高等数学

余龙英　主编

同济大学出版社

高等数学

（高职高专）

主　编　余龙英
副主编　张静华　王　玲
主　审　黄伟祥

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据教育部制订的“高职高专教育高等数学教学基本要求”，结合编者多年教学经验，采用“以应用为目的，以必需够用为度”的原则编写而成.

全书共分7章，整体结构合理，语言叙述通俗. 主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、二元微积分初步. 书后附有微积分发展简史、积分表、初等数学常用公式和习题答案.

本书可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高等院校工科、经管类各专业高等数学或经济数学课程教材，也可供准备参加广东省本科插班生考试的考生选用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/余龙英主编. --上海：同济大学出版社，2013.8

ISBN 978-7-5608-5233-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①余… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第171330号

高等数学(高职高专)

主编 余龙英 **副主编** 张静华 王 玲 **主审** 黄伟祥

责任编辑 杨 闯 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021－65985622)

经　　销 全国各地新华书店

印　　刷 同济大学印刷厂

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 17.25

印　　数 1—11 000

字　　数 430 000

版　　次 2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5608-5233-1

定　　价 39.00元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换　　版权所有　侵权必究

前　言

本书是根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学教学基本要求”以及广东省本科插班生考试大纲，结合编者多年从事本课程的教学经验，采用“以应用为目的，以必需够用为度”的原则编写而成．本书具有结构严谨、逻辑清晰、讲解透彻、通俗易懂、便于自学等优点．可作为高职高专工科类和经管类高等数学和经济数学教材，也可作为参加广东省本科插班生考试的考生选用教材．

本书具有以下特色：

(1) 内容简练，语言通俗．本着够用为度的原则，留下最急需的知识，摒弃了大量的理论证明；对数学概念、定理大多采用学生容易理解、容易记住的方式进行叙述．例如，极限概念用描述性定义学生更容易接受；分部积分公式中 u 的确定使用口诀“五指山上觅对象-反常”学生更容易记住．

(2) 习题配置合理，便于精讲多练．在各章节的编写过程中，每个知识点后面都编排了针对性很强的课堂练习，方便教师的教学和学生的学习，使学生能趁热打铁，迅速消化吸收新知识；每节后面还编排了大量的课后练习，方便学生复习巩固本节内容．

(3) 贴近专业，学以致用．本着从实际中来、再到实际中去的编写思路，我们广泛征求了专业课教师的意见，较多列举了联系各专业实际的例子和习题；每章后面还编排了应用实例，供学生课外阅读，让学生切实体会到数学就在我身边，学数学是有用的．

(4) 以人为本，合理分层．我们把教学内容分为基本内容、一般内容和提高内容三个层次，基本内容、一般内容放在一块编排，提高内容打上星号作为选学内容，可根据专业及学生的实际情况灵活掌握；课后练习也作了相应编排，分为基本题、一般题、提高题三部分，基本题和一般题是要求大多数学生应该掌握的，提高题则留给数学基础较好的学生选做．

(5) 注重学生的可持续发展，兼顾专插本学生的需要．本教材紧扣广东省本科插班生考试大纲，按照大纲要求来编排知识点，每章后面的复习题则为历年专插本考试真题，有助于专插本学生的备考．

本教材由广东水利电力职业技术学院数学教学部全体老师参与编写，余龙英主编，黄伟祥主审，张静华、王玲任副主编，罗建华、那顺布和、林娇燕、关占荣、邓小红、王光英参加了编写．由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请广大的教师和读者提出宝贵的意见．

编　者

2013 年 5 月

目　录

前言

第 1 章　函数、极限与连续 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　数列的极限 …… 17
1.3　函数的极限 …… 21
1.4　无穷小与无穷大 …… 26
1.5　极限的运算法则 …… 29
1.6　两个重要极限 …… 33
1.7　函数的连续性 …… 38
复习题 1 …… 46
应用实例 1 …… 49

第 2 章　导数与微分 …… 54
2.1　导数概念 …… 54
2.2　导数的四则运算法则 …… 62
2.3　复合函数的求导法则 …… 64
2.4　特殊函数求导法和高阶导数 …… 67
2.5　函数的微分 …… 74
复习题 2 …… 82
应用实例 2 …… 83

第 3 章　中值定理与导数的应用 …… 90
3.1* 中值定理 …… 90
3.2　洛必达法则 …… 94
3.3　函数的单调性 …… 99
3.4　函数的极值 …… 102
3.5　函数的最大值与最小值 …… 106
3.6* 利用导数研究函数图像 …… 112
复习题 3 …… 116
应用实例 3 …… 117

第 4 章　不定积分 …… 119
4.1　不定积分的概念与性质 …… 119

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.2 换元积分法 …… 126
4.3 分部积分法 …… 136
4.4* 简单有理函数的积分 …… 141
复习题 4 …… 146
应用实例 4 …… 147

第 5 章 定积分及其应用 …… 150
5.1 定积分的定义及其性质 …… 150
5.2 牛顿-莱布尼兹公式 …… 157
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 162
5.4* 无穷区间上的广义积分 …… 166
5.5 定积分的应用 …… 167
复习题 5 …… 177
应用实例 …… 180

第 6 章 常微分方程 …… 183
6.1 微分方程的基本概念 …… 183
6.2 一阶微分方程 …… 186
6.3* 二阶常系数线性微分方程 …… 194
复习题 6 …… 203
应用实例 6 …… 204

第 7 章* 二元微积分初步 …… 208
7.1 空间解析几何简介 …… 208
7.2 二元函数及其极限与连续 …… 212
7.3 二元函数的偏导数 …… 215
7.4 二元函数的全微分 …… 220
7.5 二重积分的概念与性质 …… 223
7.6 二重积分的计算 …… 228
复习题 7 …… 237
应用实例 7 …… 239

附录 A 微积分发展简史 …… 241
附录 B 积分表 …… 246
附录 C 初等数学常用公式 …… 254
附录 D 习题参考答案 …… 259

第 1 章　函数、极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，它是高等数学重要的基本概念之一，也是高等数学研究的主要对象．极根概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，高等数学中的几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来定义的，掌握好极限理论和方法是学好微积分的必要前提．本章主要对函数进行复习和作一些有关的补充，并详细介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性．

1.1　函　　数

1.1.1　预备知识

1．集合

具有某种属性的元素 x 的全体称为一个集合，记为 A，x 称为集合的元素，记 $A=\{x \mid x$ 所具有的特征$\}$．

例如，由不等式 $4<x<8$ 表示的实数集合记为 $A=\{x \mid 4<x<8\}$．

集合也可以用其他大写的英文字母表示．如果 x 是集合 A 中的元素，记为 $x \in A$．否则，记为 $x \notin A$．

由全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，由自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$，整数集合记为 $\mathbf{Z}$，有理数集合记为 $\mathbf{Q}$，无理数集合记为 $\mathbf{W}$．显然，$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{W}$ 都包含于 $\mathbf{R}$ 内，故它们分别为 $\mathbf{R}$ 的子集．

2．区间

设 a，b 均为实数，且 $a<b$，则称$\{x \mid a<x<b\}$表示的实数 x 的集合为开区间，记为(a, b)．即$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$．

类似地，称$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$为闭区间；$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$以及$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$为半开半闭区间．

以上区间分别如图 1-1(a)—(d)所示．

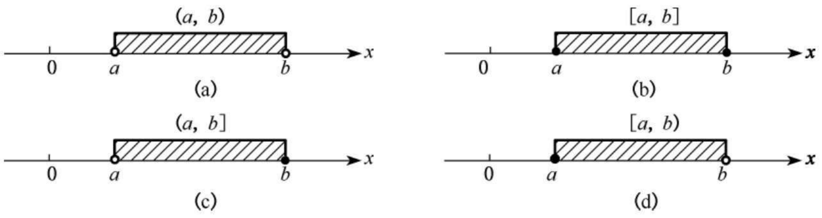


图 1-1

以上区间为有限区间，a 与 b 分别称为区间的端点，右端点与左端点的差称为区间的长

度.在讨论问题时,为方便起见也常用 I 表示上述各区间.

引入无穷大的记号∞,则以下各区间为无限区间:

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid x > a\}$,

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\} = \{x \mid x \geqslant a\}$,

$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\} = \{x \mid x < b\}$,

$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\} = \{x \mid x \leqslant b\}$,

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,即表示全体实数的集合.

应当注意的是∞是一个记号,并不表示一个很大的数,且不能参与运算.

有了区间的概念之后,不等式或不等式组的解常用区间来表示.

3. 邻域

设 $\delta > 0$, x_0 是一个实数,称集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$,即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.其中,$x_0$ 为邻域的中心,δ 为邻域的半径.

在数轴上,点 x_0 的 δ 邻域表示以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,如图 1-2(a)所示.

如果 x 在 x_0 的 δ 邻域内变化但不能取 x_0,即 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$,则称此邻域为点 x_0 的去心邻域,记为$\mathring{U}(x_0, \delta)$,即$\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$,如图 1-2(b)所示.相应地,称 $U(x_0, \delta)$ 为点 x_0 的有心邻域.

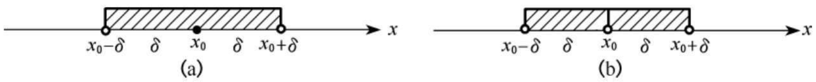


图 1-2

例如,3 的 0.01 邻域,就是满足不等式 $|x - 3| < 0.01$ 的实数 x 的集合,即 $2.99 < x < 3.01$,也就是开区间$(2.99, 3.01)$.

又如,满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的集合,就表示点 -2 的去心邻域,半径也是 0.01.该邻域即开区间$(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

其中符号"$\cup$"是集合运算的一种符号,表示两个集合的并集,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

练习

用区间表示下列各邻域.

(1) $U(1, 0.1)$;　　(2) 点 3 的 0.001 邻域;　　(3) 点-3 的 0.002 去心邻域.

1.1.2 函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中,人们经常会遇到各种各样的量,例如身高、体重、温度、浓度、产量、成本、收入、面积、体积等.这些量可以分为两类,一类量在考察的过程中不

发生变化，只取一个固定的值，称它为**常量**；另一类量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，称它为**变量**. 例如，一段时间内银行的资金运作过程中，借贷资金的数额不断变化，是变量，而利率不变是常量. 某种商品的价格，某个班的学生人数在一段时间内保持不变，它们都是常量，而一天中的气温，生产过程中的产量都是不断变化的，它们都是变量. 常量习惯用字母 a, b, c, d 等表示，变量习惯用字母 x, y, z, t, u, v, w 等表示.

在理解常量与变量时，应注意下面几点：

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也是同样的. 这说明常量和变量具有相对性. 一个量是变量还是常量，不是固定不变的. 在一定的条件下，常量和变量可以互相转化.

(2) 从几何意义上讲，常量对应着数轴上的定点，变量则对应数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**.

有一类变量，可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做连续变量，**连续变量**的变动区域常用区间表示.

2. 函数的定义

变化无处不在，无时不有. 在同一个自然现象或技术过程中，往往同时存在着几个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是按照一定的规律相互联系着，其中一个量变化时，另外的变量也跟着变化；前者的值一旦确定，后者的值也就随之唯一确定.

例 1　某种机器的销售单价为每台 5 万元，销售总收入 R 万元与销售量 x 台的关系是

$$R = 5x.$$

x 在正整数内任取一个具体数值，根据上面的依赖关系，就得到一个确定的 R 值与之对应.

例 2　某天一昼夜的气温 T 是随时间 t 的变化而变化的. 气温的变化可以通过气温自动记录仪记录下来. 如图 1-3 所示，利用气温自动记录仪可得到一条曲线，对这一天 0:00—24:00 之间任一时刻 t_0，气温 T 都有一个确定的值 T_0 与它对应，如当 $t=0$ 时，气温 $T = 10℃$；当 $t = 12$ 时，气温 $T = 30℃$.

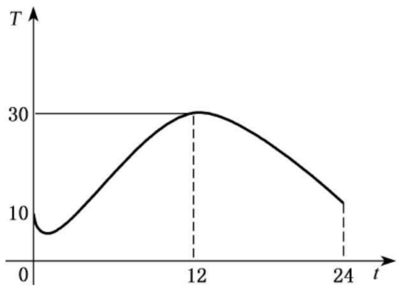


图 1-3

例 3　某人的父母每年在他生日的那天记录下他的身高，表 1-1 是他从 1 周岁到 10 周岁的身高.

表 1-1　　**某人的身高**

年龄/岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高/m	0.77	0.90	0.97	1.04	1.14	1.21	1.26	1.32	1.37	1.43

由表 1-1 可知这个人的身高随着年龄的增长而增高，例如，想要知道他 6 岁时的身高，只要查表就知道为 1.21 m.

现实世界中广泛存在着变量间的这种相依关系，这正是函数关系的客观背景. 将变量间的这种相依关系抽象化并用数学语言表达出来，便得到了函数的概念.

定义 1　设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的非空数集，如果按照某个法则 f，对每

一个 $x \in D$，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，那么 y 叫做 x 的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$. 其中变量 x 叫做**自变量**，变量 y 叫做函数或**因变量**，自变量的取值范围 D 叫做函数的**定义域**.

f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则. 有时，函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y = g(x)$，$y = \varphi(x)$ 等.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，依法则，f 的对应值称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$. 只有 $x_0 \in D$ 时，才有对应的函数值，这时称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 有定义，否则称函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义. 所有函数值组成的集合 $W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

关于函数概念，可提出以下几点注释：

(1) 函数的概念中涉及定义域、对应规律和值域三个要素. 在这三个要素中，最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应规律，这二者常称为函数的二要素. 只有定义域与对应规律都相同的两个函数才是相同的函数.

(2) 每个函数除定义域外，还有值域，它们随着函数的出现而出现，因此，它们不可能是空集.

(3) 上述定义中所说的函数只有一个自变量，这样的函数就称为一元函数. 而且对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 有唯一确定的值与之对应(而不是两个或两个以上值)，故称这样的函数为单值函数，如果对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 的对应值不止一个，则称 y 是 x 的多值函数. 在没有特别声明的情况下，以后凡提及的函数，均指一元单值函数.

(4) 在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x \in D$，都有确定的 $y \in W$ 和它对应. 因此，常量 $y = C$ 也符合函数的定义，因为当 $x \in \mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C.

例 4 设 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$，$f(x+1)$.

解 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$；$f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}\sin\dfrac{1}{x+1}$.

例 5 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$，求 $f(x)$.

解 令 $x + 1 = t$，则 $x = t - 1$，有 $f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4$，

所以
$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

例 6 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+4)}$.

分析：因为是分式，所以要求分母不等于零.

解 $(x-1)(x+4) \neq 0$，定义域为 $x \neq 1$，且 $x \neq -4$，用区间表示，即 $D = (-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) $y = \sqrt{3-x}$.

分析：因为是二次根式，所以要求被开方数 $3-x$ 必须大于等于零.

解　$3-x \geqslant 0$，所以定义域为 $x \leqslant 3$，用区间表示，即 $D=(-\infty, 3]$.

(3) $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$.

分析：首先有分式，要求分母 x 不等于零，其次有对数，要求真数 $x+1$ 大于零，所以，定义域是二者的公共部分.

解　由 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x+1>0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x>-1. \end{cases}$

所以定义域为 $x>-1$ 且 $x \neq 0$，用区间表示，即 $D=(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

(4) $y=\arcsin \dfrac{x}{3}$.

分析：反三角函数要求 $\dfrac{x}{3}$ 必须满足 $-1 \leqslant \dfrac{x}{3} \leqslant 1$.

解　由 $-1 \leqslant \dfrac{x}{3} \leqslant 1$，得定义域为 $-3 \leqslant x \leqslant 3$，用区间表示，即 $D=[-3, 3]$.

(5) $y=\arcsin \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

解　由 $\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x-1}{3} \leqslant 1, \\ x+1>0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4, \\ x>-1. \end{cases}$

所以定义域为 $-1<x \leqslant 4$，用区间表示，即 $D=(-1, 4]$.

例 7　求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin \dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $x^2-x-6 \geqslant 0$，解得 $x \geqslant 3$ 或 $x \leqslant -2$；

而 $\arcsin \dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right| \leqslant 1$，解得 $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

于是，所求函数的定义域是这两个函数的定义域的公共部分 $-3 \leqslant x \leqslant -2$，$3 \leqslant x \leqslant 4$. 用区间表示，即 $D=[-3, 2] \cup [3, 4]$.

应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围外，还要考虑到变量的实际意义. 一般而言，经济变量往往取正值，即变量都大于零.

例 8　下列各对函数是否为同一函数？

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；　　(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=1$；

(3) $y=f(x)$, $u=f(t)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=1$.

解　(1) 不相同. 因为对应规律不同，事实上 $g(x)=|x|$.

(2) 相同. 因为定义域与对应规律都相同.

(3) $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是表示同一函数，因为对应规律相同，函数的定义域也相同.

(4) 不相同，因为定义域不同.

由此可知一个函数由定义域与对应规律完全确定，而与用什么字母表示无关.

3. 函数的表示法

表示函数的方法有许多，最常见的有表格法、图像法及解析法(又称公式法).

表格法：把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系. 如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 3.

图像法:用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系,它是函数关系的几何表示. 如例 2.

解析法:用数学式子表示自变量与函数的对应关系. 如例 1. 本书所讨论的函数常用公式法表示.

4. 分段函数

有时,我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例 9 邮电局规定信函邮包重量不超过 50 g 支付邮资 0.80 元,超过部分按 0.40 元/g 支付邮资,信函邮包重量不得超过 5 000 g,则邮资 y(单位:元)与邮包重量 x(单位:g)的关系可由解析表达式表示为

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 50;\\ 0.80+0.40(x-50), & 50<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

该函数的定义域为$(0, 5\,000]$,但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的,这样的函数称为分段函数.

如下面几个特殊函数:

(1) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

如图 1-4 所示.

(2) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

如图 1-5 所示.

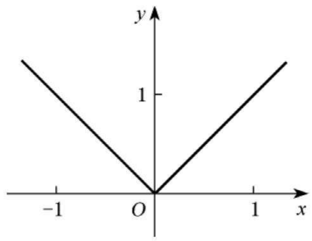


图 1-4

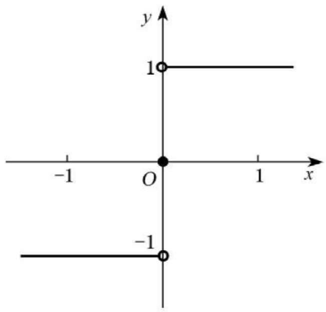


图 1-5

注意:分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 10　作出分段函数

$$f(x)=\begin{cases}2, & x>2;\\ 2x-1, & 0<x\leqslant 2;\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

的图像. 并求函数的定义域及 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-2)$, $f(2)$.

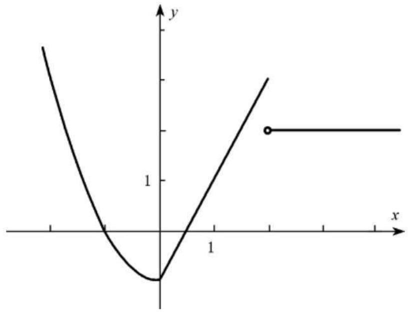


图 1-6

解　先分段作出分段函数的图像(图 1-6), 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因 $\frac{1}{2}\in(0, 2]$, 故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-1=0$. 因 $-2\in(-\infty, 0]$, 故 $f(-2)=(-2)^2-1=3$. 因 $2\in(0, 2]$, 所以 $f(2)=3$.

练习

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$;　　(2) $y=\frac{1}{x}+\ln(x^2-4)$;　　(3) $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0;\\ x^2-2, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(x-1)$.

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正数 M, 对于一切 $x\in D$, 都有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 否则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的几何意义是: 曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间.

注意:

(1) 一个函数在某区间内有界, 正数 M(也称界数)的取法不是唯一的. 例如, $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, $|\sin x|\leqslant 1=M$, 还可以取 $M=2$.

(2) 有界性跟区间有关. 例如: $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界, 但在区间 $(0, 1)$ 内无界. 由此可见, 笼统地说某个函数是有界函数或无界函数是不确切的, 必须指明所考虑的区间.

2. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任意的 $x\in D$, 有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**; 若有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如, $y=\cos x$, $y=x^2$ 是偶函数; $y=\sin x$, $y=x^3$ 是奇函数; $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

可以证明, 奇函数的图像关于原点对称, 如图 1-7(a) 所示; 偶函数的图像关于 y 轴对称, 如图 1-7(b) 所示.

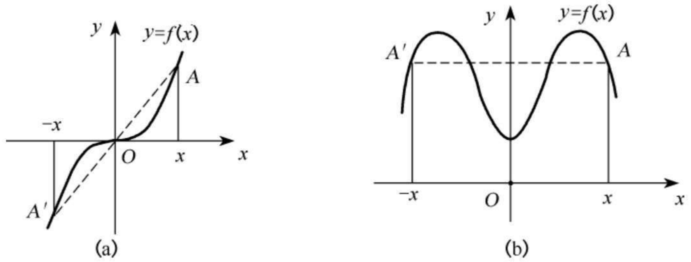


图 1-7

例 11 判断函数 $f(x)=x+\sin x$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)=x+\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且有

$f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，所以函数是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**单调增加**；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**单调减少**.

单调增加和单调减少的函数，统称为**单调函数**，相应的区间称为函数的**单调区间**.

单调增加函数，它的图像沿横轴正向而上升，如图 1-8(a)所示，单调减少函数，它的图像沿横轴正向而下降，如图 1-8(b)所示.

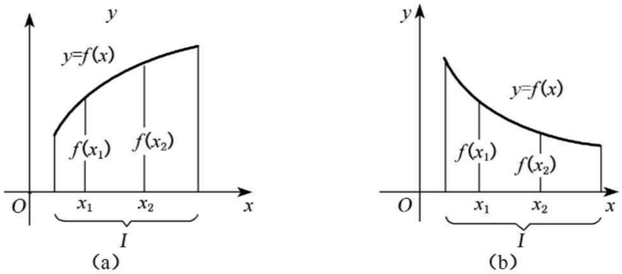


图 1-8

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的. 又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

例 12 证明函数 $f(x)=5x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证 取任意 $x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

因 $f(x_1)-f(x_2)=(5x_1-2)-(5x_2-2)=5(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)=5x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

4. 函数的周期性

定义 5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，必有 $x\pm T\in D$，并且使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指满足该等式的最小正数 T.

例如，$y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π；$y=\tan x$ 的周期为 π.

对周期为 l 的周期函数，如果把其定义域分成长度为 l 的许多区间，那么在每个区间上，函数图形有相同的形状，如图 1-9 所示.

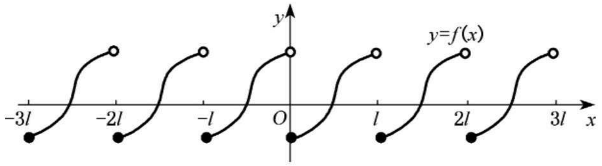


图 1-9

练习

1. 判别函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在下列区间内的有界性.

(1) $(-\infty,-2)$；　(2) $(-2,0)$；　(3) $(0,2)$；　(4) $(1,2)$；　(5) $(2,+\infty)$.

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^2\cos x$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$；　(3) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1;\\ 1, & |x|\leqslant 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$

1.1.4　反函数

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在自由落体运动规律中，t 是自变量，s 是因变量. 则有公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2\ (t\geqslant 0)$，由公式可算出 t 时间内物体下落的路程 s. 但有时也需要根据物体所经过的路程 s 来确定经过这段路程所需要的时间 t，这只要从式中算出 t，就得到 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}\ (s\geqslant 0)$，这里 s 是自变量，t 就是因变量. 上面两式反映了同一过程中两个变量之间地位的相对性，我们称它们互为反函数.

定义 6　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，值域为 W. 如果对于任意的 $y\in W$，通过关系式 $y=f(x)$，都有唯一确定的数值 $x\in D$ 与之对应，那么由此所确定的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，其对应规律记作 f^{-1}，$y=f(x)$ 的反函数记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 W，值域为 D. 原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

事实上，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上用 x 表示自变量，而用 y 表示函数，因此，往往把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$，称之为 $y=f(x)$ 的矫形反函数.

例 13　求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2x+1$ 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x-1}{2}$，即为 $y=2x+1$ 的反函数.

从上面的定义容易得出，求反函数的过程可以分为两步：

第一步：从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

第二步：交换字母 x 和 y.

注意:(1) 如果一个函数存在反函数,它的对应关系必定是一一对应的.单调函数一定存在反函数.

(2) 可以证明,在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 的图像与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-10 所示.

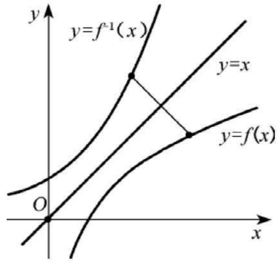


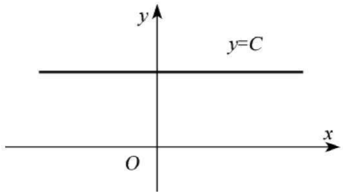
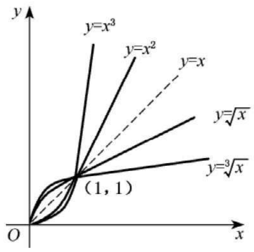
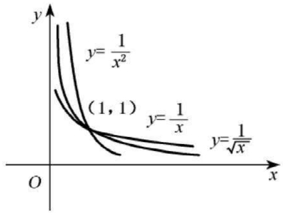
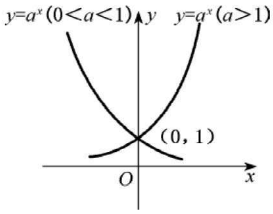
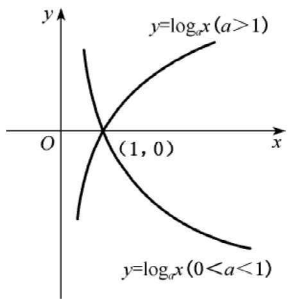
图 1-10

1.1.5 初等函数

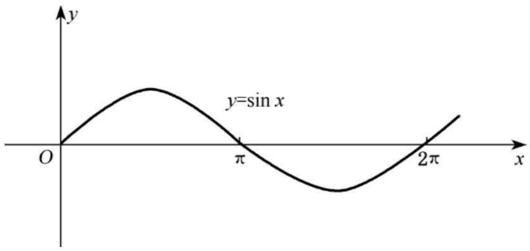
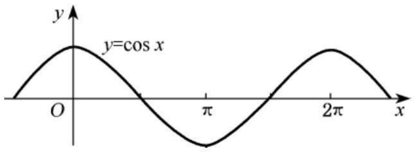
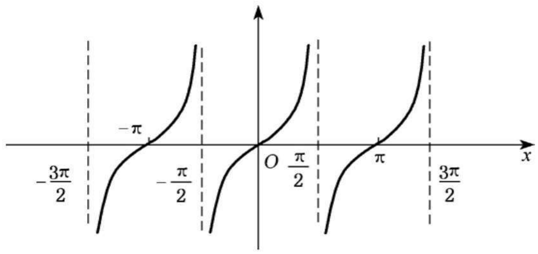
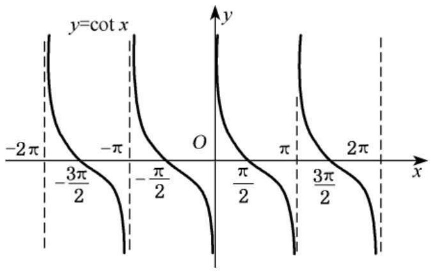
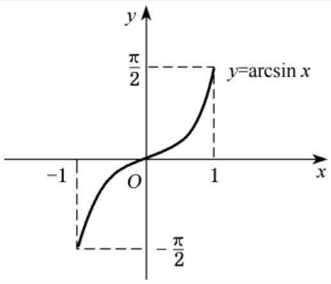
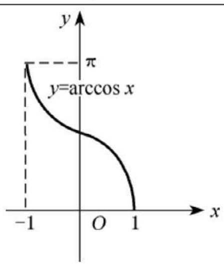
1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数.这些函数在中学阶段已经深入学习过,这里只做简要的复习.基本初等函数的图像及其定义域与值域如表 1-2 所示.其中,幂函数只给出了第一象限的图像,其他象限的图像可根据函数的对称性得到.

表 1-2 基本初等函数的图像及其定义域与值域

函数	图像	定义域与值域
常数函数 $y=C$ (C 为常数)		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=C$
幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)	 	随 α 而不同
指数函数 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$
对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$

续表

函数		图像	定义域与值域
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$
	余弦函数 $y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$
	正切函数 $y=\tan x$		$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$
	余切函数 $y=\cot x$		$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com