湖南省教育考试院

2010—2013年

高考湖南卷试题分析

2010—2013NIAN GAOKAO HUNANJUAN SHITI FENXI

命题专家 贴心指导

真题分析 事半功倍

轻松应考 梦想成真

数学（理科）

湖南教育出版社

湖南省教育考试院

2010—2013年

高考湖南卷 试题分析

2010—2013NIAN GAOKAO HUNANJUAN SHITI FENXI

数学(理科)

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考湖南卷试题分析．数学．理科 / 湖南省教育考试院编．—长沙:湖南教育出版社,2013.12
ISBN 978-7-5539-1187-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①湖… Ⅲ．①中学数学课－高中—题解—升学参考资料 Ⅳ．①G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 008003 号

书　　名	2010—2013 年高考湖南卷试题分析　数学(理科)
作　　者	湖南省教育考试院
责任编辑	王华玲
责任校对	刘　源
出版发行	湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)
网　　址	http://www.hneph.com　http://www.shoulai.cn
电子邮箱	228411705@qq.com
客　　服	电话 0731—85486742　QQ228411705
经　　销	湖南省新华书店
印　　刷	长沙宇航印刷有限责任公司
开　　本	787×1092　16 开
印　　张	9.75
字　　数	221 400
版　　次	2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5539-1187-8
定　　价	22.00 元

前　　言

2013 年是湖南省实施新课程高考的第 4 年。4 年来，湖南高考数学试题以高等学校人才选拔要求和《普通高中数学课程标准（实验）》为依据，按照《普通高等学校招生全国统一考试大纲》和湖南省教育考试院制定的《普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）考试说明》的各项要求，并充分考虑湖南中学数学教学和高校招生的实际进行命制。

新课程高考湖南数学科试题的命制特点是：注重对基础知识和基本技能的考查，注意在知识网络的交汇处设计试题，强调通性通法；深化能力立意，重视对思维能力、应用意识及创新意识的考查；充分考虑文、理科考生的不同学习要求；试卷难度设置合理，区分功能较强。

为使广大高中数学教师和考生综合了解新课程高考以来数学试题特点，湖南省教育考试院组织命题专家、高考评卷教师和中学骨干教师撰写了普通高等学校招生统一考试指导用书——《2010—2013 年高考湖南卷试题分析　数学（理科）》。

本书包括两部分：第一部分是新课程高考湖南数学卷的风格与特色；第二部分是试题分析，这是本书的核心部分，也是与往年试题分析体例不同之处，本部分共分 13 章，每章包括高考考查的主要内容（或主要特点）、4 年试题分类分析（含考查目的、命题意图、解题思路、解析、典型失误、难度等内容）、相关链接及相关链接试题分析四部分，其中相关链接部分汇集了 2004—2009 年的大部分高考试题。

值得说明的是：1. 因统计工具的影响，某些年份的填空题没有呈现难度；2. 为使考生对试题内涵有更深刻理解，对某些年份的解答题撰写了命题意图；3. 由于新课程高考后《考试大纲》对某些内容的考查要求有变化，所以本书对相关链接部分的少数高考试题进行了改编。

本书力图通过对 4 年高考试题的分析与研究，帮助师生更深入地了解试题命制特点，掌握高考考点，进而制定科学的行之有效的教学与复习备考策略。

由于编写水平有限，不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2013 年 12 月

目　　录

Ⅰ.新课标湖南数学卷的风格与特色

2013 年是湖南省实施新课程高考后的第 4 年.4 年来,湖南高考数学试题都是按照《普通高等学校招生全国统一考试大纲》和湖南省教育考试院制定的《普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)考试说明》的各项要求,并充分考虑湖南中学数学教学和高校招生的实际情况进行命制的.2010 年的试题实现了由新课程前的命题到新课程后命题的平稳过渡,2011—2013 年试题继续保持了 2010 年试题的风格和特色,并有新的发展.

4 年来,数学试题的命制注重处理了如下几个方面的关系:

·知识与能力的关系

掌握数学知识是形成数学能力的基础,从"知识立意"向"能力立意"转变,并不意味着要削弱对知识的考查,而应是在考查知识的同时重视能力的考查,或者说,考查数学知识和考查数学能力并重.

·数学诸能力之间的关系

高考数学试题要求较全面地考查各种重要的数学能力,如运算求解能力、空间想象能力、抽象概括能力、推理求证能力、数据处理能力、应用意识、创新意识等,但应突出考查思维能力与创新意识.

·数学与现实的关系

高考数学试题不能仅限于考查课本知识,还应考查考生对现实问题的数学理解,考查考生的数学应用意识.

·文、理科之间的关系

由于文、理科考生的学习内容和要求有区别,在数学能力的表现上存在一定的差异,因此,对文、理科高考数学试题的设计应该是"异"大于"同",这里的"异"包括试题所涉及的数学内容的区别,考查同一内容的深度和广度的不同,侧重考查的能力不同以及容易题、中等难度题、难题分值比例的差异等方面.

在处理好上述四个方面的关系的同时,新课标高考湖南数学卷形成了自己的风格和特色,主要体现为:

一、坚持"四个注重"

1.注重教材在命题中的作用

教材是数学知识和数学思想方法的载体,又是教学的依据,理应成为高考试题的重要来源.4 年来,试卷中的部分试题是以课本例题、习题、阅读材料为素材,通过变形、延伸或拓展来命制的.如第 33 页第 2 题,第 64 页第 2 题,第 108 页第 8 题等都是由教材中的例、习题改编而来.这样做

的目的在于引导师生回归教材，重视基础.

2. 注重对主干知识的考查

4 年来，高考数学试题对支撑学科知识体系的主要内容的考查都保持较高比例，并达到必要的深度，构成试卷的主体. 如 2010—2013 年，试卷对函数(包括方程、导数、不等式)内容的考查分值分别为 31，39，35，40 分，保持了较高的比例.

3. 注重对数学思想方法的考查

4 年来，在高考数学试题设计中，对重要的数学思想方法(包括函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化、特殊与一般、有限与无限、或然与必然等思想方法)的考查贯穿于整卷之中，既注重了全面，又突出了重点，使试题处处有“思想”，并且体现出层次性.

4. 注重在知识网络交汇点命题

从学科整体意义的高度设计思维价值高的试题，注重知识的交叉、渗透和综合，以检验考生能否形成一个有序的网络化知识体系. 如第 11 页第 10 题，将指数函数的图象与性质、函数的零点、余弦定理、常用逻辑用语等知识融为一体；第 16 页第 12 题，将函数、导数、不等式、数列等知识有机结合；第 38 页第 7 题，将三角函数的图象与性质、导函数、定积分与几何概型等知识一并考查；第 69 页第 7 题，将直线、圆、抛物线、向量以及不等式等知识自然融合. 这些试题需要考生在不同的知识之间进行转换、衔接，综合性较强，内涵丰富.

二、深化能力立意，突出对创新意识和思维能力的考查

从“知识立意”向“能力立意”转变是高考试题改革的重点. 4 年来，高考数学试卷深化能力立意，突出了对创新意识和思维能力的考查.

创新能力是现代社会对人才要求的核心素质，培养学生的创新意识是现代基础教育的目的之一. 就目前的高考考试方式和高中生的认知水平而言，在高考试题中真正考查创新能力比较困难，但通过信息的合理配置和情境的精心设计来考查创新意识是完全可能的，也是十分必要的.

4 年来，高考数学试卷对创新意识和思维能力的考查，主要体现在以下四个方面：

1. 考查考生独立学习的能力

命题时设计了一些考生以前没有学习过，但符合学生认知水平的数学概念、符号的试题，如第 137 页第 4 题，引入新定义“L 路径”，第 143 页第 1 题，引入新数列$\{(a_n)^*\}$，第 143 页第 2 题，引入新定义、新符号 $I(n)$，第 144 页第 3 题，引入新概念“C 变换”，要求考生通过阅读，正确理解符号语言、文字语言或图形语言，并能作进一步的运算、分析、推理来解决问题，主要目的是测试考生通过独立学习理解新信息、获取新知识、解决新问题的能力.

2. 考查考生在新情境中解决问题的能力

新情境的问题能测试出考生在新环境中的迁移能力. 4 年来，高考数学试题考查的主干内容是基本一致的，但在同一内容的考查上，每年的试题都有新的面貌和内涵. 如与函数、导数、不等式相关的试题，所涉及的函数模型都是一种初等函数或几种初等函数组合而成的函数. 由于函数

模型和所研究问题的不同，导致求导的繁简程度和解决问题所用到的知识、方法不同，从而有效区分不同层次的考生.

3. 考查考生探究问题的能力

新课程改革的一个基本理念是“倡导积极主动，勇于探索的学习方式”. 4 年来，高考数学试卷对探究能力的考查，主要体现在两个方面：一是开放性设问，如第 19 页第 13 题、第 21 页第 14 题、第 49 页第 4 题、第 70 页第 8 题、第 87 页第 5 题的第(Ⅱ)问均采用“是否存在……，使……”的设问方式，要求考生进行逆向思维，探索使结论成立的充分条件，从而考查考生的探究能力；二是考查考生在观察、试验、归纳、猜想、证明的基础上形成的发现力及探索力，如第 143 页第 1 题，要求考生先试验求得$((a_1)^*)^*=1$，$((a_2)^*)^*=4$，$((a_3)^*)^*=9$，再归纳、猜想得$((a_n)^*)^*=n^2$，最后用数学归纳法证明.

4. 多考一点想，少考一点算

4 年来，高考数学试题适当淡化对烦琐运算的考查，强调对思维容量和思维水平的考查，力求体现“多考一点想，少考一点算”的命题风格. 如第 60 页第 4 题，虽然采用代数法能求出$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值，但若在运算的某一个环节出现失误，都会影响到最终的正确结果，实际上，向量具有数和形的双重内涵，如果考生不是从“数”的角度考虑，而是从“形”的角度思考，则只要画出示意图便可作答，可见能否正确使用数学思想方法分析问题、解决问题是衡量思维水平高低的一个方面；第 143 页第 2 题中的文字语言较少，以数学符号语言为主，要求考生读懂并理解题中的数学符号，并能把它们翻译成数学关系，从而进行研究和判断，可见这里考查的是对符号的阅读、理解及抽象思维；第 70 页第 8 题第(Ⅱ)问中的第(ⅱ)问，如何寻找到合理、简捷的运算途径是考查的重点，考生选择何种方法体现出思维水平的差异；第 47 页第 3 题第(Ⅱ)问重点考查考生的推理论证能力，证明“充分性”对考生的思维能力要求更高；第 46 页第 2 题第(2)问，由于题设中有$(-1)^n$，所以直觉上想到应对 n 分奇数、偶数，从而将 $S_1+S_2+\cdots+S_{100}$分成两部分分别求和，而对每一部分求和，均可通过计算 a_1,a_2,a_3,a_4 的值求得 S_1,S_2,S_3,S_4，从而大胆猜想数列$\{S_{2n-1}\}$是公比为$\dfrac{1}{4}$的等比数列，$\{S_{2n}\}$是各项为 0 的常数列，这里综合考查了直觉思维、特殊与一般的数学思想及合情推理能力，这种思维缩短了思维过程，提高了思维质量，是科学思维的标志. 高考对思维能力的考查能区分出不同层次的考生，能力较弱的考生需花费较长时间去推理和计算，能力较强的考生则通过画图、取特殊值验证或发现规律等多种方法就能迅速获解. 不同的思考方法、不同的运算途径体现出思维能力上的差异，这正是高考需突出考查的一个方面.

三、重视数学与现实问题的联系，注重应用意识的考查

注重对应用意识的考查，是落实《课程标准》中“发展学生的应用意识”理念的需要. 4 年来，高考数学试卷设计了“双应用解答题”，一道与概率、统计内容相关，另一道与传统的内容相关.

就目前的高考和学生的认知水平而言，要求考生在短时间内面对现实问题完成数学建模的

全过程是不切实际的，适宜的要求是只需考生对所提供的理想化的信息资料进行数学化处理，形成简单的数学模型，并加以解决即可，这是属于数学应用意识层次的问题. 因此，4 年来，高考应用题的功能定位于培养和发展学生的数学应用意识，试题选择的素材贴近生活实际、富有时代气息、背景公平. 下以第 131 页第 1 题进行说明.

从试题考查的内容分析，本题主要涉及以下知识点：①圆、椭圆的定义及方程；②直线和椭圆、圆的位置关系；③两平行直线间的距离公式；④等比数列的前 n 项和公式. 试题将解析几何的内容和方法与数列知识相交汇，体现了“从学科的整体高度上设计试题”的思路.

从建模的角度分析，考生只要具备一定的阅读理解能力，并了解圆、椭圆的定义，就容易求出考察区域边界曲线的方程.

从试题解决过程中所蕴含的数学思想方法分析，解决第（Ⅰ）问时，需要考生根据题设所提供的文字语言，联想到它们所表示的图形，并画出图形，再根据图形写出方程. 这种由“数”到“形”，再从“形”到“数”的转化过程，体现了数形结合的思想. 解决第（Ⅱ）问时，需要将“冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间”的问题转化为“直线分别和椭圆、圆相切”的问题，体现了分类与整合、化归与转化的思想.

从试题依托的素材及陈述的方式分析，本题背景公平，贴近生活，语言通俗易懂，并基本保持了原有生活化的陈述. 另外，已建好的坐标系和作好的图形，降低了该题的难度，体现了对考生的人文关怀.

从试题体现的教育价值分析，本题联系温室气体排放这一全球关注的热点问题，引导考生用数学眼光关注社会，关注现实生活中的数学问题，具有一定的教育价值.

四、充分区别文、理科考生不同的学习要求

由于文科和理科考生所学数学内容不完全相同，教学要求也不一样，为更合理地反映文科、理科考生的上述差异，设计试题时对文科考生侧重考查运算和简单的逻辑推理能力，对理科考生侧重考查抽象思维和综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力. 4 年来，湖南高考数学文、理科试卷中完全相同的试题数量较少，即使其他一些与理科试题中考查内容大致相同的文科试题，也与理科试题在考查的目标、方式、能力层次上有差异.

五、控制试卷难度，注重区分功能

4 年来，高考数学试卷通过保持一定比例的基础题，分散设置把关点，调控试题的运算量、思维量，运用考生熟悉的语言和表述方式叙述试题，注意文、理科试卷差异等措施合理控制试卷的难度. 在各类题型试题的难易度设置方面，尽量做到平缓上升，注重试题的区分度. 4 年的高考数学试卷难度均达到了《考试说明》中对难度提出的要求：“理科数学整卷难度控制在 0.5～0.55 比较合适.”

Ⅱ.试题分析

一、集合与常用逻辑用语

集合与常用逻辑用语知识是掌握和使用数学语言的基础.高考主要从两个方面对集合与常用逻辑用语知识进行考查:

①考查它们各自本身的基础知识,如集合间的基本关系,集合的基本运算,命题的四种形式及关系,充分条件、必要条件的理解与判定,逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义以及全称量词与存在量词的使用等;

②将它们作为工具,与函数、不等式、线性规划等知识结合考查.

【4年试题】

·集合

1.(2010年)已知集合$M=\{1,2,3\}$,$N=\{2,3,4\}$,则 ( )

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$　　C. $M\cap N=\{2,3\}$　　D. $M\cup N=\{1,4\}$

考查目的　本题主要考查子集的定义及集合的交、并运算等基础知识.

解析　由子集的定义知,A,B选项都不正确;由集合的交、并运算得,$M\cup N=\{1,2,3,4\}$,$M\cap N=\{2,3\}$.

答案　C

难度　0.973

2.(2012年)设集合$M=\{-1,0,1\}$,$N=\{x|x^2\leqslant x\}$,则$M\cap N=$ ( )

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

考查目的　本题主要考查集合的交集运算及简单的一元二次不等式的解法等基础知识.

解析　由$x^2\leqslant x$解得$0\leqslant x\leqslant 1$,所以$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.又$M=\{-1,0,1\}$,所以$M\cap N=\{0,1\}$.

答案　B

难度　0.891

·常用逻辑用语

3.(2012年)命题"若$\alpha=\frac{\pi}{4}$,则$\tan\alpha=1$"的逆否命题是 ( )

A.若$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,则$\tan\alpha\neq 1$　　B.若$\alpha=\frac{\pi}{4}$,则$\tan\alpha\neq 1$

C.若$\tan\alpha\neq 1$,则$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　　D.若$\tan\alpha\neq 1$,则$\alpha=\frac{\pi}{4}$

考查目的　本题主要考查命题的基础知识.

解析　由原命题的逆否命题的定义知,命题"若$\alpha=\frac{\pi}{4}$,则$\tan\alpha=1$"的逆否命题是"若$\tan\alpha\neq$

1，则 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$”.

答案 C

难度 0.894

4.(2011 年)设集合 $M=\{1,2\}$，$N=\{a^2\}$，则“$a=1$”是“$N\subseteq M$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

考查目的 本题主要考查集合与常用逻辑用语的基础知识.

解析 当 $a=1$ 时，$N=\{1\}$，则 $N\subseteq M$；当 $N\subseteq M$ 时，有 $a^2=1$，或 $a^2=2$. 从而 $a=\pm1$，或 $a=\pm\sqrt{2}$. 所以“$a=1$”是“$N\subseteq M$”的充分不必要条件.

答案 A

难度 0.840

5.(2010 年)下列命题中的假命题是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^{x-1}>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{N}^*$，$(x-1)^2>0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\lg x<1$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x=2$

考查目的 本题主要考查对全称量词与存在量词的理解，同时考查一些常见初等函数的基本性质.

解析 由指数函数、对数函数、正切函数的性质和全称量词、存在量词的意义知，选项 A，C，D 正确；对于选项 B，若取 $x=1$，则 $(x-1)^2=0$，故 B 不正确.

答案 B

难度 0.789

【相关链接】

1.(2004 年)设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是 ( )

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$　　C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

2.(2005 年改编)集合 $A=\{x\mid x^2<1\}$，$B=\{x\mid |x-b|<a\}$. 若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件，则 b 的范围可以是 ( )

A. $-2\leqslant b<0$　　B. $0<b\leqslant2$　　C. $-3<b<-1$　　D. $-1\leqslant b<2$

3.(2006 年)“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间$[1,+\infty)$上为增函数”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4.(2007 年)设 M,N 是两个集合，则“$M\cup N\neq\varnothing$”是“$M\cap N\neq\varnothing$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5.(2008 年)“$|x-1|<2$ 成立”是“$x(x-3)<0$ 成立”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

6.(2009年)某班共30人,其中15人喜爱篮球运动,10人喜爱乒乓球运动,8人对这两项运动都不喜爱,则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

【相关链接试题分析】

1.**解析**　$P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$即$P(2,3)\in A$且$P(2,3)\in\complement_U B$.

因为$P(2,3)\in A\Leftrightarrow 2\times2-3+m>0\Leftrightarrow m>-1$,$P(2,3)\in\complement_U B\Leftrightarrow 2+3-n>0\Leftrightarrow n<5$.

所以,$P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是$m>-1$,$n<5$.

答案　A

难度　0.751

2.**解析**　依题意,由"$a=1$"有"$A\cap B\neq\varnothing$".

而$A=\{x\mid-1<x<1\}$,$B=\{x\mid b-a<x<b+a\}=\{x\mid b-1<x<b+1\}$,则$\begin{cases}b-1<1,\\b+1>-1.\end{cases}$

即$-2<b<2$.

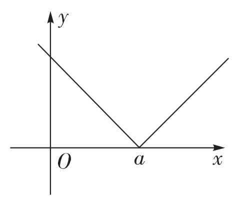
故b的范围可以是集合$\{x\mid-2<b<2\}$的任一子集.

答案　D

难度　0.667

3.**解析**　函数$f(x)=|x-a|$的图象如图所示.

易知,"$a=1$"⇒"函数$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数"成立,"函数$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数"$\nRightarrow$"$a=1$".所以,"$a=1$"是"函数$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数"的充分不必要条件.

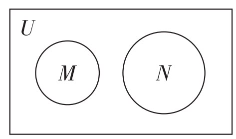


第3题图

答案　A

难度　0.805

4.**解析**　如图所示.由$M\cup N\neq\varnothing$推不出$M\cap N\neq\varnothing$,而$M\cap N\neq\varnothing\Rightarrow M\neq\varnothing$且$N\neq\varnothing\Rightarrow M\cup N\neq\varnothing$,所以"$M\cup N\neq\varnothing$"是"$M\cap N\neq\varnothing$"的必要不充分条件.



第4题图

答案　B

难度　0.884

5.**解析**　由$|x-1|<2$解得$-1<x<3$;由$x(x-3)<0$解得$0<x<3$.

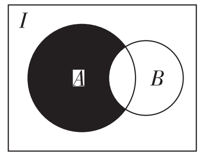
由$-1<x<3$不能推出$0<x<3$,而由$0<x<3$能推出$-1<x<3$.所以"$|x-1|<2$成立"是"$x(x-3)<0$成立"的必要不充分条件.

答案　B

难度　0.775

6. **考查目的** 本题主要考查集合的概念和集合的交、并、补运算等基础知识.

解析 设 I 表示某班全部人的集合，A 表示其中喜爱篮球运动的人的集合，B 表示喜爱乒乓球运动的人的集合. 依题意，画出韦恩图，集合 A 中的阴影部分表示喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人的集合. 易知人数为



第 6 题图

$$15-(15+8+10-30)=12.$$

答案 12

难度 0.798

二、函数、导数、不等式

函数、导数、不等式知识是高中数学的重点内容. 函数思想方法贯穿于整个高中数学课程的始终，不等式在数学的各个分支中都有广泛的应用. 而导数是研究函数的性质及不等式的重要工具. 高考主要从六个方面对函数、导数、不等式进行考查：

①基本初等函数的图象和性质；

②不等式的性质、解简单不等式、基本不等式的应用；

③用图解法求解线性规划问题；

④导数及其运算；

⑤定积分的基本计算；

⑥函数、导数、不等式等知识的综合运用.

【4 年试题】

• 函数的图象与性质

1. (2013 年) 函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为 ( )

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

考查目的 本题主要考查对数函数、二次函数的图象.

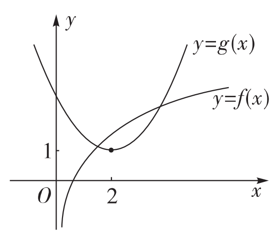


图 1

解析 由 $g(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ 知，$g(x)$ 的图象是顶点坐标为 $(2,1)$，开口向上的抛物线，且 $f(2)=2\ln 2=\ln 4>1=g(2)$，如图 1 所示. $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有两个交点.

答案 B

难度 0.782

2. (2010 年) 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的较小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为 ( )

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

考查目的　本题主要考查绝对值函数的图象及数形结合的思想.

解析　由于函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称，$f(0)=0$，所以 $f(-1)=|-1+t|=0$. 故 $t=1$.

答案　D

难度　0.660

3.(2011 年)设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M，N，则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为　(　　)

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

考查目的　本题主要考查二次函数、对数函数的图象及运用导数的知识求函数的最值.

解析　依题意，$|MN|=f(t)-g(t)=t^2-\ln t$.

设 $h(t)=t^2-\ln t$，则 $h'(t)=2t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{2t^2-1}{t}$. 令 $h'(t)=0$，得 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $t\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减；

当 $t\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增.

所以当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h(t)$ 取最小值 $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

故当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案　D

难度　0.623

4.(2012 年)已知两条直线 l_1：$y=m$ 和 l_2：$y=\dfrac{8}{2m+1}(m>0)$，l_1 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A，B，l_2 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C，D. 记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a，b. 当 m 变化时，$\dfrac{b}{a}$ 的最小值为　(　　)

A. $16\sqrt{2}$　　B. $8\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt[3]{4}$　　D. $4\sqrt[3]{4}$

考查目的　本题主要考查函数的图象，指、对数式的转化，基本不等式及数形结合的思想和运算求解能力.

解析　设 A，B，C，D 四点的横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，由题意得 $-\log_2 x_1=m$，$\log_2 x_2=m$. 于是 $x_1=2^{-m}$，$x_2=2^m$，$x_1=\dfrac{1}{x_2}$. 记 $n=\dfrac{8}{2m+1}$，同理可得 $x_3=2^{-n}$，$x_4=2^n$，且 $x_3=\dfrac{1}{x_4}$.

由 $a=|x_3-x_1|$，$b=|x_4-x_2|$ 得

$$\frac{b}{a}=\frac{|x_4-x_2|}{|x_3-x_1|}=\frac{|x_4-x_2|}{\left|\dfrac{1}{x_4}-\dfrac{1}{x_2}\right|}=x_2x_4=2^{m+n}=2^{m+\frac{8}{2m+1}}.$$

又 $m+\frac{8}{2m+1}=\left(m+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{m+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，当且仅当 $m+\frac{1}{2}=2$，即 $m=\frac{3}{2}$ 时等号成立.

故 $\frac{b}{a}$ 的最小值为 $2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2}$.

答案　B

难度　0.291

·线性规划

5.(2013 年)若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant 2x,\\x+y\leqslant 1,\\y\geqslant -1,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值是　(　　)

A. $-\frac{5}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $\frac{5}{2}$

考查目的　本题主要考查线性规划的基础知识.

解析　根据约束条件画出可行域，如图 2 所示. $z=x+2y$ 在直线 $y=2x$ 与 $x+y=1$ 的交点 $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 处取得最大值 $\frac{5}{3}$.

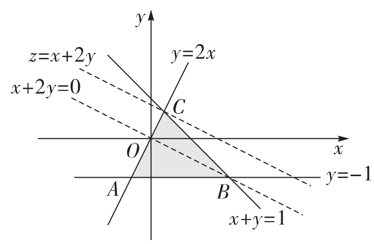


图 2

答案　C

难度　0.893

6.(2011 年)设 $m>1$，在约束条件 $\begin{cases}y\geqslant x,\\y\leqslant mx,\\x+y\leqslant 1\end{cases}$ 下，目标函数 $z=x+my$ 的最大值小于 2，则 m 的取值范围为　(　　)

A. $(1,1+\sqrt{2})$　　B. $(1+\sqrt{2},+\infty)$

C. $(1,3)$　　D. $(3,+\infty)$

考查目的　本题主要考查线性规划及一元二次不等式的基础知识.

解析　如图 3，由于 $m>1$，故 $z=x+my$ 的最大值在直线 $y=mx$ 与 $x+y=1$ 的交点 $A\left(\frac{1}{m+1},\frac{m}{m+1}\right)$ 处达到. 此时 $z_{\max}=\frac{m^2+1}{m+1}$. 由题意，$\frac{m^2+1}{m+1}<2$，解得，$1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$. 故 m 的取值范围为 $(1,1+\sqrt{2})$.

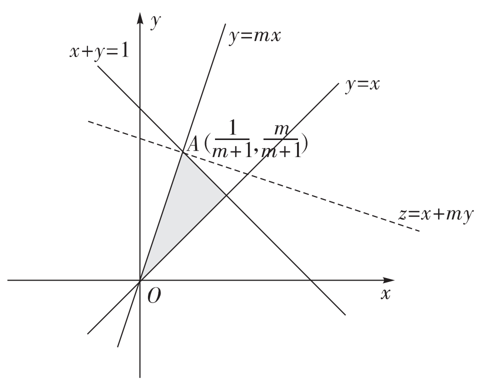


图 3

答案　A

难度　0.631

· 定积分

7.(2013 年)若 $\int_0^T x^2\mathrm{d}x=9$,则常数 T 的值为________.

考查目的 本题主要考查定积分的基本计算.

解析 因为 $\int_0^T x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}T^3$,所以 $\frac{1}{3}T^3=9$.解得 $T=3$.

答案 3

难度 0.896

8.(2010 年) $\int_2^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 等于 ( )

A. $-2\ln 2$　　B. $2\ln 2$　　C. $-\ln 2$　　D. $\ln 2$

考查目的 本题主要考查定积分的基本计算.

解析 $\int_2^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$.

答案 D

难度 0.793

9.(2011 年)由直线 $x=-\frac{\pi}{3}$,$x=\frac{\pi}{3}$,$y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

考查目的 本题主要考查定积分的几何意义与基本计算.

解析 由定积分的几何意义知,所求封闭图形的面积为函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$上的定积分.于是

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

答案 D

难度 0.762

· 函数、导数、不等式及其综合运用

10.(2013 年)设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$,其中 $c>a>0$,$c>b>0$.

(1)记集合 $M=\{(a,b,c)\mid a,b,c$ 不能构成一个三角形的三条边长,且 $a=b\}$,则$(a,b,c)\in M$ 所对应的 $f(x)$的零点的取值集合为________;

(2)若 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三条边长,则下列结论正确的是________.(写出所有正确结论的序号)

① $\forall x\in(-\infty,1)$,$f(x)>0$;

② $\exists x\in\mathbf{R}$,使 a^x,b^x,c^x 不能构成一个三角形的三条边长;

③若$\triangle ABC$ 为钝角三角形,则 $\exists x\in(1,2)$,使 $f(x)=0$.

考查目的 本题主要考查综合运用指数函数的图象与性质、函数的零点、余弦定理、常用逻辑用语等基础知识以及分类与整合的数学思想解决问题的能力.

解析 (1)当 $x\leqslant 0$ 时,由 $c>a>0,c>b>0$ 知,$f(x)=a^x+b^x-c^x>0$.故 $f(x)$的零点 $x>0$.

由题意知,$c\geqslant a+b$,而 $a=b$,所以 $c\geqslant 2a$.设 $f(x)=0$,即 $c^x=2a^x$,从而有 $2=\left(\frac{c}{a}\right)^x\geqslant 2^x$.解得 $x\leqslant 1$.故 $f(x)$的零点的取值集合为$\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$.

(2)由题意有,$f(1)=a+b-c>0$.当 $0<x<1$ 时,由 $0<\frac{a}{c}<1,0<\frac{b}{c}<1$ 有

$$f(x)=c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1\right]>c^x\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)>0.$$

而由(1)知,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)>0$.所以①正确.

由于函数 $f(x)$的图象连续不断,故$\exists t>1$,使$\left(\frac{a}{c}\right)^t+\left(\frac{b}{c}\right)^t<1$,即 $f(t)<0$.又 $f(1)>0$,由函数零点的存在性定理知,$\exists 1<x_0<t$ 满足 $f(x_0)=0$.即 $a^{x_0}+b^{x_0}=c^{x_0}$.此时 a^{x_0},b^{x_0},c^{x_0}不能构成一个三角形的三条边长.故②正确.

由题意有,$f(1)>0$.又由于$\triangle ABC$ 为钝角三角形,由余弦定理知,$a^2+b^2<c^2$.即$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2<1$.

故当 $x\geqslant 2$ 时,

$$f(x)=c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1\right]\leqslant c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2-1\right]<0.$$

由函数零点的存在性定理知,当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时,必$\exists x\in(1,2)$,使 $f(x)=0$.故③正确.

答案 (1)$\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ (2)①②③

难度 0.072

11.(2010年)已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $f'(x)\leqslant f(x)$.

(Ⅰ)证明:当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant(x+c)^2$;

(Ⅱ)若对满足题设条件的任意 b,c,不等式

$$f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$$

恒成立,求 M 的最小值.

考查目的 本题主要考查函数、导数、不等式等基础知识及推理论证能力.

命题意图 本题在命制之初定位于将二次函数与不等式结合的较难题,拟考查二次函数的一些基本性质,证明不等式的一些基本方法以及处理含参问题的一般方法.提出的初稿是:

已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,恒有

$$|f'(x)|\leqslant f(x).$$

证明:(Ⅰ)$c\geqslant 1$;