



经典教材辅导用书

JINGDIAN JIAOCAI FUDAO YONGSHU

黄光谷 等 编

吉米多维奇数学分析 习题集选解 (修订版)(下册)

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUANJIE
XIUDINGBAN XIACE



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

经典教材辅导用书

吉米多维奇
数学分析习题集选解(修订版)
(下册)

黄光谷 黄 川 编
蔡晓英 李 杨

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集. 编者根据我国目前的教学实际情况, 选编了其中约三分之一的重要习题, 并作了详细解答, 分上、下两册出版. 本书覆盖了该习题集各章节的主要内容, 便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容, 这对学习理科数学分析或工科高等数学(即微积分)的读者将大有裨益.

本书有很强的可读性, 并兼顾多方需要, 适合理、工科类本、专科各专业教、学数学分析或高等数学(微积分)的师生作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集选解(修订版)(下册)/黄光谷 等编. —武汉: 华中科技大学出版社, 2011. 1

ISBN 978-7-5609-3892-9

I. 吉… II. 黄… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 088639 号

吉米多维奇数学分析习题集选解(修订版)(下册)

黄光谷 等编

策划编辑: 周芬娜

责任编辑: 李 琴 周芬娜

封面设计: 潘 群

责任校对: 祝 菲

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)87557437

录 排: 武汉佳年华科技有限公司

印 刷: 华中科技大学印刷厂

开 本: 850mm×1168mm 1/32

印 张: 11.375

字 数: 307 千字

版 次: 2011 年 1 月第 2 版第 4 次印刷

定 价: 20.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

目 录

第 5 章	级数	(1)
§ 1	数项级数、同号级数收敛性的判别法	(1)
	内容提要	(1)
	习题选解	(3)
§ 2	变号级数收敛性的判别法	(19)
	内容提要	(19)
	习题选解	(20)
§ 3	级数的运算	(30)
	内容提要	(30)
	习题选解	(30)
§ 4	函数项级数	(32)
	内容提要	(32)
	习题选解	(34)
§ 5	幂级数	(56)
	内容提要	(56)
	习题选解	(58)
§ 6	傅里叶级数	(76)
	内容提要	(76)
	习题选解	(78)
§ 7	级数求和法	(82)
	内容提要	(82)
	习题选解	(83)
§ 8	利用级数求定积分之值	(90)
	内容提要	(90)

习题选解	(90)
§ 9 无穷乘积(略)	(91)
§ 10 司特林公式	(91)
内容提要	(91)
习题选解	(91)
§ 11 用多项式逼近连续函数(略)	(92)

第二篇 多变量函数

第 6 章 多变量函数的微分法	(94)
§ 1 多变量函数的极限、连续性	(94)
内容提要	(94)
习题选解	(94)
§ 2 偏导函数、多变量函数的微分	(106)
内容提要	(106)
习题选解	(107)
§ 3 隐函数的微分法	(126)
内容提要	(126)
习题选解	(127)
§ 4 变量代换	(139)
内容提要	(139)
习题选解	(140)
§ 5 几何上的应用	(143)
内容提要	(143)
习题选解	(144)
§ 6 泰勒公式	(153)
内容提要	(153)
习题选解	(154)
§ 7 多变量函数的极值	(157)
内容提要	(157)
习题选解	(158)

第 7 章 带参数的积分	(183)
§ 1 带参数的常义积分	(183)
内容提要	(183)
习题选解	(184)
§ 2 带参数的广义积分、积分的一致收敛性	(194)
内容提要	(194)
习题选解	(195)
§ 3 广义积分中的变量代换、广义积分号下的 微分法及积分法	(207)
内容提要	(207)
习题选解	(208)
§ 4 欧拉积分	(216)
内容提要	(216)
习题选解	(217)
第 8 章 重积分和曲线积分	(221)
§ 1 二重积分	(221)
内容提要	(221)
习题选解	(222)
§ 2 面积的计算法	(237)
内容提要	(237)
习题选解	(237)
§ 3 体积的计算法	(241)
内容提要	(241)
习题选解	(242)
§ 4 曲面面积计算法	(245)
内容提要	(245)
习题选解	(245)
§ 5 二重积分在力学上的应用	(250)
内容提要	(250)
习题选解	(251)

§ 6	三重积分	(255)
	内容提要	(255)
	习题选解	(256)
§ 7	利用三重积分计算体积	(263)
	内容提要	(263)
	习题选解	(264)
§ 8	三重积分在力学上的应用	(269)
	内容提要	(269)
	习题选解	(270)
§ 9	二重和三重广义积分	(274)
	内容提要	(274)
	习题选解	(275)
§ 10	多重积分	(279)
	内容提要	(279)
	习题选解	(280)
§ 11	曲线积分	(283)
	内容提要	(283)
	习题选解	(284)
§ 12	格林公式	(298)
	内容提要	(298)
	习题选解	(299)
§ 13	曲线积分的物理应用	(305)
	内容提要	(305)
	习题选解	(305)
§ 14	曲面积分	(311)
	内容提要	(311)
	习题选解	(312)
§ 15	斯托克斯公式	(326)
	内容提要	(326)
	习题选解	(327)

§ 16	奥-高公式	(330)
	内容提要	(330)
	习题选解	(330)
§ 17	场论初步	(336)
	内容提要	(336)
	习题选解	(338)

级 数

§ 1 数项级数、同号级数收敛性的判别法

内 容 提 要

1. 一般概念

对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ($S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) 存在, 则称级数 ① 为收敛的; 反之, 则称级数 ① 为发散的.

2. 柯西准则

级数 ① 收敛的充要的条件为对于任何的 $\epsilon > 0$ 都存在 $N =$

$N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式 $|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$ 成立.

特别是, 若级数收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. 比较判别法 I

设除级数 ① 外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$ 时, 不等式 $0 \leq a_n \leq b_n$ 成立, 则

(1) 从级数 ② 收敛可推得级数 ① 收敛;

(2) 从级数 ① 发散可推得级数 ② 发散.

特别是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数 ① 和 ② 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 II

设 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$ (记号 O^* 的意义参阅第一章 § 6.1), 则

(1) 当 $p > 1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $p \leq 1$ 时级数 ① 发散.

5. 达朗贝尔判别法

若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则

(1) 当 $q < 1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

6. 柯西判别法

若 $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则

(1) 当 $q < 1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

7. 拉阿伯判别法

若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$, 则

(1) 当 $p > 1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $p < 1$ 时级数 ① 发散.

8. 高斯判别法

若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}}$, 其中, $|\theta_n| < C$

而 $\epsilon > 0$, 则

(1) 当 $\lambda > 1$ 时级数 ① 收敛;

(2) 当 $\lambda < 1$ 时级数 ① 发散;

(3) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$, 则级数 ① 收敛; 若 $\mu \leq 1$, 则级数 ① 发散.

9. 柯西积分的判别法

若 $f(x) (x > 0)$ 是非负的不增函数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

习 题 选 解

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

【1—2548】 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$.

解 记 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}, \\ \frac{1}{2}S_n &= S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

所求 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1-1/2} + 0 = 3$.

可见题设级数收敛.

【2—2550】 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$.

解 因 $S_n = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right] \\ = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right),$

所以 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/3$.

【3—2551】 (1) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots$;

(2) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots$.

解 记(1)中级数和为 S_1 , (2)中级数和为 S_2 , 则有

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin[(n-1)\alpha + \alpha] = \sum_{n=1}^{\infty} q^n [\sin(n-1)\alpha \cos\alpha + \cos(n-1)\alpha \sin\alpha] \\ &= q\cos\alpha S_1 + q\sin\alpha(1 + S_2), \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad (1 - q\cos\alpha)S_1 - q\sin\alpha S_2 = q\sin\alpha; \quad \text{①}$$

$$\text{同理} \quad q\sin\alpha S_1 + (1 - q\cos\alpha)S_2 = q\cos\alpha. \quad \text{②}$$

联立式 ①、②, 解得

$$S_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}, \quad S_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}.$$

其中, D 与 D_1 、 D_2 分别是方程组的系数行列式与“换列”行列式.

【4—2552】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

解 记 $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1},$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0 - \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = 1 - \sqrt{2}.$$

【5—2554】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组

合而不变更其先后次序所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ ($A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 = 1, p_1 < p_2 < \dots$)) 也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 记 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和分别为 S_n 与 s_n , 则

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_n = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i = s_{p_{n+1}-1},$$

$$\text{所以} \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{p_{n+1}-1} = s,$$

可见 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 且与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和 s .

反之不真. 反例: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 显然发散; 但 $(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$ 却显然收敛于 0.

【6—2555】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 而把这级数的项经过组合得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 仍记 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项之和分别为 S_n 与 s_n . 由于 $a_n > 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 所以 $A_n > 0$, 故部分和数列 $\{S_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 都单调增加, 且显然有 $0 < s_n < S_n$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 故 $\{S_n\}$ 有界, 从而 $\{s_n\}$ 亦有界, 所以 $\{s_n\}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

研究下列级数的收敛性:

【7—2558】 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

解 因为 $0 < a_n \triangleq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2}$ ($n > 1$), 又级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 是 p -级数 ($p = 2 > 1$), 故它收敛. 由比较判别法知, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 及题设级数收敛.

【8—2566】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆发散, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性如何?

证 由于 $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow 0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$,
 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛. 由上式及比较
 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛, 而 $c_n = (c_n - a_n) + a_n$, 所以级
 数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能收敛也可能发
 散. 例如, $a_n = -1, b_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 取 $c_n = 0$, 则有 a_n
 $< c_n < b_n$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛于 0. 另取 $\bar{c}_n = 1/k \quad (k > 1)$, 也有 $a_n < \bar{c}_n$
 $< b_n$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 是发散的.

【9—2567】 设已知两发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的各项不为负
 数. 问下列两级数收敛性如何:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n), \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n).$$

答 (1) 可能收敛也可能发散. 各举一例如下.

设 $a_n = n, b_n = 1/n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 都发散, 且
 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的. 又设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + n + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + 1 + \cdots + \frac{1}{3^n} + n + \cdots,$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right)$ 却

是收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定也发散. 这是因为 $\max(a_n, b_n) \geq a_n > 0$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散和比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

【10—2569】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证 (1) 因为 $|a_n b_n| \leq 2 |a_n| |b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2 = a_n^2 + b_n^2$, 由题设知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 再由上式和比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 也收敛.

$$(2) \quad (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \leq 2(a_n^2 + b_n^2),$$

由题设和比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

$$(3) \quad \frac{|a_n|}{n} = \frac{1}{n} \cdot |a_n| \leq 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot |a_n| \leq \frac{1}{n^2} + a_n^2,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛和比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

【11—2571】 证明: 若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

证 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 充分大的 n , 使 $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon$, 又 $a_{n+1} > a_{n+2} > \cdots > a_{2n}$, 所以 $n a_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon$,

$$\text{即有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n a_{2n} = 0 \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n a_{2n} = 0. \quad (1)$$

$$\text{又} \quad 0 < (2n+1)a_{2n+1} < (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2n a_{2n},$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0. \quad (2)$$

由式 ①、② 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

利用柯西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

$$\text{【12—2575】} \quad \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \left| \sum_{k=1}^p \frac{\cos(n+k)x - \cos(n+k+1)x}{n+k} \right| \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \cos(n+2)x + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p-1} \right) \cos(n+p)x - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

这只需 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n > \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] \triangleq N$ (不妨设 $\varepsilon < 2$) 即可, 所以题设级数收敛.

$$\text{【13—2575.1】} \quad \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \cdots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \cdots$$

提示: 利用不等式: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, \cdots$).

解 用柯西准则证之. 由

$$\begin{aligned} |S_{n+m} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos x^{n+m}}{(n+m)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} \right) \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n},$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$, $\forall m \in \mathbf{N}^*$, 有 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即有

$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$, 所以该级数收敛.

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性:

【14—2576】 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$.

证 取 $p = n$, 因为

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} (\nless \varepsilon),$$

所以题设级数发散.

【15—2577. 1】 $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots$.

解 $\forall \varepsilon_0$, 并使 $0 < \varepsilon_0 < 1/2$, 由

$$\begin{aligned} |S_{2n+1} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \\ &> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\ &> \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \text{ (共 } n+1 \text{ 项)} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0, n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

于是, 由柯西准则, 知该级数发散.

运用达朗贝尔、柯西或比较判别法, 研究下列级数的收敛性:

【16—2578】 $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots$.

解 **【这类 a_n 含有阶乘或乘幂因子的式子, 宜用比值判别法化简.】**

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{1000^n}{n!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$