这样，我们就引进了下面的不定积分的定义。

定义：函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体，称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)dx$$

并称 $\int$ 为积分号，函数 $f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式，x 为积分变量。

因此，给定了函数 $f(x)$，求它的不定积分，就是求它的全体原函数，只要找到它的一个原函数$F(x)$，后面加上任意常数 c 就行了，因为$F(x)+c$ 就是它的不定积分。于是有

$$\int f(x)dx=F(x)+c \tag{5.1}$$

其中任意常数 c 称为积分常数。

例如：因为 $\sin x$ 是$\cos x$的一个原函数，所以$\cos x$的不定积分就是 $\sin x+c$，即

$$\int \cos x dx=\sin x+c$$

例3　求函数$f(x)=e^x$ 的不定积分。

解：因为 $(e^x)'=e^x$（或$de^x=e^x dx$，下略）

所以$F(x)=e^x$ 是$f(x)=e^x$ 的一个原函数。

$$\therefore \quad \int e^x dx=e^x+c$$

例4　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分。

解：因为当$x>0$时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

即$F(x)=\ln x$是$f(x)=\frac{1}{x}$的一个原函数（当$x>0$时），

所以有

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c \qquad (x>0)$$

而当$x<0$时，$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

即$F(x)=\ln(-x)$是$f(x)=\frac{1}{x}$的一个原函数（当$x<0$时），

所以有

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln(-x)+c \qquad (x<0)$$

综上所述，我们得到

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c \qquad (x\neq 0)$$

在上面的这几个求不定积分的例子中，当给定了被积函数$f(x)$之后，我们反过来应用求导数的公式，找出了它的一个原函数$F(x)$。我们自然要提出这样的问题：所给函数$f(x)$满足什么条件才有原函数存在？回答这个问题要用到"原函数存在定理"。下一章中我们将会看到：如果函数$f(x)$在某区间上连续，则在此区间上$f(x)$必定存在原函数$F(x)$。

从这个定理可知，原函数存在的条件只是函数连续，它比函数可导的条件还要低一些，因为一个函数连续，它不一定可导。

由于初等函数在其定义域内是连续的，所以初等函数在其定义域内必定存在原函数。

三、不定积分的几何意义

我们首先引进一个名词：积分曲线。

设$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，我们就称 $y=F(x)$ 的图形为函数 $f(x)$ 的一条积分曲线。

例如 $y=x^2$是$f(x)=2x$的一条积分曲线。

容易看出：如果$F(x)$ 是$f(x)$ 的原函数，则 $y=F(x)+c$ 的图形就是函数$f(x)$ 的积分曲线族。

这就是说：不定积分的几何意义就是函数 $f(x)$ 的积分曲线族（如图5-1），它们可由一条积分曲线沿 y轴上下平移而得到。

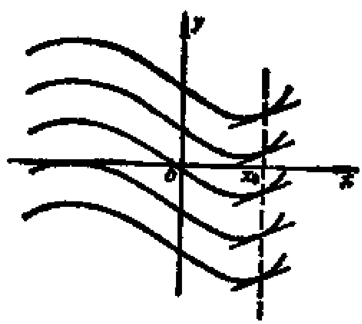

图 5-1

如果在每一条积分曲线上相同横坐标的点 $x=x_0$处作切线，这些切线是相互平行的，其斜率都等于$f(x_0)$ 。

对于某些求原函数的具体问题，有时要从全体原函数中找出某一个原函数，使它满足某个已知的条件。这就是要根据已知条件来确定积分常数 c 的值，从而找到满足此条件的某一个原函数。

例5　求通过点（2，3）、斜率为$2x$ 的曲线。

解：按题意，就是要在函数 $f(x)=2x$ 的积分曲线族中，找出一条曲线，使它通过点（2，3）。即求出 $f(x)=2x$ 的不定积分，再根据条件 $x=2$，$y=3$ 来确定积分常数，最后找出一条积分曲线。

因为 $\int 2x\,dx=x^2+c$

于是得积分曲线族为

$$y=x^2+c$$

将$x=2$，$y=3$代人，有

$$3=2^2+c \qquad \therefore c=-1$$

故所求的曲线方程为 $y=x^2-1$。

例6　已知自由落体的运动速度 v 和经过的时间 t 的关系为 $v=gt$（$g\approx 10\text{m/s}^2$，叫重力加速度），求下落的路程 s 与时间 t 的关系（设 $t=0$ 时，$s=0$）。

解：按题意，就是求 $f(t)=gt$ 的不定积分，并用条件 $t=0$ 时 $s=0$ 来确定积分常数 c 的值。

由于 $F(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是 $f(t)=gt$ 的一个原函数（$\because \frac{1}{2}gt^2$ 的导数等于 gt），

$$\therefore \int gt\,dt=\frac{1}{2}gt^2+c$$

$$\therefore \quad s=\frac{1}{2}gt^2+c$$

将 $t=0$ 时 $s=0$ 代人，得 $c=0$，

因此所求的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

例7　已知某工厂生产某产品 x 个单位时，边际成本为 $x+1$，又知当 $x=0$ 时，总成本为10，试求总成本 $C(x)$ 与产量 x 的函数关系。

解：由于边际成本是总成本对产量 x 的导数，故总成本 $C(x)$ 是边际成本的不定积分。

$$\therefore C(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+c$$

$$(\because \frac{1}{2}x^2+x \text{的导数等于} x+1)$$

将$x=0$时$C(x)=10$代入，得

$$10=c, \quad \therefore \quad c=10$$

所以总成本与产量x的函数关系为

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2+x+10$$

以上讲的是原函数与不定积分的概念及不定积分的几何意义，要求把这几个概念弄清楚。至于给了一个被积函数$f(x)$之后，如何求它的一个原函数$F(x)$，目前我们还没有更多的方法，只能将过去所学的求导数公式反过来运用。但是直接将求导数公式反过来用，有时不太方便，例如上面的例6和例7，函数$\frac{1}{2}gt^2$对t的导数等于gt，函数$\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$的导数等于$x+1$，这都不是基本的求导公式。为了更好地运用基本的求导公式反过来求原函数，下面我们讲一下不定积分的几个基本性质。以后我们将会看到，这样结合起来求原函数就方便得多了。

§5.2 不定积分的性质

不定积分有以下4个基本性质：

1° $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ (5.2)

或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$ (5.2′)

就是说，对$f(x)$先积分，后求导数（或求微分），则两种运算的作用相互抵消。

这个性质很容易由不定积分的定义直接推出。因为

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

其中c是任意常数，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，于是

$$\left[\int f(x)dx\right]'=\left[F(x)+c\right]'=f(x)$$

2° $\int F'(x)dx=F(x)+c$ (5.3)

或 $\int dF(x)=F(x)+c$ (5.3′)

就是说，对$F(x)$先求导数（或微分）后积分，则两种运算抵消之后要相差一个积分常数c，这是由于不定积分中应包括一个积分常数的缘故。

3° 有限个函数的代数和的不定积分等于各函数不定积分的代数和，即

$$\int\left[f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\psi(x)\right]dx$$
$$=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx\pm\cdots\pm\int\psi(x)dx \qquad (5.4)$$

这是因为等式右边的导数等于左边的被积函数之故。事实上，右边的导数为

$$\left[\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx\pm\cdots\pm\int\psi(x)dx\right]'$$
$$=f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\psi(x) \qquad \text{(由性质1°)}$$

4° 被积函数中不为零的常数因子可以移到积分号之外，即

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (5.5)$$

（其中k为非零的常数）

因为等式右边的导数为

$$\left[k\int f(x)dx\right]'=k\left[\int f(x)dx\right]' \qquad \text{(由导数的性质)}$$
$$=kf(x) \qquad \text{(由性质1°)}$$

即右边的导数等于左边的被积函数，由定义知$k\int f(x)dx$是$kf(x)$的不定积分。

以上几个性质看起来很简单，但运用这些性质结合求导公式

的反运算，则解决求不定积分的问题就方便多了（参看下节的例题）。

§5.3 基本积分公式

由于求函数的不定积分是求导数的逆运算，因此根据基本初等函数的导数公式，我们可以得到以下一些基本积分公式。

(1) $\int 0dx = c$ (5.6)

(2) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c \quad (a \neq -1)$ (5.7)

(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ (5.8)

(4) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \qquad (a>0,\ a\neq 1)$ (5.9)

(5) $\int e^x dx = e^x + c$ (5.10)

(6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ (5.11)

(7) $\int \cos x dx = \sin x + c$ (5.12)

(8) $\int \sec^2 x dx = \mathrm{tg} x + c$ (5.13)

(9) $\int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg} x + c$ (5.14)

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$ (5.15)

(11) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg} x + c$ (5.16)