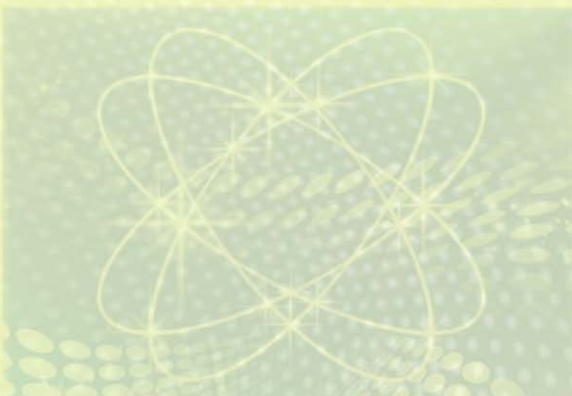
新编高等数学

（下册）

主　编　聂水晶　黄方方
副主编　贺卫红　袁晓东　邓昌瑞
　　　　史洪松



江西高校出版社

新编高等数学

（下册）

主　编　聂水晶　黄方方

副主编　贺卫红　袁晓东　邓昌瑞

史洪松

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学(下册)/聂水晶,黄方方主编. —南昌:江西高校出版社,2011.8

ISBN 978-7-5493-0376-2

Ⅰ.①新... Ⅱ.①聂... ②黄... Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第167757号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8513417
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照　　排	江西太元科技有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	34.5
字　　数	520千字
版　　次	2011年8月第1版第1次印刷
印　　数	1~6000册
书　　号	ISBN 978-7-5493-0376-2
定　　价	62.00元(全2册)

赣版权登字-07-2011-215

内容提要

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》,并充分汲取江西渝州科技职业学院等高职院校高等数学课程教改经验编写而成。本书的编写切实贯彻了“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,力求体现基础性、实用性、发展性的和谐统一。内容包括:初等函数、极限与连续、导数和微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、线性代数初步、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、概率论与数理统计初步共十六章,分上、下两册。

每章节后均配有丰富的同步练习(选择题、计算题、证明题及应用题)供读者巩固学习的内容或检查学习效果,书后附有同步练习参考答案。

本教材语言简洁流畅、条理清楚、深入浅出、通俗易懂,例题、习题难易适中。全书内容分模块、分层次编排,一元函数微积分学为基础模块,其余为应用模块。

其中第十六章数学建模简介乃本教材特色之所在,旨在能让读者一窥数学建模之奥妙,了解数学在应用方面的广泛性。

本教材适用于高职高专院校工程类、经济类各专业,也可作为自学考试(工专、工本)参考资料。

前　言

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》编写而成。编写过程中以先进的教育理念为指导,紧密结合高职高专院校高等数学教学现状、特点及职业教育的特色,充分汲取了近年来高等数学课程教学改革经验,特别是江西渝州科技职业学院高等数学课程建设的成功经验和成果。其中也凝结了作者多年来讲授高等数学课程的经验和体会。本书的编写切实贯彻了“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,突出了重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路。

本教材具有以下特点:

(1) 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思路,使学习者认识到高等数学与人类生活的密切联系及对人类发展的作用,体验数学活动充满探索与创造,以激发学习者的求知欲和学习的积极性。

(2) “高等数学”是高职高专工程类、经济类各专业的一门重要的基础课。本书内容涵盖了一元微积分、常微分方程、线性代数、多元函数微积分、概率论、数理统计等六门课程的基础知识和基本内容,其主要目的是培养学习者的基本数学能力:运算能力、逻辑思维能力、抽象概括能力、将实际问题转化为数学问题的能力以及创新思维能力,为进一步学习打好数学基础。

(3) 对重要的知识点以实例引入,从学习者熟悉的问题入手,力求朴实、简明和自然,适度淡化了数学理论的推导和证明,代之以思想方法的介绍和直观的几何说明,力求形象化、直观化、通俗化。难易程度适合目前高职高专的生源状况。

(4) 与其他教材不同的是,本教材将数学建模简介单列一章,以加强对学习者“学数学、用数学”的教育,培养学生运用数学思想和方法以及所学知识建立数学模型,解决实际问题的能力。同时体现了教材的先进性。

(5) 书中的例题、习题经过了精心编选与设计,理论联系实际,选题新颖、

题型全面、难易适度。书后附有习题参考答案，供师生参考。每章末编有知识要点，便于学生有重点地把握学习方向。

(6) 全书内容分模块、分层次编排，力求体现基础性、实用性、发展性的和谐统一。一元函数微积分学为基础模块，其余为应用模块。

由于本书分层次编排，既照顾到了数学基础较差的学生，不会使学生因为数学基础的不足而产生畏难情绪，也照顾到了希望继续深造的学生。因此，适合各类高职高专院校、成人高校和民办高校工程类、经济类各专业师生使用。带* 号的章节为选学部分，可根据专业、层次的不同需求组织教学。

本书由聂水晶、黄方方任主编，贺卫红、袁晓东、邓昌瑞、史洪松任副主编。全书共有 16 章，其中第 1、2、3 章由袁晓东编写；第 4、5 章由贺卫红编写；第 6、7 章由聂水晶编写；第 8、9、16 章由邓昌瑞编写；第 10、11、12 章由黄方方编写；第 13、14、15 章由史洪松编写。

由于水平有限，书中难免会出现缺点和错漏，敬请读者多提宝贵意见。

编　者

2011 年春

目　　录

第九章　线性代数初步 /1

第一节　行列式 /1
第二节　矩阵的概念与运算 /9
第三节　矩阵的初等变换 /18
第四节　矩阵的逆矩阵 /23
*第五节　线性方程组 /28
*第六节　方阵的特征值与特征向量 /36
*第七节　向量的内积与正交化方法 /39
*第八节　相似矩阵 /41
*第九节　对称矩阵的相似矩阵 /43
*第十节　二次型及其标准形 /46
*第十一节　用配方法化二次型成标准形 /50
*第十二节　正定二次型 /51

第十章　空间解析几何与向量代数 /53

第一节　向量及其线性运算 /53
第二节　向量的数量积与向量积 /61
第三节　曲面及其方程 /65
第四节　空间曲线及其方程 /71
第五节　平面及其方程 /75
第六节　空间直线及其方程 /79

第十一章　多元函数微分学 /84
第一节　多元函数的基本概念 /84
第二节　偏导数 /90
第三节　全微分 /95
第四节　多元复合函数与隐函数的微分法 /97
第五节　隐函数的求导法则 /100
第六节　多元函数微分学的几何应用 /102
第七节　多元函数的极值 /106
第十二章　重积分 /112
第一节　二重积分的概念与性质 /112
第二节　二重积分的性质 /115
第三节　二重积分的计算法 /116
*第四节　三重积分 /126
*第十三章　曲线积分与曲面积分 /130
第一节　对弧长的曲线积分 /130
第二节　对坐标的曲线积分 /133
第三节　格林公式及其应用 /137
第四节　曲面积分 /140
第十四章　无穷级数 /146
第一节　常数项级数的概念和性质 /146
第二节　常数项级数的审敛法 /151
第三节　幂级数 /156
第四节　函数的幂级数展开及其应用 /162
*第五节　傅里叶级数 /166
第十五章　概率论与数理统计初步 /177
第一节　概率论 /177

第二节　随机变量及其分布 /193
第三节　数理统计 /216

第十六章　数学建模简介 /237

第一节　数学模型概述 /237
第二节　数学建模的基本方法与步骤 /242
第三节　建模实例 /244

参考答案 /250

主要参考文献 /259

第九章
线性代数初步

矩阵是线性代数中的重要概念，在自然科学、工程技术及经济等领域中都有着广泛应用. 随着计算机的发展，矩阵显得更为重要. 本章将介绍矩阵的一些基本概念、相关运算及其简单应用，首先来介绍一下行列式的概念及相关运算.

第一节　行列式

这一节将给出行列式的定义、性质和一些基本计算方法.

一、行列式的概念

1. 二阶行列式

用消元法解二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{22} = b_2 & (2) \end{cases} \tag{1.1}$$

消去(2)中的 x_1，再消去方程(1)中的 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

定义　将四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 排列成两行两列，两边各加上一条竖直线

段,它表示一个数,称之为二阶行列式. $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为这个行列式的元素,a_{ij} 的下标 i,j 表示该元素所处位置在行列式的第 i 行第 j 列.

二阶行列式的计算法则——对角线法则:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即主对角线上两元素的乘积减去次对角线上两元素的乘积.

对于线性方程组(1.1),记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$,$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$,

D_1、D_2 是由方程组(1.1)的右端常数列分别取代 D 的第 1 列、第 2 列而得的两个二阶行列式.

则方程组(1.1)的解 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$

例 1 解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 7y = -15 \end{cases}$

2. 三阶行列式

定义 将 9 个数排成三行三列,并用两根竖线夹起来,可得到三阶行列式,记为: $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

且, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

利用三阶行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}, x_3=\dfrac{D_3}{D}$,

例 2 解三元线性方程组 $\begin{cases} x-y+2z=13 \\ x+y\_+z=10. \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

3. n **阶行列式的定义**

定义 3 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,两边各加上一条竖直线段,组成算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ M & M & & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

称为 n 阶行列式,简称行列式,常用字母 D 表示,数 a_{ij}称为行列式的第 i 行第 j 列元素. 划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列后,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}; 在 M_{ij} 的前面冠以符号因子 $(-1)^{i+j}$后,称为元素 a_{ij}的代数余子式,记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

当 $n=1$ 时,规定: $D=|a_{11}|=a_{11}$,即一阶行列式是数 a_{11}本身.

注意 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$不要与绝对值记号混淆.

设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1.3}$$

即,n 阶行列式 D 等于它的第一行元素与它们各自的代数余子式乘积的代数和.

例如,当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例 3 写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

的元素 a_{34} 的余子式和代数余子式.

定理 1.1 n 阶行列式(1.2)等于它的任意一行元素与它们各自的代数余子式乘积之和

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\Lambda+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (1.3)$$

其中 $i=1,2,\Lambda,n$,(1.3)称为 n 阶行列式按行展开式.

例 4 证明四阶上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

二、行列式的性质

定义 设 D 表示 n 阶行列式(1.2),则称

$$D'=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \mathrm{M} & \cdots & & \mathrm{M} \\ a_{1n} & a_{2n} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置(行列式).

说明 D' 是 D 的行改为列,列改为行(即行列互换)所得到的 n 阶行列式.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D' 相等,即 $D=D'$.

例如 $$D=\begin{vmatrix} a & d \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=D'$$

说明 行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立

的对列也同样成立,反之亦然.

推论 1　n 阶行列式(1.2)等于它的任意一列元素与它们各自的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\text{,其中 } j = 1, 2, \cdots, n.$$

性质 2　互换行列式两行(列)的位置得到的行列式与原行列式值反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{s1} & a_{s2} & \Lambda & a_{sn} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \mathrm{M} & \cdots & & \mathrm{M} \\ a_{s1} & a_{s2} & \Lambda & a_{sn} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2　如果行列式有两行(列)的元素完全相同,则此行列式值等于零.

性质 3　数 k 乘行列式,等于用数 k 乘行列式某一行(列)的每一个元素,

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \cdots & & \mathrm{M} \\ a_{i1} & a_{i2} & \Lambda & a_{in} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \cdots & & \mathrm{M} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \Lambda & ka_{in} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 3　如果行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式值等于零.

性质 4　如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如

$$D \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \Lambda & a_{in} + b_{in} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{i1} & a_{i2} & \Lambda & a_{in} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \mathbf{M} & \cdots & & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　把行列式某一行(列) 各元素乘以同一数 K 后加到另外一行(列) 对应元素上,行列式值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{s1} & a_{s2} & \Lambda & a_{sn} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{t1} & a_{t2} & \Lambda & a_{tn} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ ka_{s1}+a_{t1} & ka_{s2}+a_{t2} & \Lambda & ka_{sn}+a_{tn} \\ \cdots & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意　这里某行元素的 k 倍必须是加到另外一行上,而不是加到本行上.

例 6　计算

(1) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$　　　　(2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$.

例 7　计算

(1) $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$　　　　(2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 295 & 201 & 97 \end{vmatrix}$.

例 8　计算 n 阶行列式($n>1$)

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

例 9 求证: $\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

例题 8,9 的计算方法是: 将一个 n 阶行列式按某行(列) 展开成 n 个 $n-1$ 阶行列式,每个 $n-1$ 阶行列式又按某行(列) 展开成 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式,如此不断的降低行列式的阶数,直到最后降为三阶或二阶行列式,这是行列式的又一个计算方法——降阶法.

例 9 结论可推广到一般情形,用数学归纳法可以证明以下结论:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

式中 A 为 n 阶方阵,B 为 m 阶方阵,$O_{n\times m}$,$C_{n\times m}$这个结论非常有用.

按行列式展开式定理,把 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式,减少计算量,这是计算行列式又一个基本方法.

三、克莱姆(Cramer) 法则

设含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \Lambda\Lambda \\ \qquad \Lambda \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.4}$$

若 $b_1, b_2 \Lambda b_n$ 不全为零,称方程组(1. 4) 为非齐次线性方程组; 若 $b_1 = b_2 = \Lambda = b_n = 0$,称方程组(1. 2) 为齐次线性方程组.

定理(克莱姆 Cramer 法则) 如果非齐次线性方程组(1. 2) 由它的系数组成的行列式

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$,则方程组(1. 2) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \Lambda, x_n = \frac{D_n}{D} \tag{1.5}$$

其中 $D_j(j=1,2,\Lambda,n)$ 是用方程组右端常数列 $(b_1,b_2,\Lambda,b_n)^T$ 依次替代 D 中第 j 列后得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \Lambda & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & \Lambda & a_{1,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \cdots \\ a_{n1} & \Lambda & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},j=1,2,\Lambda,n.$$

定理的条件是: n 个方程 n 个未知量组成的线性方程组(1.4),它的系数行列式 $D\neq 0$;结论是: 方程组(1.4)有唯一解,且由(1.5)给出.

推论 当 $D\neq 0$ 时,齐次线性方程组只有零解: $x_1=x_2=\Lambda=0$(称为零解).换言之,齐次线性方程组有非零解,必然 $D=0$.

本节知识要点

1. n 阶行列式等于它的任意一行(列)元素与它们各自的代数余子式乘积之和.

2. 行列式的 6 个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

3. 计算行列式常用方法:(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上(下)三角形行列式,从而算得行列式的值;(3)利用行列式按行(列)展开法则把高阶行列式化为低阶行列式计算.

4. 克莱姆法则解线性方程组的条件:方程的数目与变量数目相等;系数行列式 $D\neq 0$.

同步练习 §9.1

1. 求方阵 $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 对应的元素 2 和 -2 的代数余子式.

2. 已知 4 阶方阵 A 中第 3 列元素依次为: $1,-2,1,0$,它们的余子式依次为: $5,3,7,-4$. 求方阵 A 的行列式.