全国高职高专药品类专业“十二五”规划教材

供高职高专药学类专业及相关医学专业使用

医药数理统计方法

第2版

■ 主编 金 星

第四军医大学出版社

全国高职高专药品类专业“十二五”规划教材
供高职高专药学类专业及相关医学专业使用

医药数理统计方法

第 2 版

主　编　金　星
副主编　范雪峰　徐生刚
编　者　(以姓氏笔画为序)
马艳慧(长春医学高等专科学校)
王孝福(雅安职业技术学院)
师先锋(山西医科大学汾阳学院)
范雪峰(雅安职业技术学院)
金　星(长春医学高等专科学校)
贺　莉(长春工业大学)
徐　伟(沈阳药科大学高职学院)
徐生刚(河西学院医学院)
高淑红(山西医科大学汾阳学院)
魏东红(泉州医学高等专科学校)

第四军医大学出版社·西安

图书在版编目（CIP）数据

医药数理统计方法/金星主编. —2 版. —西安：第四军医大学出版社，2015.7
全国高职高专药品类专业“十二五”规划教材
ISBN 978－7－5662－0780－7

Ⅰ. ①医…　Ⅱ. ①金…　Ⅲ. ①医用数学－数理统计－高等职业教育－教材
Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 145988 号

yiyao shuli tongji fangfa

医药数理统计方法

出版人：富　明　　责任编辑：王　雯　黄　璐

出版发行：第四军医大学出版社
地址：西安市长乐西路 17 号　邮编：710032
电话：029－84776765　　传真：029－84776764
网址：http：//press. fmmu. edu. cn

制版：绝色设计
印刷：西安永惠印务有限公司
版次：2011 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 2 版第 3 次印刷
开本：787×1092　1/16　　印张：11　　字数：245 千字
书号：ISBN 978－7－5662－0780－7/R·1579
定价：25.00 元

全国高职高专药品类专业“十二五”规划教材
建设委员会

再版说明

为适应我国高职高专药品类专业教材建设及改革需要，全面贯彻落实国务院及教育部等相关文件精神，第四军医大学出版社邀请全国50余所院校，于2011年共同编写出版了“全国高职高专药品类专业‘十二五’规划教材”，全套教材共包含18个科目。

2013年，本套教材中的《药物化学》等9种教材入选教育部“十二五”职业教育国家规划选题立项教材。经过所有编写人员的共同努力，上述教材均通过了教育部专家委员会审定，正式被确立为教育部“十二五”职业教育国家规划教材，并于2014年8月出版发行。同年底，我社在深入调研及广泛征集各参编院校意见的基础上，决定对剩余的9种教材进行改版。

本次改版充分考虑教学对象的职业特点，并严格依据“十二五”职业教育国家规划教材的修订要求进行，改版教材具有以下特点：

1. 适应教学改革需求，依然坚持“实用为主，必需、够用为度”的原则，教材的广度、深度和难度符合学生的实际情况和专业、职业需要。

2. 在广泛、深入调研的基础上，总结和汲取了一版教材的编写经验和成果，尤其是对一些不足之处进行了修改和完善，力争实现“求实创新、精益求精、彰显特色”的目标。

3. 依据最新版《中国药典》《国家基本药物目录》《国家非处方药目录》等权威性著作，使药物名称、化学名词、专业术语规范统一，物理量及单位均采用国际单位制和国家标准。

4. 参照了《高等职业学校专业教学标准（试行）》《药品管理法》《国家执业药师资格考试大纲》，确保教材内容与岗位实际有效衔接，满足社会对药学专业学生职业能力的需求。

全套教材于2015年7月正式出版发行。

前　　言

根据全国高职高专药品类专业“十二五”规划教材(第2版)的编写原则与要求,本教材在以下几方面进行修订:

1. 在编写过程中重视对基本概念和基本方法的讲解。对于基础理论本着“实用为主,必需、够用为度”的原则,重结论,略过程,旨在培养学生的运算能力、自学能力以及实际应用能力。

2. 本教材努力实现整体优化,根据课程的内在联系,保留了第一章微积分学的内容,并在例题的引用、习题的排选方面体现高职高专的层次特点和药学类的专业特色。

3. 本教材力求降低学习难度,书中穿插阶段性检测题,书后附有简表和习题答案,便于学生进行学习和自检。

本书虽为药品类专业编写,但也可供预防医学、临床医学、生物学等专业使用。全书内容共安排54学时,也可根据实际教学需要做适当增减。

本书是团队合作的结晶,参加编写的有:金星(第一章),徐生刚、贺莉(第二章),范雪峰、马艳慧(第三章),徐伟、魏东红(第四章),王孝福(第五章),王孝福、高淑红(第六章),师先锋、高淑红(第七章)。本书的编写,得到了第四军医大学出版社和各位编写人员的鼎力支持与帮助,并参考了大量的教材和文献,不能一一列举,在此深表感谢。

由于编写时间和水平有限,疏漏和不妥在所难免,希望各位读者批评指正。

编　者

2015年3月

目　　录

第一章　一元函数微积分学 …… (1)

第一节　导数与微分 …… (1)

第二节　不定积分的概念与性质 …… (6)

第三节　换元积分法 …… (11)

第四节　分部积分法 …… (20)

第五节　定积分的概念与性质 …… (26)

第六节　广义积分 …… (34)

第二章　随机事件与概率 …… (37)

第一节　随机事件及其运算 …… (37)

第二节　事件的概率 …… (43)

第三节　概率的加法公式与乘法公式 …… (48)

第四节　全概率公式和逆概率公式 …… (53)

第三章　随机变量的概率分布与数字特征 …… (59)

第一节　随机变量与离散型随机变量 …… (59)

第二节　连续型随机变量 …… (65)

第三节　正态分布 …… (69)

第四节　数学期望 …… (73)

第五节　方差 …… (77)

第四章　抽样分布 …… (82)

第一节　基本概念 …… (82)

第二节　样本数字特征 …… (84)

第三节　抽样分布 …… (90)

第五章　参数估计 …… (100)

第一节　总体参数的点估计与优良性 …… (100)

第二节　区间估计 …… (102)

实验一　参数估计的 Excel 应用 …… (108)

第六章　假设检验 …… (112)

第一节　假设检验的基本概念 …… (112)

第二节　正态总体的 U 检验和 t 检验 …… (114)

第三节　正态总体的 χ^2 检验和 F 检验 …… (119)

第四节　拟合优度检验和独立性检验 ……………………………………… (122)
实验二　假设检验的 Excel 应用 ……………………………………………… (126)
第七章　方差分析 ………………………………………………………… (133)
第一节　单因素方差分析 …………………………………………………… (133)
第二节　多组均数间的两两比较 …………………………………………… (137)
参考答案 …………………………………………………………………… (142)
参考文献 …………………………………………………………………… (150)
附表 ………………………………………………………………………… (151)

第一章　一元函数微积分学

学习目标

1. 掌握运用公式和法则计算不定积分和定积分以及无穷区间上的广义积分。

2. 熟悉不定积分和定积分的运算性质。

3. 了解导数及微分的定义、几何意义和掌握导数的计算。

4. 了解原函数、不定积分、定积分的概念和定积分的几何意义。

第一节　导数与微分

在生活实际中,我们会经常遇到从数学结构上看形式完全相同的各种各样的变化率,从而有必要从中抽象出一个数学概念来加以研究,这就是导数。

一、导数的定义

设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义,且当自变量在 x_0 点有一增量 Δx($x_0+\Delta x$ 仍在该邻域中)时,函数相应地有增量 Δy,若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在,就称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导。并称该极限为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的导数,记为 $f'(x_0)$,$y'|_{x=x_0}$,$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$。

即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

也称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导或有导数,或导数存在。

二、导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $f'(x_0)$ 就是该曲线在 $x=x_0$ 点处的切线斜率 k,即 $k=f'(x_0)$,或 $f'(x_0)=\tan\alpha$,α 为切线的倾角。从而,得 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$,见图 1-1。

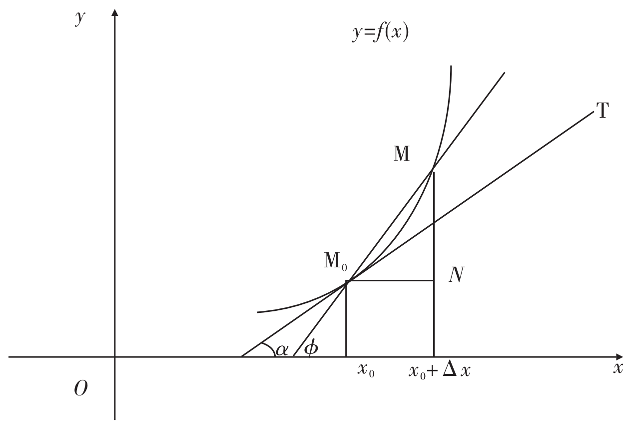

图 1－1 导数的几何意义

三、基本初等函数的导数公式

我们按幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的顺序给出基本导数公式。

1. $(c)' = 0$

2. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ （μ 为任意实数）

3. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5. $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(arccot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

四、基本求导法则

（一）函数和、差、积、商的求导法则

根据导数定义，很容易得到和、差、积、商的求导法则（假定下面出现的函数都是可导的）。

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$[cu(x)]' = cu'(x)$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

例 1 设 $y = \sqrt{x}\cos x + 4\ln x + \sin\dfrac{\pi}{7}$，求 y'。

解　$y' = (\sqrt{x}\cos x)' + (4\ln x)' + (\sin\frac{\pi}{7})'$

$$= (\sqrt{x})'\cos x + \sqrt{x}(\cos x)' + 4(\ln x)'$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x + \frac{4}{x}$$

例 2　求 $y = \tan x$ 的导数。

解　$y' = (\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})'$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x$$

（二）复合函数的求导法则

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导，函数 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

例 3　$y = \ln\sin x$，求$\frac{dy}{dx}$。

解　$\frac{dy}{dx} = (\ln\sin x)'$

$$= \frac{1}{\sin x}(\sin x)'$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot x$$

五、隐函数求导法

我们把形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数，例如 $y = \sin x$。由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的函数称为隐函数，例如，方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 确定的隐函数为 y。把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化。隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的。在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数。因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来。

例 4　设 $y = f(x)$ 是由函数方程 $e^y + xy - e = 0$ 在点(0,1)所确定的隐函数，求 y'。

解　在方程 $e^y + xy - e = 0$ 中把 y 看作 x 的函数，方程两边同时对 x 求导，得

$e^y y' + y + xy' = 0$

所以 $y' = -\dfrac{y}{x+e^y}$

例 4 中的求导方法称为隐函数求导法则。

六、对数求导法

遇到繁分式、无理式等较复杂的函数表达式,求导前可先在表达式两边取对数,并利用对数性质化简,然后按隐函数求导法则来求导,这种求导的方法称为对数求导法。

例 5 求 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ 的导数。

解 两边取对数得

$\ln y=\dfrac{1}{3}[\ln|x|+\ln(x^2+1)-2\ln|x-1|]$

对 x 求导得

$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x-1})$

所以 $y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x-1})$

七、函数的微分

函数的导数 y' 是因变量 y 对于自变量 x 的变化率,但如何计算函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是我们非常关心的。一般说来函数的增量的计算是比较复杂的,我们希望寻求计算函数增量的近似计算方法,这就是函数的微分。

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,$x_0+\Delta x$ 及 x_0 在这区间内,如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小,那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的,而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分,记作 $\mathrm{d}y$,即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$。

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$$

也可记为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$。

例 6 $y=\sin(2x+1)$ 求 $\mathrm{d}y$。

解 因为 $y'=2\cos(2x+1)$

所以 $\mathrm{d}y=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$

Zhi Shi Tuo Zhan

知识拓展

导数的应用

洛必达(L'Hospital)法则

在求极限时,我们经常遇到这样的情形,函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的分子、分母都趋近于零或

ZHI SHI TUO ZHAN

知识拓展

都趋近于无穷大，这时分式的极限可能存在也可能不存在，通常称这两类极限为未定型，分别简记为“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”，这个方法就是著名的洛必达法则。

洛必达法则内容：如果函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

(2) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）均可导，且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大），那么

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

附例 1　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$。

解　当 $x \to 0$ 时，分子 $e^x - 1 \to 0$，分母 $x \to 0$，此极限为“$\frac{0}{0}$”型，由洛必达法则，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

附例 2　求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n \in N)$。

解　当 $x \to +\infty$ 时，分子 $\ln x \to +\infty$，分母 $x^n \to +\infty$，此极限为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，利用洛必达法则，得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{nx^{n1}} = 0$$

附例 3　求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$。

解　当 $x \to +\infty$ 时，分子、分母都趋近于正无穷大，此极限为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，连续使用洛必达法则，得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

洛必达法则还可以用来求“$0 \cdot \infty$”“$\infty - \infty$”“1^∞”“0^0”“∞^0”等未定型的极限。虽然它们不能直接利用洛必达法则求解，但我们可以通过简单的变形把它们化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，然后再用洛必达法则求出极限。

习题 1.1

计算下列函数的导数

1. $x^3 + y^3 = 3axy$

2. $xy = e^{x+y}$

3. $y = x^x$

4. $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}}$

第二节　不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分

在实践中我们经常会遇到与计算函数的导数相反的问题，即已知函数的导数反过来求原来的函数，如：已知变速直线运动物体的瞬时速度 $s'(t) = v(t)$，求物体的运动规律 $s(t)$；又如：已知曲线 $f(x)$ 上点 x 处的切线的斜率为 $f'(x)$，求曲线的方程等。要解决这类问题还需要用到积分学的概念。因其具有的普遍性，所以我们从一般的形式讲起。

定义 1　如果对任一 $x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

例如：对已知函数 $f(x) = 2x$，函数 $F_1(x) = x^2$ 和 $F_2(x) = x^2 + 1$ 均满足 $F'_1(x) = F'_2(x) = 2x = f(x)$，故 $F_1(x) = x^2$ 和 $F_2(x) = x^2 + 1$ 都是 $f(x) = 2x$ 的原函数。因此，一个函数的原函数存在的话，不是唯一的。

那么具备什么条件的函数才有原函数？若一个函数具有原函数，那么有多少个原函数？其结构形式是怎样的？

原函数存在定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上一定有原函数，即存在区间 I 上的可导函数 $F(x)$，使得对任一 $x \in I$，有 $F'(x) = f(x)$。

要求一个函数的全体原函数，只需求出其中的一个，然后再加上一个任意的常数即可。而 $F(x) + C$ 的形式就是不定积分。

定义 2　在区间 I 上，$f(x)$ 的带有任意常数项的原函数 $F(x) + C$，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$。其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量。

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C(C\text{ 为任意常数})$$

在计算的时候，以下几点要注意：① 不定积分不是一个数，也不是一个函数，而是一个函数族；② 在表示不定积分时，积分常数 C 不可丢掉；③ 求 $f(x)$ 的不定积分，即求 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x) + C$，只需求出其中的一个原函数 $F(x)$，在其后加上一个任意常数 C 即可。

例 1　求不定积分$\int x^2 \mathrm{d}x$。

解　根据求导公式，因为 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$，得 $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$

例 2　求不定积分$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解　因为 $x > 0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$；$x < 0$ 时，$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$，得 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，因此有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

例 3　设曲线过点(1,2)，且其上任一点的斜率为该点横坐标的两倍，求曲线的方程。

解　设曲线方程为 $y = f(x)$，其上任一点(x,y) 处切线的斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

从而 $y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$

由 $y(1) = 2$，得 $C = 1$，因此所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1$$

通常我们把求不定积分的方法称为积分法。那么我们再来讨论一下不定积分的几何意义：

设$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，因为$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$，由导数的几何意义可知，曲线 $F(x) + C$ 上点 x 处的切线的斜率为$f(x)$，又因 C 为任意的常数，于是，不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是：在同一点 x 处切线的斜率均为$f(x)$ 的一族平行曲线，其中每一条都称为$f(x)$ 的积分曲线(图 1-2)。

由原函数与不定积分的概念我们还可以得到以下结论：

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$

先积分，后求导，作用抵消。

2. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

3. $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

先求导，再积分，作用抵消后需加积分常数 C。

4. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

5. $\int \mathrm{d}x = x + C$

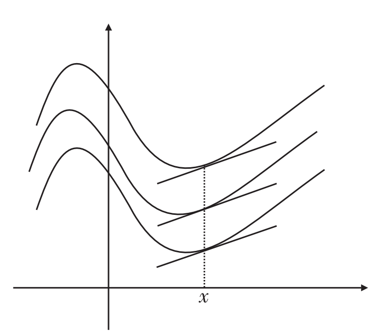

图 1-2　积分曲线

既然积分法是微分法的逆运算，故可从导数

的基本公式得到相应的积分公式。

二、积分公式

积分公式我们按基本初等函数的基本类型:幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数的顺序给出。

1. $\int k\mathrm{d}x = kx + C \quad$ (k 为常数)

2. $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

3. $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

4. $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$

5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

6. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

7. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

8. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

10. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

11. $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

同时,我们也可根据导数的运算法则得到不定积分的运算性质。

三、不定积分的性质

性质 1 和的积分等于积分的和。

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

本性质可推广到有限多个函数代数和的情况。

性质 2 不为零的常数可从积分号内提出。

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ 为常数}, k \neq 0)$$

例 4　求$\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x$。

解　本题利用幂函数的积分公式,及不定积分的性质 1 进行运算。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x &= \int (x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

例 5　求$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$。

解　积分运算不能直接进行乘除运算,只能转化成加减运算后才能进行。

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int (x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

例 6　求$\int (e^x - 3\cos x + 2^x e^x)\mathrm{d}x$。

解　本题是积分公式的加减组合。

$$\begin{aligned}&\int (e^x - 3\cos x + 2^x e^x)\mathrm{d}x \\ &= \int e^x\mathrm{d}x - 3\int \cos x\mathrm{d}x + \int (2e)^x\mathrm{d}x \\ &= e^x - 3\sin x + \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C \\ &= e^x - 3\sin x + \frac{(2e)^x}{1+\ln 2} + C\end{aligned}$$

在此题的计算中,一共涉及三个不定积分作和,但各积分常数可以合并,因此,在求代数和的不定积分时,在结果中只需加上一个任意常数。

从上述例子能够看出,直接运用不定积分的基本公式和运算法则(有时要先将被积函数作适当的恒等变形),就可以求出一些简单函数的不定积分,这种积分方法称为直接积分法。

例 7　求$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

解　在分式被积函数进行变形时,一定要充分考虑到分子和分母间的相通之处。