经典教材辅导用书
JINGDIAN JIAOCAI FUDAO YONGSHU

黄光谷 等 编

吉米多维奇数学分析习题集选解（修订版）（下册）

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUANJIE XIUDINGBAN XIACE

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书

吉米多维奇

数学分析习题集选解(修订版)

(下册)

黄光谷　黄　川
蔡晓英　李　杨　编

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集．编者根据我国目前的教学实际情况，选编了其中约三分之一的重要习题，并作了详细解答，分上、下两册出版．本书覆盖了该习题集各章节的主要内容，便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容，这对学习理科数学分析或工科高等数学（即微积分）的读者将大有裨益．

本书有很强的可读性，并兼顾多方需要，适合理、工科类本、专科各专业教、学数学分析或高等数学（微积分）的师生作为教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集选解（修订版）（下册）/黄光谷 等编．—武汉：华中科技大学出版社，2011.1

ISBN 978-7-5609-3892-9

Ⅰ．吉… Ⅱ．黄… Ⅲ．数学分析-高等学校-解题 Ⅳ．O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 088639 号

吉米多维奇数学分析习题集选解(修订版)(下册) 黄光谷 等编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：李 琴 周芬娜
封面设计：潘 群
责任校对：祝 菲
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社（中国·武汉）
武昌喻家山 邮编：430074 电话：（027）87557437
录 排：武汉佳年华科技有限公司
印 刷：华中科技大学印刷厂
开 本：850mm×1168mm 1/32
印 张：11.375
字 数：307 千字
版 次：2011 年 1 月第 2 版第 4 次印刷
定 价：20.00 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118 竭诚为您服务

目　　录

第二篇 多变量函数

第 5 章

级　　数

§1　数项级数、同号级数收敛性的判别法

内 容 提 要

1. 一般概念

对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad ①$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) 存在,则称级数 ① 为收敛的;反之,则称级数 ① 为发散的.

2. 柯西准则

级数 ① 收敛的充要的条件为对于任何的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N = N(\varepsilon)$,使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时,不等式 $|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$ 成立.

特别是,若级数收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. 比较判别法 Ⅰ

设除级数 ① 外,还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad ②$$

若当 $n \geqslant n_0$ 时,不等式 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ 成立,则

(1) 从级数 ② 收敛可推得级数 ① 收敛;

(2) 从级数 ① 发散可推得级数 ② 发散.

特别是,当 $n\to\infty$ 时,若 $a_n\sim b_n$,则正项级数 ① 和 ② 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 Ⅱ

设 $a_n=O^*\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$(记号 O^* 的意义参阅第一章 §6.1),则

(1) 当 $p>1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $p\leqslant 1$ 时级数 ① 发散.

5. 达朗贝尔判别法

若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$,则

(1) 当 $q<1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $q>1$ 时级数 ① 发散.

6. 柯西判别法

若 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$,则

(1) 当 $q<1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $q>1$ 时级数 ① 发散.

7. 拉阿伯判别法

若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$,则

(1) 当 $p>1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $p<1$ 时级数 ① 发散.

8. 高斯判别法

若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$,其中,$|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$,则

(1) 当 $\lambda>1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $\lambda<1$ 时级数 ① 发散;

(3) 当 $\lambda=1$ 时,若 $\mu>1$,则级数 ① 收敛;若 $\mu\leqslant 1$,则级数 ① 发散.

9. 柯西积分的判别法

若 $f(x)(x>0)$ 是非负的不增函数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与积分 $\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

习 题 选 解

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【1—2548】 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

解 记 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

所求
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-1/2}+0=3.$$

可见题设级数收敛.

【2—2550】 $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 因
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),\end{aligned}$$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1/3.$$

【3—2551】 (1) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$；

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$.

解 记(1) 中级数和为 S_1,(2) 中级数和为 S_2,则有

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin[(n-1)\alpha+\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}q^n[\sin(n-1)\alpha\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha\sin\alpha]$$

$$=q\cos\alpha S_1+q\sin\alpha(1+S_2),$$

所以 $$(1-q\cos\alpha)S_1-q\sin\alpha S_2=q\sin\alpha; \quad ①$$

同理 $$q\sin\alpha S_1+(1-q\cos\alpha)S_2=q\cos\alpha. \quad ②$$

联立式 ①、②,解得

$$S_1=\frac{D_1}{D}=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},\quad S_2=\frac{D_2}{D}=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

其中,D 与 D_1、D_2 分别是方程组的系数行列式与"换列"行列式.

【4—2552】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 记 $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}^*$,则

$$a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=0-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=1-\sqrt{2}.$$

【5—2554】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ ($A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)$) 也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和分别为 S_n 与 s_n,则

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}A_n=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}=s_{p_{n+1}-1},$$

所以 $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}s_{p_{n+1}-1}=s,$$

可见$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，且与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$有相同的和$s$.

反之不真. 反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$显然发散；但$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$却显然收敛于0.

【6—2555】 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的各项是正的，而把这级数的项经过组合得到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，则原来的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

证 仍记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的前$n$项之和分别为$S_n$与$s_n$. 由于$a_n>0\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以$A_n>0$，故部分和数列$\{S_n\}$与$\{s_n\}$都单调增加，且显然有$0<s_n<S_n$. 又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，故$\{S_n\}$有界，从而$\{s_n\}$亦有界，所以$\{s_n\}$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

研究下列级数的收敛性：

【7—2558】 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots.$

解 因为$0<a_n\triangleq\dfrac{1}{n!}\leqslant\dfrac{1}{n(n-1)}<\dfrac{1}{(n-1)^2}\ (n>1)$，又级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$是$p$-级数$(p=2>1)$，故它收敛. 由比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$及题设级数收敛.

【8—2566】 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆收敛且$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆发散，问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$的收敛性如何？

证 由于 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \Rightarrow 0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$，又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，知 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛. 由上式及比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 也收敛，而 $c_n = (c_n - a_n) + a_n$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能收敛也可能发散. 例如，$a_n = -1, b_n = 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，取 $c_n = 0$，则有 $a_n < c_n < b_n$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛于 0. 另取 $\bar{c}_n = 1/k \ (k > 1)$，也有 $a_n < \bar{c}_n < b_n$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 是发散的.

【9—2567】 设已知两发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的各项不为负数. 问下列两级数收敛性如何：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$， (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$.

答 (1) 可能收敛也可能发散. 各举一例如下.

设 $a_n = n, b_n = 1/n (n \in \mathbf{N}^*)$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 都发散，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的. 又设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + n + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + 1 + \cdots + \frac{1}{3^n} + n + \cdots,$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)$ 却

是收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 一定也发散. 这是因为 $\max(a_n,b_n)\geqslant a_n>0$,由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 也发散.

【10—2569】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$,$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证 (1) 因为 $|a_nb_n|\leqslant 2|a_nb_n|\leqslant|a_n|^2+|b_n|^2=a_n^2+b_n^2$,由题设知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛,再由上式和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 也收敛.

(2) $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n\leqslant 2(a_n^2+b_n^2)$,

由题设和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

(3) $\frac{|a_n|}{n}=\frac{1}{n}\cdot|a_n|\leqslant 2\cdot\frac{1}{n}\cdot|a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}+a_n^2$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛和比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

【11—2571】 证明:若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,知 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 充分大的 n,使 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\varepsilon$,又 $a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots>a_{2n}$,所以 $na_{2n}<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\varepsilon$,

即有 $$\lim_{n\to\infty}na_{2n}=0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}2na_{2n}=0. \qquad ①$$

又 $$0<(2n+1)a_{2n+1}<(2n+1)a_{2n}=\frac{2n+1}{2n}\cdot 2na_{2n},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0. \qquad ②$$

由式①、②知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0.$

利用柯西准则,证明下列正项级数的收敛性:

【12—2575】 $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1} + \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \dfrac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$

证 $$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos(n+k)x - \cos(n+k+1)x}{n+k}\right|$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\cos(n+2)x + \cdots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p-1}\right)\cos(n+p)x - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \varepsilon,$$

这只需 $\forall \varepsilon > 0$,取 $n > \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 1\right] \triangleq N$(不妨设 $\varepsilon < 2$)即可,所以题设级数收敛.

【13—2575.1】 $\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos x^2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\cos x^n}{n^2} + \cdots.$

提示:利用不等式:$\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \cdots)$.

解 用柯西准则证之.由

$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos x^{n+m}}{(n+m)^2}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n+m}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n},$$

于是 $\forall \varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N,\forall m\in\mathbf{N}^*$,有$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即有 $|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon$,所以该级数收敛.

利用柯西准则,证明下列级数的发散性:

【14—2576】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$

证 取 $p=n$,因为

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}\ (\not<\varepsilon),$$

所以题设级数发散.

【15—2577.1】 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots.$

解 $\forall\varepsilon_0$,并使 $0<\varepsilon_0<1/2$,由

$$|S_{2n+1}-S_n|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$$

$$>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}$$

$$>\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}\ (\text{共 } n+1 \text{ 项})$$

$$=\frac{n+1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,n\in\mathbf{N}^*,$$

于是,由柯西准则,知该级数发散.

运用达朗贝尔、柯西或比较判别法,研究下列级数的收敛性:

【16—2578】 $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots+\frac{1000^n}{n!}+\cdots.$

解 【这类 a_n 含有阶乘或乘幂因子的式子,宜用比值判别法化简.】

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{1000^n}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1,$