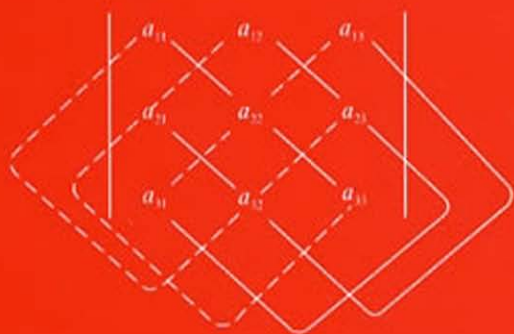
新编高等院校公共基础课系列规划教材

# 线性代数与概率统计 2

Xianxing Daishu Yu Gailü Tongji

林益　赵一男　叶年斌　主编



华中科技大学出版社

新编高等院校公共基础课系列规划教材

# 线性代数与概率统计

(第2版)

主　编　林　益　赵一男　叶年斌
参　编　王济华　何　涛　叶提芳　龙　松

华中科技大学出版社
中国·武汉

## 内 容 简 介

本书内容包括3篇,分别是线性代数、概率论与数理统计、积分变换.第1篇包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组等内容;第2篇包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、参数估计和假设检验等内容;第3篇包括拉普拉斯变换和傅里叶变换.带“* ”的章节,供不同专业选学.每节后配有习题,并在书后附有习题答案.

本书适用于理工类或经管类的大专学生,也可供对数学要求不高的理工类或经管类本科生使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与概率统计(第2版)/林　益　赵一男　叶年斌　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5609-4718-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①林…　②赵…　③叶…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　②概率论-高等学校-教材　③数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2　②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第102155号

**线性代数与概率统计(第2版)**　　林　益　赵一男　叶年斌　主编

责任编辑:史永霞
封面设计:杨　玲
责任校对:李　琴
责任监印:张正林
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)81321915
录　　排:武汉市兴明图文有限公司
印　　刷:武汉市籍缘印刷厂
开　　本:787mm×960mm　1/16
印　　张:12.75
字　　数:279千字
版　　次:2012年8月第2版第4次印刷
定　　价:23.00元

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118　竭诚为您服务

# 编委会成员名单

(按拼音排序)

# 第 2 版前言

本书自出版以来得到了广大读者的肯定,也得到了同行专家的热心指导. 为提高教材的质量,我们进行了修订. 本次主要修订以下内容:

(1) 更换了一些例题,使之更适应学生的实际与应用型人才培养的要求;

(2) 增加或删除了一些习题.

本书由林益(华中科技大学文华学院)、赵一男(中国地质大学江城学院)、叶年斌(武昌工学院)主编,王济华(华中科技大学文华学院)、何涛(华中科技大学)、叶提芳(武昌工学院)、龙松(华中科技大学武昌分校)参编.

编　者

2012 年 6 月

# 目　　录

## 第 1 篇　线 性 代 数

# 第2篇　概率论与数理统计

## 第 3 篇 积 分 变 换

# 第1篇　线性代数

线性代数是从线性方程组论、行列式论和矩阵论中产生并形成的一门数学分支，是学习现代科学技术的重要理论基础，在自然科学和工程技术等领域中有着广泛的应用. 在计算机技术飞速发展的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出. 本篇将介绍线性代数中最基本的内容：行列式、矩阵和线性方程组.

# 第 1 章　行　列　式

行列式是由研究线性方程组而产生的，它是线性代数中的一个基本工具，在讨论许多问题时都要用到它. 本章主要介绍行列式的概念、性质及计算方法，此外还要介绍利用克莱姆法则求解线性方程组.

## 1.1　行列式的概念

### 1.1.1　二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

为消去未知数 $x_2$，用 $a_{22}$ 与 $a_{12}$ 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去 $x_1$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1-1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式(1-2)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得到的. 其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1-1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1-1)中的位置，排成二行二列(横排称**行**，竖排称**列**)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1-3)所确定的**二阶行列式**，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-4)的**元素**. 元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 称为**行标**，表明该元素位于第 $i$ 行，第二个下标 $j$ 称为列标，表明该元素位于第 $j$ 列.

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆. 如图 1-1 所示，把 $a_{11}$ 到 $a_{22}$ 的实连线称为**主对角线**，$a_{12}$ 到 $a_{21}$ 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两

元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

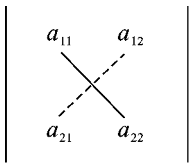


图 1-1

利用二阶行列式的概念,式(1-2)中 $x_1$、$x_2$ 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么,式(1-2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

**注意**　这里的分母 $D$ 是由方程组(1-1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1$、$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}$、$a_{21}$所得的二阶行列式,$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1$、$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}$、$a_{22}$所得的二阶行列式.

**例 1**　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

**解**　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

## 1.1.2　三阶行列式

**定义**　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1-6}$$

式(1-6)称为数表(1-5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明：三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积冠以正负号而成. 其规律遵循图 1-2 所示的对角线法则：图中的三条实线看做是平行于主对角线的连线，三条虚线看做是平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号.

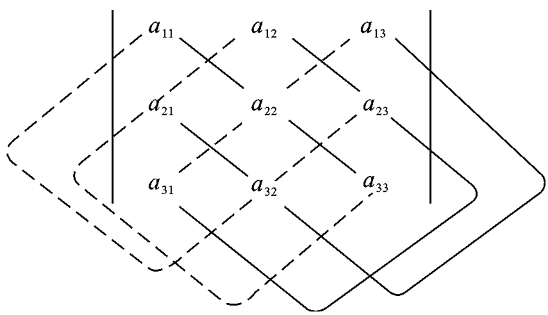



图 1-2

**例 2** 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

**解** 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4 - 1\times 1\times 4 \\ &\quad - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times 2\times(-3) \\ &= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24 \\ &= -14. \end{aligned}$$

**例 3** 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**解** 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 \\ &= x^2 - 5x + 6, \end{aligned}$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得

$$x=2 \quad 或 \quad x=3.$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍**代数余子式**的知识,然后引出 $n$ 阶行列式的概念.

## 1.1.3 余子式、代数余子式

在三阶行列式中,划去 $a_{ij}$ 所在的行和列的元素,余下的元素按原顺序构成的一个二阶行列式,称为 $a_{ij}$ 的**余式子**,记为 $M_{ij}$.

例如, $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$,

$M_{11}$,$M_{12}$,$M_{13}$分别为 $a_{11}$,$a_{12}$,$a_{13}$的余子式.

令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,3)$,称 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的**代数余子式**.如:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12},$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13},$$

$A_{11}$,$A_{12}$,$A_{13}$分别为 $a_{11}$,$a_{12}$,$a_{13}$的代数余子式.

下面不加证明地给出一个重要定理.

**定理 1** 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则.

于是,三阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}(i=1,2,3)$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}(j=1,2,3).$$

例如,$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$按第 2 行展开,有

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3,$$

故

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=4\times 7+(-1)\times(-5)+2\times(-3)=27.$$

## 1.1.4　$n$ 阶行列式

**定义 1**　设有 $n^2$ 个数，排成 $n$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1-7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{1-8}$$

其中，$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式($j=1,2,\cdots,n$)，式(1-8)称为数表(1-7)所确定的 $n$ **阶行列式**.

**注意**　(1)定义式(1-8)也称为按任一行($i=1,2,\cdots,n$)展开的行列式定义，仿其也可给出按任一列($j=1,2,\cdots,n$)展开的行列式定义，并可证明，两者所定义的行列式有相同的值.

(2)行列式还有其他的定义方法，读者可阅读其他相关资料.

**例 4**　用定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

**解**　由三阶行列式的定义，按第 1 行展开，得

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 28.$$

## 习　题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 3x & 2x-2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

2. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 的余子式和代数余子式.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$，写出 $D$ 按第 3 行的展开式，并求 $D$ 的值.

4. 已知四阶行列式 $D$ 中第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们对应的余子式依次为 $5,3,-7,4$，求 $D$.

## 1.2　行列式的性质

按照定义，计算 $n$ 阶行列式需要计算 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式，对高阶的行列式计算量较大、较麻烦. 为了简化行列式的计算，下面不加证明地给出行列式的基本性质，利用这些性质可以达到简化计算的目的.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 $D$ 的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 $D^{\mathrm{T}}$ 为 $D$ 的**转置行列式**. 显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

**性质 1**　行列式与它的转置行列式相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

例如，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位，因而凡是对行具有的性质，对列也一样具有，反之亦然.

**性质 2**　若行列式的第 $i$ 行（列）的每一个元素都可表示为两数之和，即

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

则行列式可表示成两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

或者说：若两个行列式中除第 $i$ 行之外，其余 $n-1$ 行对应相同，则两个行列式之和只对第 $i$ 行对应元素相加，其余保持不变.

例如，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**性质 3**　用一个数 $k$ 乘行列式，等于将行列式的某一行（列）元素都乘以 $k$，即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

也可以叙述为：若行列式某行（列）有公因子 $k$，则可把它提到行列式外面.

**性质 4**　若互换行列式的任意两行（列），则行列式变号，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{array}{cl} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array},$$

$$D = -D_1.$$

例如，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

以 $r_i$ 表示行列式的第 $i$ 行，以 $c_i$ 表示第 $i$ 列，交换 $i,j$ 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 $i,j$ 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

**推论 1**　若行列式的两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

**推论 2**　若行列式的两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

**性质 5** 把行列式的第 $j$ 行(列)元素的 $k$ 倍加到第 $i$ 行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{array}{l}\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \cdots & ka_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right|\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

例如, $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**例 1** 计算行列式 $D_1$ 和行列式 $D_2$,其中 $D_1$ 称为**下三角行列式**,$D_2$ 称为**上三角行列式**:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\text{ 满足 } i<j \text{ 时},a_{ij}=0);$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\text{ 满足 } i>j \text{ 时},a_{ij}=0).$$

**解** 对 $D_1$ 按第 1 行展开得

$$D_1=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$D_2=D_2^T=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,**对角行列式**

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\cdots\lambda_n.$$