随机过程通论

王梓坤 著

上卷

北京师范大学出版社

随机过程通论

上卷

王梓坤

北京师范大学出版社

随机过程通论

下　卷

王梓坤

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程通论/王梓坤著. —北京:北京师范大学出版社,1996.3
ISBN 7-303-03631-8

Ⅰ. 随… Ⅱ. 王… Ⅲ. 随机过程-概论 Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第01744号

北京师范大学出版社出版发行
(邮编 100875 北京新街口外大街19号)
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:39.75 字数:1018千
1996年5月第1版 1996年5月第1次印刷
印数:27 001—28 500册
ISBN 7-303-03631-8/O·182 定价:50.00元
(上、下卷)

内 容 提 要

本书分上下两卷，上卷介绍随机过程的一般理论、平稳过程。前九章附有习题与解答（或提示），下卷叙述布朗运动与位势理论的关系、马尔科夫链与生灭过程，包括基本理论和国内一些科研成果。以完整的书的形式系统地论述生灭过程及其概率构造，本书也许是第一部。书末附录 2 综述了超过程，它是当今国际上最新的研究课题之一。

上、下两卷基本上是独立的，阅读下卷时不必通读上卷。

读者对象为高等院校和研究单位的大学生、研究生、老师和科研人员。

上卷再版前言

本卷初版于 1965 年， 1978 年重印. 尽管随机过程理论发展非常迅速，这里所叙述的关于马尔科夫过程与平稳过程的理论仍是很重要的，它们至今仍是每位研究概率论者不可不知的基本理论. 在这一版中，改正了一些错误.

初版后承一些著名大学用作教本或参考书，热心的读者曾多次赐教，他们的重要意见已吸收在新版中，作者谨对他们表示衷心的谢忱.

作者还衷心地感激韩丽娟、洪良辰、廖昭懋、蒋铎、洪吉昌等各位教授，他们关心本书的再版，并给于了许多帮助。

各章之末附有参考文献，卷末有参考书目.

§1.2 表示第 1 章第 2 节， §3 则表示本章内第 3 节.

王梓坤　1995.8.10

上卷序

本卷的目的是叙述随机过程论 (简称过程论) 的基本理论. 要达到此目标, 不可避免地会碰到两个问题: 什么是过程论的基本理论? 怎样才能把它叙述得谨严而又易懂? 前者是选材问题; 后者涉及叙述的方式.

原来, 过程论虽是一门年轻的数学学科, 它的蓬勃发展不过是近三十年左右的事; 但由于实际需要的推动和数学工作者的努力, 这门学科已经具有非常丰富的内容. 诸子百家, 巧立门户, 早已形成群峰竞秀, 万水争流的局面. 因此, 要在一本篇幅不大的书里, 比较直接而又详细地叙述它的核心部分, 必须认真选材, 才有可能不浪费或少浪费读者的精力. 幸好 1961 年我国部分概率论工作者曾交换意见, 认为概率论的基本理论中, 至少应该包括极限理论, 平稳过程和马尔科夫过程三方面. 这给作者以很大的启发. 遵照这一意见, 本卷主要由三部分组成: 随机过程的一般理论, 马尔科夫过程和平稳过程 (极限理论不在本书范围内). 在这三部分的具体取材中, 作者参考了 Колмогоров, Добрушин, Дынкин, Doob, Loève 和伊藤清等人的著作, 并包含了作者本人的若干结果. 特别是江泽培教授的平稳过程讲义, 给了作者很大的启发与帮助, 谨此深表谢意.

迄今叙述过程论的方式主要有两种: 一是理论性的, 严谨而系统, 但不证明的细节太多, 以致初学时发生不少困难; 另一种是实用性的, 关于应用方面的材料很丰富, 涉及面广, 但作为数学基本理论, 却似乎不很适当. 本书的任务要求采用第一种方式, 为了便于初学, 作者力求把选定的内容写细. 我们希望, 即使在没有外援的自学条件下, 也有可能坚持到底. 除最后一章外, 各章末备有习题, 它们都不太难, 而且几乎每题都附有提示或解答, 这些习题对加深理解无疑是有益处的. 此外, 在各章末的附记中, 简短地指出了作者所知的进一步值得注意的问题与参考文献, 这当然是十分浅薄和挂一漏万的.

基于上述想法, 我们力求在全书中贯彻选材精炼而叙述详细的原则.

上卷共十章, 可把它们分成三个单元: 一、三章主要讲过程的一般理论; 二、四、五、六、十章讲马尔科夫过程; 七、八、九章讲 (弱) 平稳过程. 后二单元基本上是彼此独立的. 书末附篇中收集了要用到的测度论知识, 读者最好先看一下, 以便了解正文中的符号.

上卷底稿在南开大学部分地讲授过, 作者衷心感谢听众所提出的许多宝贵意见. 吴荣教授详细阅读了底稿, 并提出了许多改进建议; 来新三先生校对了文字; 胡国定教授对本书的写作始终关心和鼓励. 作者谨对以上诸位敬致谢意; 同时还感谢审校者的大力协助.

由于作者学识浅薄, 尽管竭力而为, 错误缺点, 仍然难免, 敬请随时指教, 以便改进.

1963 年 1 月

下卷序

本卷的目的在于叙述布朗运动与位势、生灭过程与马尔科夫链 (Birth-death Processes and Markov Chains) 的基本理论，并介绍近年来的一些研究进展. 所谓马尔科夫链是指时间连续，状态可列，时齐的马尔科夫过程. 这种链之所以重要，一是由于它的理论比较完整深入，可以作为一般马尔科夫过程及其它随机过程的借鉴，二是它在自然科学和许多实际问题 (例如物理，生物，化学，规划论，排队论等) 中有着越来越多的应用.

生灭过程是一种特殊的马尔科夫链，虽然有关的资料已相当丰富，但迄今国内外似乎还没有一本系统的专著来阐述它们. 一些著名的学者如 D. G. Kendall, G. E. H. Reuter, W. Feller, 特别是 S. Karlin, J. McGregor 等人，在这方面做过许多深入而重要的研究，他们用的大都是分析数学的方法，作者深愧未能遍尝百味之鲜. 我们用的主要是概率方法，即从考察运动的轨道出发，提取直观形象，然后辅以数学计算和测度论的严格证明. 此法的优点是概率意义比较清楚，但可能失之于冗长.

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔科夫过程（简称马氏过程）与位势理论（简称势论）之间的深刻联系。这一发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义，同时也使马氏过程有了新的分析工具，因而两者相互促进，丰富了彼此的内容. 本书试图通过比较简单的马氏过程，即布朗运动，以及与它相对应的古典位势（牛顿位势与对数位势），来对一般理论作一前导.

第十一、十二章讨论布朗运动与古典位势. 第十三、十四章讨论马尔科夫链的分析性质与轨道行为，第十五章讲一些专题，第十六、十七章讲生灭过程；这后三章基本上是国内近年来的一些研究成果. 详见下卷关于各节内容的历史的注.

前两章承科学出版社于 1983 年出版发行单行本，生灭过程与马尔科夫链也曾由科学出版社于 1980 年出版. 后由作者与杨向群教授合作，扩充了内容，由 Springer-Verlag 与 Science Press 出版了英文本，书名仍为《 Birth and Death Processes and Markov Chains 》，1992.

超过程是当今国际概率界关注的一个新的发展方向. 附录 2 是关于超过程的一篇综合报告，它是钱敏平教授建议作者写作的.

作者衷心感谢吴荣、杨向群、刘文、杨振明、钱敏平等教授，他们仔细阅读了底稿并提出了许多改进意见.

1995 年 8 月 15 日

目　录

上卷　随机过程的一般理论

第一章　随机过程的基本概念 1

§1.1. 随机过程的定义 1

§1.2. 正态随机过程 14

§1.3. 条件概率与条件数学期望 22

§1.4. 半鞅序列 26

§1.5. 补充与习题 35

第二章　可列马尔科夫链 39

§2.1. 基本性质 39

§2.2. 闭集与状态的分类 44

§2.3. 相空间的分解 51

§2.4. 遍历定理 55

§2.5. 平稳马尔科夫链 58

§2.6. 多重马尔科夫链 61

§2.7. 补充与习题 63

第三章　随机过程的一般理论 68

§3.1. 随机过程的可分性 68

§3.2. 样本函数的性质 73

§3.3. 随机过程的可测性 78

§3.4. Wiener 过程、 Poisson 过程与半鞅 82

§3.5. 补充与习题 90

第四章　马尔科夫过程的一般理论 93

§4.1. 马尔科夫性 93

§4.2. 转移函数；强马尔科夫性 99

§4.3. 马氏过程与半群理论 112

§4.4. 马氏过程与半群理论 (续) 124

§4.5. 补充与习题 131

第五章　连续型马尔科夫过程 139

§5.1. 右连续 Feller 过程的广无穷小算子 139

§5.2. 一维连续 Feller 过程 146

§5.3. 样本函数的连续性条件 157

§5.4. 补充与习题 165

第六章　间断型马尔科夫过程 166

§6.1. 转移概率的可微性 166
§6.2. 样本函数的性质；最小解 177
§6.3. 补充与习题 184
第七章　平稳过程 187
§7.1. 平稳过程与保测变换 187
§7.2. 大数定理与遍历性 197
§7.3. 连续参数情形 209
§7.4. 补充与习题 213
第八章　弱平稳过程的一般理论 218
§8.1. 基本概念 218
§8.2. 正交测度与对它的积分 223
§8.3. 弱平稳过程的谱展式； Karhunen 定理 233
§8.4. 对弱平稳过程的线性运算；微分与差分方程 242
§8.5. 大数定理；相关函数与谱函数的估计 250
§8.6. 补充与习题 257
第九章　弱平稳过程中的几个问题 262
§9.1. 作为酉算子群的弱平稳过程 262
§9.2. 弱平稳序列的 Wold 分解与线性预测 268
§9.3. 平稳正态过程 278
§9.4. 补充与习题 283
第十章　随机微分方程与马尔科夫过程 285
§10.1. 对 Wiener 过程的随机积分 285
§10.2. 随机微分 292
§10.3. 随机微分方程的马尔科夫过程解 298
附篇　测度论的基本知识 308
参考书目 328
上卷名词索引 330

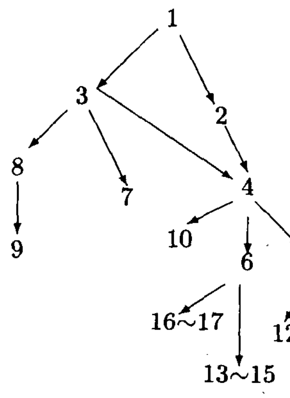
下卷　布朗运动、生灭过程与马尔科夫链

第十一章　高维布朗运动与牛顿位势 333
§11.1. 势论大意 333
§11.2. 布朗运动略述 338
§11.3. 首中时与首中点 344
§11.4. 调和函数 350
§11.5. Dirichlet 问题 355
§11.6. 禁止概率与常返集 360
§11.7. 测度的势与 Balayage 问题 364

§11.8. 平衡测度 368
§11.9. 容度 373
§11.10. 暂留集的平衡测度 376
§11.11. 极集 381
§11.12. 末遇分布 384
§11.13. 格林 (Green) 函数 390
第十二章　二维布朗运动与对数位势 396
§12.1. 对数位势的基本公式 396
§12.2. 平面 Green 函数 402
§12.3. 对数势 404
§12.4. 平面上的容度 407
§12.5. 补充 412
第十三章　马尔科夫链的解析理论 414
§13.1. 可测转移矩阵的一般性质 414
§13.2. 标准转移矩阵的可微性 424
§13.3. 向前与向后微分方程组 438
第十四章　样本函数的性质 448
§14.1. 常值集与常值区间 448
§14.2. 右下半连续性；典范链 453
§14.3. 强马尔科夫性 458
第十五章　马尔科夫链中的几个问题 468
§15.1. 0-1 律 468
§15.2. 常返性与过份函数 475
§15.3. 积分型随机泛函的分布 481
§15.4. 嵌入问题 490
第十六章　生灭过程的基本理论 497
§16.1. 数字特征的概率意义 497
§16.2. 向上的积分型随机泛函 503
§16.3. 最初到达时间与逗留时间 515
§16.4. 向下的积分型随机泛函 522
§16.5. 几类 Колмогоров 方程的解与平稳分布 529
§16.6. 生灭过程的若干应用 538
第十七章　生灭过程的构造理论 542
§17.1. Doob 过程的变换 542
§17.2. 连续流入不可能的充要条件 548
§17.3. 一般 Q 过程变换为 Doob 过程 551
§17.4. $S<\infty$ 时 Q 过程的构造 555
§17.5. 特征数列与生灭过程的分类 563
§17.6. 基本定理 571
§17.7. $S=\infty$ 时 Q 过程的另一种构造 574

§17.8. 遍历性与 0-1 律 577
附录 1 时间离散的马尔科夫链的过份函数 580
§1. 势与过份函数 580
§2. 过份函数的极限定理 588
附录 2 超过程的若干新进展 598
下卷各节内容的历史的注 612
参考文献 613
下卷名词索引 618

各章间关系图



上卷　随机过程的一般理论

第一章　随机过程的基本概念

§1.1　随机过程的定义

(一)　象许多其它数学学科一样，概率论需要自己的公理结构．我们采用 A. H. Колмогоров 于 1933 年所引进的公理系统，它使概率论建立在测度论的基础上，因而有可能充分利用测度论中的结果和工具．虽然如此，从历史上看，概率论的产生远在一般的测度理论建立以前，它有专门的术语和偏重的问题．为了保留这些术语的直观意义，我们自然应该沿用概率论中的名词．

有关测度论的预备知识都收集在附篇中．

测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 如果满足条件 $P(\Omega)=1$, 就称为 **概率空间**. 本书中，为了避免许多繁琐的关于零测集的子集的说明，总设 P 为 **完全的概率测度**. 概率论中，称 Ω 中的点 ω 为 **基本事件**,Ω 为 **基本事件空间**,$\mathcal{F}$ 中的集 A 为 **事件**, 称 $P(A)$ 为 **A的概率**. 定义在 Ω 上取实数值的 $\mathcal{F}$ 可测函数 $x(\omega)$ 称为 **随机变量**,ω 的复数值函数 $\xi(\omega)$, $\xi(\omega)=y(\omega)+iz(\omega)$, 如果它的实部 $y(\omega)$ 和虚部 $z(\omega)$ 都是随机变量，就称为 **复随机变量**. 以后如果同时研究多个随机变量，除非特别声明，我们总设它们定义在同一个概率空间上．

对随机变量 $x(\omega)$, 函数

$$F(\lambda)=P(x(\omega)\leqslant\lambda) \tag{1}$$

称为 **$x(\omega)$的分布函数**, 它对一切 $\lambda\in R_1$ 有定义，而且是 λ 的不下降右连续函数，满足条件

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=1 \tag{2}$$

(右连续性及 (2) 由测度的连续性公理推出). 因此，$F(\lambda)$ 具备一维分布函数的一切性质，从而它在 $\mathcal{B}_{1,F}$ 上产生一个 **概率分布** [1]，后者定义为 $F(\lambda)$ 所产生的 Lebesgue–Stieltjes 测度，即测度

$$\int_A dF(\lambda),\quad A\in\mathcal{B}_{1,F}. \tag{3}$$

这测度在 $\mathcal{B}_1$ 上的限制叫做 **$x(\omega)$的分布**.

对于任何一个一维分布函数 F(以后 “一维” 二字省去), 如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f, 使

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\,d\mu\quad(\lambda\in R_1) \tag{4}$$

就称 f 为 **F的分布密度**, 或者说，F 有分布密度为 f.

[1] 记号 $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_{1,F}$ 等的意义见附篇 (二) 段.

今设有 n 个随机变量 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$, 它们构成一个 n 维随机矢量

$$X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)). \tag{5}$$

n 元函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_1(\omega)\leqslant\lambda_1,\cdots,x_n(\omega)\leqslant\lambda_n) \tag{6}$$

是一 n 维分布函数 [附篇中 (4) 式的满足是由于它左方的值等于 $P(\lambda_j<x_j(\omega)\leqslant\mu_j,\ j=1,\cdots,n)\geqslant 0$], 称为 $X(\omega)$ **的联合分布函数**. 它在 $\mathcal{B}_{n,F}$ 上产生一个概率分布，后者定义为 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，即测度

$$\int\cdots\int_A F(d\lambda_1,\cdots,d\lambda_n),\quad A\in\mathcal{B}_{n,F}. \tag{7}$$

这测度在 $\mathcal{B}_n$ 上的限制叫做 $X(\omega)$ 的分布.

对于任一 n 维分布函数 F, 如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f, 使

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}f(\mu_1,\cdots,\mu_n)\,d\mu_1\cdots d\mu_n \tag{8}$$

对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$ 成立，就称 f 为 F **的分布密度**, 或者说， F 有分布密度为 f.

n 维随机矢量的一般化是随机过程. 设 $T\subset R_1$ 是已给的实数集，有穷或无穷，可列或不可列均可. 设 T 中每一元 t 对应于一随机变量 $x_t(\omega)$, 就称随机变量族 $x_t(\omega)$ $(t\in T)$ 为一随机过程 [1]. 与 (5) 类似，记此过程 (随机过程的简称) 为

$$X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}, \tag{9}$$

$x_t(\omega)$ 有时也写为 $x(t,\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t.

对任意 n 个值 $t_1,\cdots,t_n\in T$, 考虑 $x_{t_1},\cdots,x_{t_n}$ 的联合分布函数

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_{t_1}\leqslant\lambda_1,\cdots,x_{t_n}\leqslant\lambda_n), \tag{10}$$

当 n 在正整数集及 t_i 在 T 中变动时 $(1\leqslant i\leqslant n)$, 得到一族分布函数

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ \ n>0,\ t_i\in T\}, \tag{11}$$

称 F 为过程 $X(\omega)$**的有穷维分布函数族**.

与附篇中 (10),(11) 二式的证明完全一样 (只要在那里的证明中, 以 x_t, x_{t_i} 代替 $\lambda(t),\lambda(t_i)$), 可见 F 满足相容性条件，根据附篇定理 4, F 在 $\mathcal{B}_{T,F}$ 上产生一概率分布 P_F, 简记 P_F 为 F. 它在 $\mathcal{B}_T$ 上的限制叫 **过程** $X(\omega)$ **的分布**. 今证对任意 $A\in\mathcal{B}_T$, 有

$$F(A)=P(X(\omega)\in A).$$

实际上，使上式成立的全体 $A\in\mathcal{B}_T$ 构成 R_T 中的 λ- 系 Λ. 由 (10), Λ 包含全体形如 $(\lambda(t):\lambda(t_j)\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n)$ 的集；既然全体这种集构成 R_T 中的 π- 系 Π, 由附篇引理 3, 可见 $\Lambda\supset\mathcal{F}\{\Pi\}=\mathcal{B}_T$.

---

[1]以 Y 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量全体. 可以把随机过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 看成为定义在 T 上而取值于 Y 中的抽象函数；或者视为自 T 到 Y 中的映象.

在上述随机过程的定义中，我们假定了 T 是某实数集，它可解释为时间的集；其次，还假定了 $x_t(\omega)$ 的值为实数 (或复数) 其实从数学理论上看来，没有必要一定要这样做. 例如，T 也可以取为平面上的点集，而 $x_t(\omega)$ 可取值于任意可测空间 $(E,\mathcal{B})$，其中 $\mathcal{B}$ 为抽象点 e 的集 E 中某指定的 σ 代数. 这时，随机变量的定义应如下推广. 称 $x(\omega)$ 为 **取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机变量**，如对任意 $B\in\mathcal{B}$，ω 集 $(x(\omega)\in B)\in\mathcal{F}$. 显然，当 $(E,\mathcal{B})$ 为 $(R_1,\mathcal{B}_1)$ 时，这定义化归以前的定义. 如对已给集 T 中任一点 t，有一取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机变量 $x_t(\omega)$ 与之对应，就称 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为 **取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机过程**；或简称 **随机过程**(如 $(E,\mathcal{B})$ 已明确固定). 因此，对随机过程 $X(\omega)$，$x_t(\omega)$ 是 $\omega\in\Omega$，$t\in T$ 的二元函数；当 $t\in T$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是随机变量；而当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是定义于 T 上而取值于 E 的函数，称为 (对应于 ω 的)**样本函数**.$(E,\mathcal{B})$ 称为 **相空间**.

然而以后如无特别声明，总设 t 及 $x_t(\omega)$ 都取实数值.

随着 T 及 E 是可列集[1] 或非可列集，可将随机过程分为四类：E,T 均可列；均不可列；E 可列 T 不可列；T 可列 E 不可列. 这是形式上的分类. 另一种分类是根据过程内在的概率法则进行的，于是得到以后要专门讲述的各种过程，例如半鞅、正态过程、马氏过程、平稳过程等等，这留待将来细讲. 事实上大多是把两种分类结合起来，研究时比较方便. 因而，譬如说，马尔科夫过程中又分 E,T 均可列；均不可列等等四种 (但对正态过程，E 可列无意义).

作为一例，试引进独立随机过程的观念.

称 **随机变量族 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为独立的**，如对任意有穷多个不同的 t_i，$t_i\in T$，任意 $B_i\in\mathcal{B}$，$i=1,\cdots,n$，有

$$P(x_{t_i}(\omega)\in B_i,i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\in B_i). \tag{12}$$

如果 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 独立，称 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为 **具有独立随机变量族的随机过程**，或简称为 **独立随机过程**.

更一般地，设对每个 $\lambda\in\Lambda$，$\Lambda\subset R_1$，存在一随机过程 $X_\lambda(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T_\lambda\}$. 考虑乘积空间 E^{T_λ} 中的乘积 σ 代数 $\mathcal{B}^{T_\lambda}$. 说 **随机过程族** $X_\lambda(\omega)$，$\lambda\in\Lambda$ **是独立的**，如对任意有穷多个不同的 λ_i，$\lambda_i\in\Lambda$，任意 $B_{\lambda_i}\in\mathcal{B}^{T_{\lambda_i}}$，$i=1,\cdots,n$，有

$$P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i},\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i}).$$

注意，一随机矢量可看成为一随机过程，故上定义中也蕴含着随机矢量族的独立性定义.

以下设 $(E,\mathcal{B})=(R_1,\mathcal{B}_1)$. 条件 (12) 等价于：对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$，有

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i), \tag{12_1}$$

这可记成

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{t_i}(\lambda_i). \tag{12_2}$$

[1]为方便计，有穷集 (即只含有穷多个元的集) 也算可列集.

现在设 $T=(1,\cdots,n)$ 而考虑具有独立分量的随机矢量 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$, 因而它的分布函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(\lambda_i).$$

令 $S_n(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\omega)$. 试证

引理 1 对任意 $\lambda_j\in R_1$, $j=1,\cdots,n-1$, $\lambda\in R_1$, 有

$$\begin{aligned}&P(x_j(\omega)\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n-1;\ S_n(\omega)\leqslant\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{\lambda_1}F_1(d\xi_1)\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_{n-1}}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\end{aligned}\tag{13}$$

证 令 $A\subset R_n$ 为如下的 n 维点集

$$A=\left((\xi_1,\cdots,\xi_n):\ \xi_j\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n-1;\ \sum_{j=1}^{n}\xi_j\leqslant\lambda\right),$$

又以 W 表 (13) 左方括号中的 ω 集. 由积分变换定理及独立性假设, (13) 左方值等于

$$P(W)=\int_W 1\,P(d\omega)=\int\cdots\int_A F(d\xi_1,\cdots,d\xi_n)=\int\cdots\int_A F_1(d\xi_1)\cdots F_n(d\xi_n),$$

计算此式最后的 n 重积分, 即得 (13) 中右方的数值. □

作为 (13) 的特殊情形是

$$P(S_n(\omega)\leqslant\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(d\xi_1)\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\tag{13_1}$$

(二) 下述定理在理论上具有重要的意义, 它肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在.

定理 1 (存在定理) 设已给参数集 T 及满足相容性条件的有穷维分布函数族

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ \ n>0,\ t_i\in T\},$$

则必存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及定义于其上的随机过程 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$, 使 $X(\omega)$ 的有穷维分布函数族与 F 相重合.

证 令 $\Omega=R_T$; $\omega=\lambda(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 表定义在 T 上的实值函数 $\lambda(t)$, $t\in T$; $\mathcal{F}=\mathcal{B}_T$.

P 为 F 所产生的 $\mathcal{B}_T$ 上的概率测度, 即 $P=P_F$(见附篇定理 4), 因而对 n 维柱集 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$, 有

$$P(C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n))=F_{t_1,\cdots,t_n}(B_n).\tag{14}$$

于是得到概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 即 $(R_T,\mathcal{B}_T,P_F)$. 在此空间上, 对每固定的 $t\in T$, 定义一 ω 的函数

$$x_t(\omega)=\lambda(t),\quad 如\ \omega=\lambda(\cdot),$$

换句话说，$x_t(\omega)$ 是 R_T 上的 t 坐标函数，亦即 x_t 在 $\omega=\lambda(\cdot)$ 上的值，等于 $\lambda(\cdot)$ 在点 t 上的值 $\lambda(t)$. 由定义并采用附篇 (6) 式中的记号 W_n 即得

$$(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=W_n\in\mathcal{B}_T,$$

故 $X(\omega)=\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 是随机过程；由 (14)

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=P(W_n)=F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

这表示 $X(\omega)$ 的有穷维分布函数族与 F 重合. □

上述定理肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在性，然而这种过程及概率空间一般不唯一而有多种造法. 定理 1 证明中所造出的空间及过程称为**标准的**.

为了说明造法不唯一，试述两种典型方法：联合与清洗概率空间. 利用这些方法，可以造出无穷多个具有上述性质的过程. 不仅如此，这些方法还有其它广泛的用途.

引理 2 (空间的联合) 设 $X(\omega_1)=\{x_t(\omega_1),\ t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1)$ 上的随机过程，$(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_2)$ 为另一概率空间，$\Omega_i=(\omega_i),\ i=1,2$. 令

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2,\ P=P_1\times P_2, \tag{15}$$

$$y_t(\omega)=x_t(\omega_1),\ \text{如}\,\omega=(\omega_1,\omega_2), \tag{16}$$

则 $Y(\omega)=\{y_t(\omega),\ t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，而且 $X(\omega_1)$ 与 $Y(\omega)$ 有相同的有穷维分布函数族.

证 因为

$$(\omega:\ y_t(\omega)\leqslant\lambda)=(\omega=(\omega_1,\omega_2):\ x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)=(\omega_1:\ x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)\times\Omega_2\in\mathcal{F},$$

故 $Y(\omega)$ 是随机过程；第二结论则由于

$$\begin{aligned}&P(\omega:\ y_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)\\&=P_1(\omega_1:\ x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)\times P_2(\Omega_2)\\&=P_1(\omega_1:\ x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n).\ \square\end{aligned}$$

如果说空间的联合是为了解决原有空间太小的困难，那么空间的清洗便可免除由于空间太大而引起的麻烦. 有些基本事件空间过大，其中包含了许多不必要的点，此时自然想把它们清洗出去.

引理 3 (空间的清洗) 设对概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ 是外测度为 1 的集[1]，则 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 也是概率空间，其中

$$\widetilde{\mathcal{F}}=\widetilde{\Omega}\mathcal{F},\ \ \text{即}\,\widetilde{\mathcal{F}}=(B)\ (B=\widetilde{\Omega}A,\ A\in\mathcal{F}), \tag{17}$$

$$\widetilde{P}(B)=P(A); \tag{18}$$

又如 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，则 $\widetilde{X}(\omega)=\{\widetilde{x}_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 上的随机过程，而且 $X(\omega)$ 与 $\widetilde{X}(\omega)$ 有相同的有穷维分布函数族，这里 $\widetilde{x}_t(\omega)=x_t(\omega),\ \omega\in\widetilde{\Omega}$.

[1]即指 $\widetilde{\Omega}$ 具有性质：如 $C\in\mathcal{F}$, $\widetilde{\Omega}\subset C$, 则 $P(C)=1$.