高一年级 第二学期

主　编◎沈子兴

特级教师公开课

数学

买图书 送课程

扫书上二维码 看名师讲课

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　陈玉兴
责任编辑　刘吉明
　　　　　崔　霞
封面设计　陈燕静
责任营销　唐去非

特级教师公开课系列

六年级 · 数学
七年级 · 数学
八年级 · 数学
八年级 · 物理
九年级 · 数学
九年级 · 物理
九年级 · 化学
高一 · 数学
高一 · 物理
高一 · 化学
高二 · 数学
高二 · 物理
高二 · 化学

上架建议：教辅

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-12619-1
9 787313 126191 >
定价：26.00元

主　编◎沈子兴

高一年级　第二学期

特级教师公开课

数学

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以高中数学新课标和高考说明为纲，打破传统教辅书概念，以二维码扫描的方式，为学生提供除传统阅读之外，以"听"课为主要形式的课外学习服务和以"测评"为主要功能的在线练习。

本书适合高一年级学生和教师使用。

图书在版编目(CIP)数据

特级教师公开课. 高一年级数学. 第二学期/沈子兴主编. —上海：上海交通大学出版社，2015

ISBN 978-7-313-12619-1

Ⅰ.①特… Ⅱ.①沈… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料

Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 034820 号

特级教师公开课·高一年级数学(第二学期)

主　　编：沈子兴

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

出 版 人：韩建民

印　　制：上海天地海设计印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：11.25

字　　数：266 千字

版　　次：2015 年 2 月第 1 版　　印　　次：2015 年 2 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-12619-1/G

定　　价：26.00 元

前　　言

《特级教师公开课》是一套在高科技技术支持下的、全新概念的教辅丛书，邀请各重点中学的特级教师进行编写。《特级教师公开课》对教辅图书进行了重新定义，教辅图书不再是仅仅只为学生提供以阅读为主要形式的课外学习服务，也不仅仅是为学生做题提供题目资源。它可以为学生：

(1) 提供以“听”课为主要形式的课外学习服务。

(2) 提供以“测评”为主要功能的在线练习。

学生只要用平板电脑或智能手机扫描《特级教师公开课》系列丛书上的二维码，就可以免费使用与图书配套的教学软件，在软件中“听”老师讲课，以这种最简单，也是效率最高的方式进行课外辅助学习，提高自己的学习成绩。同时，还可以在软件中进行在线测试，了解自己的学习水平和学习能力，帮助自己进行查漏补缺，提高学习效率。

本书按照解题方法和解题类型将高一年级数学第二学期分为 3 章 19 个专题。第 4 章主要讲解幂函数、指数函数、对数函数的概念及运算。第 5 章是三角形中角的正、余弦性质和应用。第 6 章是三角函数的概念、性质和图像。每个专题包含“知识要点”、“典型例题”、“基础练习”、“能力提升”四个板块：

知识要点：对本专题中主要概念和规律进行梳理、总结，带领学生温习主要知识点，把握整体概念。

典型例题：精选具有代表性的经典例题，并对例题的解题思路进行详细剖析，使学生对解题的数学思想与方法有本质的认识和提高，引导学生养成规范缜密的解题习惯。例题后的“备注”辅以点评指导，高屋建瓴，提升思想。

基础练习、能力提升：按照从易到难的顺序，配合例题强化学生对解题方法和解题技巧的掌握，可作为教师出题素材。所有练习都配有完整的参考答案。

需要说明的是，学生可通过扫描二维码对“知识要点”和“典型例题”进行更详细的更全面的“听课”。

由于时间仓促，书中难免疏漏错误，恳请广大师生不吝赐教，提出宝贵意见，以便完善修改。

编　者

目　　录

第 4 章　幂函数、指数函数和对数函数(下)

4.4 对数概念及其运算

知识要点

1. 对数

1) 对数的定义

如果 $a(a>0,\ a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记做 $\log_a N=b$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数. 在对数函数 $\log_a N=b$，a 的取值范围是 $(a>0,\ a\neq 1)$，N 的取值范围是 $N>0$，b 的取值范围是 $b\in\mathbf{R}$.

2) 常用对数

(1) 定义：以 10 为底的对数叫做常用对数，$\log_{10}N$ 记做 $\lg N$.

(2) 常用对数的性质：10 的整数指数幂的对数就是幂的指数，即 $\lg 10^n=n$（n 是整数).

3) 自然对数

(1) 定义：以 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$ 为底的对数叫做自然对数，$\log_{\mathrm{e}}N$ 通常记做 $\ln N$.

(2) 自然对数与常用对数之间的关系：依据对数换底公式，可以得到自然对数与常用对数之间的关系：$\ln N=\dfrac{\lg N}{\lg \mathrm{e}}=\dfrac{\lg N}{0.434\,3}$，即 $\ln N=2.303\lg N$.

4) 指数式与对数式的互化

(1) 符号 $\log_a N$ 既是一个数值，也是一个算式，即已知底数和在某一个指数下的幂，求其指数的算式. 对数式 $\log_a N=b$ 中的 a、N、b 在指数式 $a^b=N$ 中分别是底数、指数和幂.

(2) 充分利用指数式和对数式的互化，讲述四条规则：

① 在 $\log_a N=b$ 中，必须 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数任何次幂都是正数，因而 $a^b=N$ 中 N 总是正数，须强调零和负数没有对数.

② 因为 $a^0=1$，所以 $\log_a 1=0$.

③ 因为 $a^1=a$，所以 $\log_a a=1$.

④ 因为 $a^b=N$，可得 $\log_a N=b$，所以 $a^{\log_a N}=N$.

2. 对数的运算

对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么，

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\cdot\log_a M(n\in\mathbf{R})$；

(4) $\log_a M^{\frac{n}{m}}=\dfrac{n}{m}\log_a M(m,\ n\in\mathbf{R},\ m\neq 0)$.

用语言文字叙述对数运算法则为两个正数的积的对数等于这两个正数的对数的和；两个正数的商的对数等于两个正数的对数的差；一个正数的 n 次方的对数，等于这个正数的对数的 n 倍.

3. 换底公式

1) 换底公式

$$\log_a b=\frac{\log_a N}{\log_a b}(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ N>0)$$

2) 换底公式的推论

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$

(2) $\log_a b=\log_{a^m} b^m(a>0$,且 $a\neq 1,\ b>0)$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b(a>0$ 且 $a\neq 1,\ b>0,\ m\neq 0)$

典型例题

例 1 (1) 把下列指数式写成对数式：

① $3^x=\dfrac{1}{27}$；　② $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=64$；　③ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\dfrac{1}{16}$；　④ $5^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) 把下列对数式写成指数式：

① $\log_3 9=2$；　② $\lg 0.001=-3$；　③ $\log_2^{\frac{1}{32}}=-5$.

【解析】 本题主要考查指数式与对数式的互化. 由于指数式 $a^b=N$ 和对数式 $\log_4 N=b(a>0,\ a\neq 1)$ 可以相互转化，因此，本题容易由指数式改写成对数式，但要注意两种表示形式中 a、b、N 的相应位置. 改写时首先弄清指数式中谁是 b，谁是 N，注意对数符号的写法，特别是底数和真数的位置要书写规范.

(1) ① $\log_3\dfrac{1}{27}=x$；　② $\log_{\frac{1}{4}}64=x$；　③ $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}=x$；　④ $\log_5\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) ① $3^2=9$；　② $10^{-3}=0.001$；　③ $2^{-5}=\dfrac{1}{32}$.

例 2 下列各式与 $\lg\dfrac{ab}{c}$ 相等的是(　　).

(A) $\lg ab+\lg c$　　(B) $\lg a+\lg b-\lg c$

(C) $\lg a+\lg b+\lg c$　　(D) $\lg ab-\lg c$

【解析】 本题主要考查对数的运算. 答案：(B)(D).

例3 计算：

(1) $\lg 0.01^2$； (2) $\log_4(4^2\times\sqrt[3]{4})$；

(3) $\log_2 3+\log_2 5$； (4) $\log_5\dfrac{3}{2}+\log_5\dfrac{5}{4}-\log_5 2$.

【解析】 灵活运用对数的运算性质，从左至右或从右至左地进行化简和计算. 在进行化简时，要注意底数的数值. 例如，在本例的第(1)题中，要将真数尽量转化成以10为底的幂，在第(2)、(3)、(4)小题中要分别把真数转化成以4为底的幂、以2为底的幂和以5为底的幂.

(1) $\lg 10^{-4}=-4$；

(2) $\log_4(4^2\times\sqrt[3]{4})=\log_4 4^2+\log_4 4^{\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$；

(3) $\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$；

(4) $\log_5\dfrac{3}{2}+\log_5\dfrac{5}{4}-\log_5 2=\log_5\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{4}\div 2\right)=\log_5\dfrac{15}{16}$

例4 计算：

(1) $\log_8 32$； (2) $\log_{25}4\cdot\log_8 5$； (3) $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$；

(4) $\log_2\dfrac{1}{25}\cdot\log_3\dfrac{1}{8}\cdot\log_5\dfrac{1}{9}$； (5) $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5\dfrac{1}{3}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}$.

【解析】 本题主要考查对数的运算性质和换底公式的逆用及其两个有用的推论.

(1) 利用公式 $\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$(其中，$a>0$，$a\neq 0$，$m\neq 0$，$b>0$)；

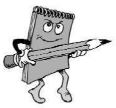
(2) 利用换底公式可得：$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$；

(3) 将多项式相乘展开或括号内合并同类项后，再同上可解；

(4) 利用公式 $\log_a M^n=n\log_a M$ 化简后，再同上可解；

(5) 公式 $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ 的逆用，如$\dfrac{\log_5\sqrt{2}}{\log_5\dfrac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$.

解 (1) $\dfrac{5}{3}$；(2)原式 $=\dfrac{1}{3}\log_5 2\cdot\log_2 5=\dfrac{1}{3}$；(3)原式 $=\log_4 3\cdot\log_3 2+\log_8 3\cdot\log_3 2+\log_4 3\cdot\log_9 2+\log_8 3\cdot\log_9 2=\dfrac{5}{4}$；或原式 $=\dfrac{5}{6}\log_2 3\cdot\dfrac{3}{2}\log_3 2=\dfrac{5}{4}$；(4)原式 $=(-2\log_2 5)\cdot(-3\log_3 2)\cdot(-2\log_5 3)=-12$；(5)原式 $=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}\cdot\log_{\sqrt[3]{4}}9=\left(-\dfrac{1}{2}\log_3 2\right)\cdot(3\log_2 3)=-\dfrac{3}{2}$.



基础练习

1. 计算：(1) $\log_2\sqrt{2\sqrt{2}}=$ ________；

(2) $\log_8(\log_2\sqrt{2})=$ ________；

(3) $3\log_3\frac{3}{2}-\log_3\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\log_3 4+\log_3\sqrt{49}=$ ________；

(4) $\sqrt{\lg^2 2+\lg\frac{1}{4}+1}-\lg 5=$ ________.

2. 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，则用 a，b 表示 $\log_{36}45=$ ________.

3. $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25}0.5)=$ ________.

4. 如果 $5^x=1.5$，$0.5^y=0.75$，那么 x、y 满足(　　).

(A) $x>0$，$y>0$　　(B) $x<0$，$y<0$　　(C) $x>0$，$y<0$　　(D) $x<0$，$y>0$

5. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2\log}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^5$ 的值是(　　).

(A) 正有理数　　(B) 负有理数　　(C) 无理数　　(D) 正整数

6. $2^{\log}4^3$ 的值等于(　　).

(A) 3　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\frac{1}{3}$

7. 已知 $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$，则 x 的值属于区间(　　).

(A) $(-2,-1)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(-3,-2)$　　(D) $(2,3)$

8. 计算：$5^{\lg 20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg 0.5}$.

9. 如果 $\log a^2<\log b^2<0$，那么 a，b 的关系及范围.

10. 比较下列各组数中两个值的大小：

(1) $\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$；

(2) $\log_{0.3}1.8$，$\log_{0.3}2.7$；

(3) $\log_a 5.1$，$\log_a 5.9(a>0,a\neq 1)$.

能力提升

1. 计算 $\lg^2 5+\lg^2 \cdot \lg 50+4^{\log_2^3}=$________.

2. 求值：$\log_9(\sqrt[6]{32})^{(\log_2 3+\log_4 9+\log_8 27+\log_{16} 81+\log_{32} 243)}=$________.

3. 设 $a>0$,且 $a\neq 1$ 时,$\log_a 2>\log_2 a$,则 a 的取值范围是________.

4. 已知:$1<a<b<a^2$,试将 $\log_a b$, $\log_b a$, $\log_a \dfrac{a}{b}$, $\log_b \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{1}{2}$ 从大到小排列：____________________.

5. 已知 $2^x=3^y=5^z$ 且 x, y, z 均为正数,则 $2x$, $3y$, $5z$ 的大小关系为(　　).

(A) $2x<3y<5z$　　(B) $3y<2x<5z$

(C) $5z<3y<2x$　　(D) $5z<2x<3y$

6. 已知 $\log_a x+\log_a y=2(a>0,\ a\neq 1)$,求$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

7. 已知 $2x+5y=20$,求 $\lg x+\lg y$ 的最大值.

8. 已知 $a>0$, $a\neq 1$, $0<x<1$,比较 $|\log_a(1+x)|$ 和 $|\log_a(1-x)|$ 的大小.

4.5 反函数的概念

知识要点

1. 反函数的定义

对函数 $y=f(x)(x\in D)$,设它的值域为 A,如果对 A 中任意一个值 y,在 D 中总有唯一

确定的 x 值与它对应，且满足 $y=f(x)$，这样得到的 x 关于 y 的函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，自变量常用 x 表示，而函数用 y 表示，所以把它改写为：$y=f^{-1}(x)(x\in A)$.

2. 反函数存在的条件

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是函数 $y=f(x)$ 是定义域到值域上的一一映射所确定的函数. 注意：单调函数必有反函数.

3. 反函数与原函数的关系

(1) 反函数和原函数互为反函数：如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数是 $y=f(x)$，即 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

(2) 反函数和原函数的定义域与值域互换.

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	A	C
值域	C	A

(3) 互为反函数的函数的图像间的关系.

函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 函数 $y=f(x)$ 的图像与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是同一个函数图像.

4. 求反函数的步骤

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的值域(若值域显然，解题时常略去不写)；

(2) 反解：由 $y=f(x)$ 写出 x 关于 y 的关系式；

(3) 改写：在 $x=f^{-1}(y)$ 中，将 x, y 互换得到 $y=f^{-1}(x)$；

(4) 标明反函数的定义域，即(1)中求出的值域.

典型例题

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $g(x)=f(x+1)$，求 $g^{-1}(x)$ 与 $f^{-1}(x+1)$.

【解析】 要求 $g^{-1}(x)$ 应先求 $g(x)$ 即 $f(x+1)$；要求 $f^{-1}(x+1)$，应先求 $f^{-1}(x)$.

解 $y=g(x)=f(x+1)=\dfrac{2x+2}{x+2}(x\neq -2)$，

所以 $x=\dfrac{2-2y}{y-2}$，

因为 $g^{-1}(x)=\dfrac{2-2x}{x-2}(x\neq 2)$.

由已知得 $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2-x}(x\neq 2)$，

所以 $f^{-1}(x+1)=\dfrac{x+1}{2-(x+1)}=\dfrac{1+x}{1-x}(x\neq 1)$.

例 2 已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图像经过点 $A(1, 4)$，它的反函数 $y=$

$f^{-1}(x)$ 的图像经过点(10, 2),求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】 考查互为反函数图像上点的对应关系,利用如果(a, b)在反函数图像上,则(b, a)在原函数图像上这一特性解题.

解 因为点(10, 2)关于直线 $y=x$ 的对称点为(2, 10),所以(2, 10)点在原函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像上,所以$\begin{cases}a+b=4,\\a^2+b=10,\end{cases}$解方程组得$\begin{cases}a=3,\\b=1,\end{cases}$所以 $f(x)=3^x+1$.

例3 若点$P(1, 2)$在函数$y=\sqrt{ax+b}$的图像上,又在它的反函数的图像上,求a、b的值.

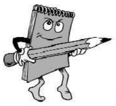
【解析】 根据反函数的性质求 a、b.

解 根据互为反函数的函数图像关于直线 $y=x$ 对称的性质,知$P'(2, 1)$也在函数$y=\sqrt{ax+b}$的图像上,因此$\begin{cases}2=\sqrt{a+b},\\1=\sqrt{a+b},\end{cases}$解得 $a=-3$, $b=7$.

例4 设$y=f(x)$在定义域上是奇函数,则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在定义域上也是奇函数.试证明之.

【解析】 只需证明$y=f^{-1}(x)$图像关于原点对称,即证$y=f^{-1}(x)$图像上任意点(x, y)关于(0, 0)点的对称点$(-x, -y)$也在 $y=f^{-1}(x)$ 图像上.

证明 设点(x, y)为 $y=f^{-1}(x)$ 图像上任意点,则点(y, x)必在 $y=f(x)$ 图像上,又 $y=f(x)$ 是奇函数,则点$(-y, -x)$也在 $y=f(x)$ 上, $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称,从而点$(-x, -y)$在 $y=f^{-1}(x)$ 图像上. 故 $y=f^{-1}(x)$ 图像关于原点对称,所以 $f^{-1}(x)$ 是奇函数.



基础练习

1. 已知函数 $y=\dfrac{1}{3}x+m$ 与 $y=nx-6$ 互为反函数,则 $m=$ ________; $n=$ ________.

2. 函数 $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)\left(-\dfrac{1}{2}<x<0\right)$的反函数是________.

3. 已知函数 $f(x)=(x-1)^2(x\leqslant 1)$,又 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,则 $\varphi(x)=$ ________.

4. 若函数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{4x+5}\left(a\neq\dfrac{4}{5}\right)$的图像关于 $y=x$ 对称,则 $a=$ ________.

5. 函数 $y=\dfrac{ax+1}{bx-1}$ 的反函数与其原函数相同的条件是(   ).

   (A) $a=0$, $b=0$　　(B) $a=1$, $b\in\mathbf{R}$

   (C) $a=1$, $b\neq-1$, $b\in\mathbf{R}$　　(D) $a=-1$, $b=0$

6. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间[1, 2]上存在反函数的充要条件是(   ).

   (A) $a\in(-\infty, 1]$　　(B) $a\in[2, +\infty)$

   (C) $a\in[1, 2]$　　(D) $a\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$

7. 若 $f(x)=\sqrt{ax+b}$ 与 $f^{-1}(x)$ 都过(1, 2)点,则 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 图像交点的个数为(   ).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 不确定

8. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{2x+1}\left(x\neq-\dfrac{1}{2}\right)$；

(2) $y=\sqrt{25-(x+2)^2}(-2\leqslant x\leqslant 3)$；

(3) $f(x)=x^2-2x+2(x\leqslant 1)$.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-5}{2x+m}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，求 m 的值.

10. 求函数 $f(x)=3^{x+1}+9^x-12$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域.

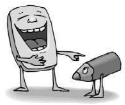
11. 求函数 $y=\sqrt{1+x}$ 的反函数，并在同一坐标系中画出它们的图像.

12. 已知 $y=\dfrac{1}{2}x+m$ 和 $y=nx-\dfrac{1}{3}$ 互为反函数，求 m 与 n 的值.

13. 已知 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}\left(x\neq -a,\ a\neq \dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的反函数;(2) 设 $f(x)=f^{-1}(x)$,求 a 的值;(3) 如何作出满足(2)中条件的 $y=f^{-1}(x)$ 的图像.

14. 设点(1, 2)既在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图像上又在其反函数的图像上,求 a 与 b 的值.



能力提升

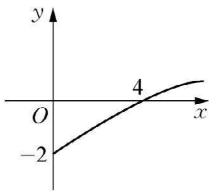
1. 已知 $f(x)=\dfrac{a-x}{x-(a+1)}$,且 $f^{-1}(x-1)$ 的图像的对称中心是(0, 3),则 a 的值为________.

2. 函数 $f(x)=x\mid x\mid+2x$ 的反函数是________.

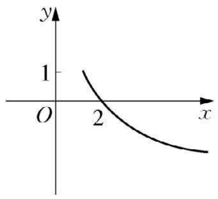
3. 函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数是________.

4. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\leqslant 0)$,则 $f^{-1}(-1)=$________.

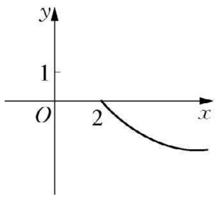
5. 设 $f(x-1)=x^2-2x+3(x\leqslant 1)$,则函数 $f^{-1}(x)$ 的图像为(　　).



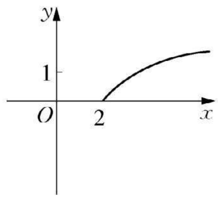
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 函数 $y=-f(x)$ 与 $y=-f^{-1}(x)$ 的图像(　　).

(A) 关于原点对称　　(B) 关于 x 轴对称

(C) 关于直线 $y=x$ 对称　　(D) 关于直线 $y=-x$ 对称

7. 若函数 $y=f(x)$ 的图像位于第二和第三象限,并且它有反函数,那么,它的反函数的图像位于(　　).

(A) 第一和第二象限　　(B) 第一和第四象限

(C) 第一和第三象限　　　　(D) 第三和第四象限

8. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1(x\geqslant 0),\\2x-1(x<0)\end{cases}$ 的反函数.

9. (1) 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$,若 $y=f(x)$ 在定义域上单调递增,求证:$y=f^{-1}(x)$ 在其定义域上也单调递增;

(2) 若 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})(a>1)$ 的反函数,求使得 $f^{-1}(x)>1$ 成立的 x 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$,若函数 $y=g(x)$ 的图像与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,求 $g(11)$ 的值.

11. 已知函数 $f(x)$ 是函数 $y=\dfrac{2}{10^x+1}-1(x\in\mathbf{R})$ 的反函数,函数 $g(x)$ 的图像与函数 $y=\dfrac{4-3x}{x-1}$ 的图像关于直线 $y=x-1$ 成轴对称图形,记 $F(x)=f(x)+g(x)$.

(1) 求函数 $F(x)$的解析式及定义域;

(2) 试问在函数 $F(x)$的图像上是否存在两个不同的点 A、B,使直线 AB 恰好与 y 轴垂直? 若存在,求出 A、B 两点的坐标;若不存在,说明理由.

12. 设 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-2})$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$).

(1) 求 $f^{-1}(x)$,并求它的定义域;

(2) 设 $p(n)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_a\sqrt{2})$,且 $p(n)<\dfrac{1}{2}(3^n+3^{-n})(n\in\mathbf{N}^*)$,求 a 的取值范围.

13. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\lg\dfrac{1-x}{1+x}$,

(1) 试判断函数 $f(x)$的单调性并给出证明;

(2) 若 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,证明方程 $f^{-1}(x)=0$ 有唯一解;

(3) 解关于 x 的不等式 $f\left(x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)<\dfrac{1}{2}$.

14. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{x-10}{x+10}\right)^2(x>10)$.

(1) 求 $f(x)$的反函数;

(2) 如果不等式$(1-\sqrt{x})f^{-1}(x)>m)(m-\sqrt{x})$对于$\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{4}\right]$上的每一个 x 值都成立,求实数 m 的取值范围;

(3) 设 $g(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(x)}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{10}$,求函数 $y=g(x)$ 的最小值及相应的 x 的值.