法兰西数学
精品译丛

谱理论讲义

J. 迪斯米埃　著
姚一隽　译

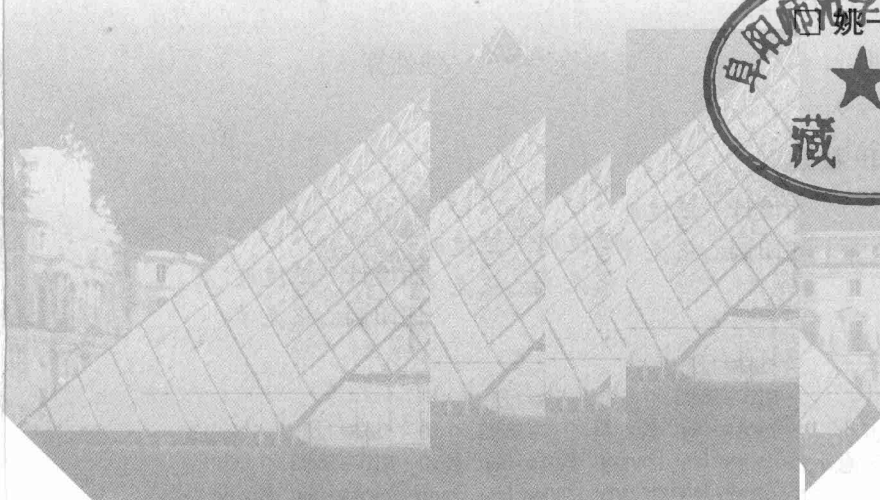
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

谱理论讲义

[法] J. 迪斯米埃 著
[法] 姚一隽 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字：01-2008-4985

Nous tenons à remercier M. le Professeur Jacques Dixmier d'avoir autorisé la publication sans droit d'auteur de ce livre en chinois.

诚挚感谢 J. 迪斯米尔教授免费赠与本书的中文版权。

图书在版编目(CIP)数据

谱理论讲义／(法)迪斯米埃著；姚一隽译. —北京：高等教育出版社，2009.1

ISBN 978-7-04-025155-5

Ⅰ.谱… Ⅱ.①迪… ②姚… Ⅲ.希尔伯特空间-线性算子理论-谱分析（数学）-高等学校-教材 Ⅳ.O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 154691 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王凌波
版式设计 陆瑞红　　责任校对 杨凤玲　　责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2009年1月第1版
印　　张	9.25	印　　次	2009年1月第1次印刷
字　　数	170 000	定　　价	29.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 25155-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费尔马、巴斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦尔茨及里翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 源于我们国家综合国力的提高所给予的有力支撑, 源于改革开放国策所带来的强大推动, 也源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助。在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月 26 日

中译本序

希尔伯特空间上的分析及算子的谱理论是现代数学、物理及工程科学的众多分支中不可或缺的工具, 特别是在下述领域中:

—— 偏微分方程理论;

—— 量子力学;

—— 信号处理;

—— 遍历理论.

约翰 · 冯 · 诺伊曼是 1930 年左右认识到希尔伯特空间上的分析在量子力学中的重要性的先驱之一. 在这之后, 希尔伯特空间上的算子理论始终在不停地发展, 而源于群表示论、量子场论、量子统计力学以及 Alain Connes 自 20 世纪 80 年代起开创和发展的非交换几何的需要都为这种发展提供了强大的动力.

雅克 · 迪斯米埃在算子代数领域有着巨大的影响. 除了他自己在这一领域所作出的重要贡献, 他还为传播穆雷 (F.J.Murray) 和冯 · 诺伊曼的工作做了许多努力. 他的专著 *Les algébres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (英译本 von Neumann Algebras) 和 *Les C^*-algèbres et leurs représentations* (英译本 C^* algebras) 在它们问世后的几十年里一直是世界各国该领域的工作者入门与参考的必备书籍. 他创立并长期领导的法国算子代数学派, 至今在世界上仍是具有极大影响力的. 他还直接或间接指导了为数众多的研究生. 不仅如此, 他在其他一些数学领域, 比如李群的表示论以及包络代数理论中, 都有很突出的工作.

雅克 · 迪斯米埃不仅是一位伟大的数学家, 他还是一位众所周知的优秀教师. 他的 *Cours de mathématiques du premier cycle* (《大学数学教程》, 两卷, 其中第一卷有高等教育出版社的中译本) 曾为无数法国学生所使用. 在硕士水平上, 雅克 · 迪斯米埃在巴黎第六大学 (又称皮埃尔和玛丽 · 居里大学) 曾经教授过多年的《希尔伯特

空间上的算子谱理论》. 他发给学生的手写油印讲义就是本书的原稿. 在法国有好几代学生曾得益于此.

仅仅要求点集拓扑和积分理论的非常简单的基础知识, 这一教程给出了算子谱理论的非常清晰、优雅而且完备的叙述. 在用初等方法讲述了希尔伯特空间的基本工具以后, 所有的基本结果都被循序渐进地涉及了, 直到自共轭算子的谱分解和单参数酉算子群的研究: 这些是所有希望深入学习数学或者物理的学生都必须掌握的一些知识.

非常遗憾, 本书稿在法国并没有出版. 我们有理由相信, 由雅克 · 迪斯米埃的再传弟子之一的姚一隽所翻译的这一中文版将使为数众多的中国读者都能够从中受益. 本书必将成为这一领域的师生与科研工作者的案头用书.

克莱尔 · 阿南塔哈曼 – 德拉霍什
法国奥尔良大学教授①

①Claire Anantharaman-Delaroche 是雅克 · 迪斯米埃的学生, 奥尔良大学教授, 算子代数专家.

目　　录

历 史 回 顾

许多数学物理问题 (Dirichlet 问题, 膜振动问题, 等等) 最后都归结为积分方程.

积分方程的例. 设 K 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上给定的复值函数. 对于函数 $x:[a,b]\to\mathbb{C}$, 我们由

$$\int_a^b K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \tag{1}$$

来定义 $y:[a,b]\to\mathbb{C}$.

若 y 已知而 x 未知, 有没有解, 有多少解?

1900 年前后, 若干数学家 (Schwarz, Poincaré, Fredholm) 用逼近方法研究过这个问题. 我们用间距非常小的点 $s_1,\cdots,s_n$ 来分割区间 $[a,b]$; 我们考虑函数 x (或者 y) 在这些点的取值 $x_1,\cdots,x_n$ (或者 $y_1,\cdots,y_n$). 于是积分方程 (1) 就变成了

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_j = y_i \quad (i=1,\cdots,n), \tag{2}$$

其中 k_{ij} 是已知复数. 然后我们对于 $n\to+\infty$ 取极限.

解方程 (2) 的关键在于分析 $\mathbb{C}^n$ 上以 (k_{ij}) 为矩阵的线性算子 u. 类似地, 要解决 (1), 就是要分析把 $[a,b]$ 上的函数 x 变成由 (1) 定义的函数的变换 v.

在有限维的情形, 要分析一个一般的线性算子已经相当麻烦了, 我们知道这最后归结到 Jordan 分解. 如果我们有 $k_{ij}=\overline{k_{ji}}$, 那么情况就要简单地多. 这个时候我们总能够选取一组标准正交基来把 u 化简为对角矩阵. 同样, 对于 (1) 的分析在函数 K 是 "Hermite" (即 $K(y,x)=\overline{K(x,y)}$) 的时候也会变得简单.

研究 (1) 的另外一个办法是 Hilbert 提出的:

为简单起见, 假设 $[a,b]=[0,2\pi]$. 设 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 是 y 的 Fourier 展开式, 并设

$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 是 x 的 Fourier 展开式: 这里 a_n 是未知量. 而函数 $t \mapsto \int_0^{2\pi} K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Fourier 系数为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

这样我们就有等式

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(s,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}ps}\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ps}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

这样我们就得到一个有无穷多个未知量和无穷多个方程构成的线性方程组.

一言以蔽之, 通过不同的方式, 最终我们都把问题归结为研究无限维向量空间上的线性算子, 特别是 Hermite 算子. 我们要选择适当的无限维空间: 在本书中我们处理的都是 Hilbert 空间.

0 可和族 (点集拓扑学复习)

1) 设 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是一个复数序列; 我们有级数 $\sum x_n$ 的收敛性的概念, 也可以在级数收敛的前提下定义它的和; 这个概念和指标集合 $\{1, 2, \cdots\}$ 的自然序有关. 在很多情况下 (两重级数等等), 我们需要讨论的复数集合的指标集没有明显合适的序; 但是我们仍然要讨论这样的复数集合的可求和性及其和数.

2) 设 $(x_i)_{i\in I}$ 是一族复数, 其中 I 是任意集合. 我们称它**可和且和为** s, 如果:

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意包含 J_0 的有限子集 J, 都有

$$|s_J - s| \leqslant \varepsilon \quad \left(\text{这里我们记}s_J = \sum_{i\in J} x_i\right).$$

这时我们记

$$s = \sum_{i\in I} x_i.$$

3) Cauchy **判别准则**. 一个族 $(x_i)_{i\in I}$ 可和, 当且仅当: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意和 J_0 不交的有限子集 K, 我们都有 $|s_K| \leqslant \varepsilon$.

4) **定理**. *一个族 $(x_i)_{i\in I}$ 可和, 当且仅当族 $(|x_i|)_{i\in I}$ 可和.*

5) 当 $I = \mathbb{N}$ 时, 我们可以讨论级数 $\sum x_i$ 是否收敛, 或者是否绝对收敛. 各种相关概念之间的关系总结如下:

$$\begin{array}{ccc}
\text{族}(x_i)_{i\in I}\text{可和} & \Longleftrightarrow & \text{族}(|x_i|)_{i\in I}\text{可和} \\
\Downarrow & & \Updownarrow \\
\text{级数}\sum x_i\text{收敛} & \Longleftarrow & \text{级数}\sum x_i\text{绝对收敛}.
\end{array}$$

而且, 若族 $(x_i)_{i\in I}$ 可和, 则其和就是级数 $\sum x_i$ 的和.

6) 设有满足 $x_i \geqslant 0$ 的一族数 $(x_i)_{i\in I}$. 则

$$(x_i)_{i\in I}\text{可和} \iff (s_J)_{J\subset I,\, J\text{有限}}\text{是有界的},$$

且在此情况下

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{\substack{J\subset I,\\ J\text{有限}}} s_J.$$

如果 (s_J) 不是有界的, 那么族 $(x_i)_{i\in I}$ 就不是可和的; 这时我们记

$$\sum_{i\in I} x_i = +\infty.$$

这样任意一个非负数族就都有一个和.

如果 $I=\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i\in I} x_i$ 就是和数 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的上确界, 我们就得到通常记为 $\sum x_i$ 的数.

7) 设 E 是一个完备赋范空间. 设 $(x_i)_{i\in I}$ 是 E 中一族向量. 我们称 $(x_i)_{i\in I}$ 可和且其和为 s(这里 $s\in E$), 如果有:

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于 I 中任意包含 J_0 的有限子集 J, 都有

$$\|s_J - s\| \leqslant \varepsilon \quad \left(\text{这里我们记} s_J = \sum_{i\in J} x_i\right).$$

这时我们记

$$s = \sum_{i\in I} x_i.$$

8) 这一情况下的 Cauchy 判别准则和 3) 中完全一样, 只需把绝对值换成向量的模即可.

9) 在一般情况下, 我们只有

$$(x_i)_{i\in I}\text{可和} \Longleftarrow (\|x_i\|)_{i\in I}\text{可和}.$$

10) 当 $I=\mathbb{N}$ 时,

$$\begin{array}{ccc}
\text{族}(x_i)_{i\in I}\text{可和} & \Longleftarrow & \text{族}(\|x_i\|)_{i\in I}\text{可和} \\
\Downarrow & & \Updownarrow \\
\text{级数}\sum x_i\text{收敛} & \Longleftarrow & \text{级数}\sum \|x_i\|\text{收敛}.
\end{array}$$

I Hilbert 空间

1.1 半双线性型

1.1.1 设 E, F 是复向量空间. 所谓$E \times F$ **上的半双线性型**是指从 $E \times F$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个满足下述条件的映射 f:

$$\text{对于 } x_1, x_2 \in E, y \in F, \text{ 有 } f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y); \tag{1}$$

$$\text{对于 } x \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ 有 } f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y); \tag{2}$$

$$\text{对于 } x \in E, y_1, y_2 \in F, \text{ 有 } f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2); \tag{3}$$

$$\text{对于 } x \in E, y \in F, \mu \in \mathbb{C}, \text{ 有 } f(x, \mu y) = \overline{\mu} f(x, y). \tag{4}$$

1.1.2 由 (1), (2), (3), (4), 我们得到, 对于任意的 $x_1, \cdots, x_n \in E$, $y_1, \cdots, y_p \in F$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\mu_1, \cdots, \mu_p \in \mathbb{C}$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \overline{\mu_j} f(x_i, y_j). \tag{5}$$

1.1.3 例. 考虑 $E = F = \mathbb{C}^n$, 并对 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{C}$ 定义

$$f((\lambda_1, \cdots, \lambda_n), (\mu_1, \cdots, \mu_n)) = \lambda_1 \overline{\mu_1} + \cdots + \lambda_n \overline{\mu_n}.$$

则 f 是 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 上的一个半双线性型.

1.1.4 例. 更一般的, 设 E, F 是两个有限维线性空间, $(a_1, \cdots, a_n)$ 是 E 的一组基, $(b_1, \cdots, b_p)$ 是 F 的一组基. 设 (α_{ij}) 是一个 $n \times p$ 复矩阵. 对于 $x =$

$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in E$ 和 $y = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_p b_p \in F$, 定义

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \lambda_i \overline{\mu_j}.$$

容易验证, f 是 $E \times F$ 上的一个半双线性型. 如果 $E = F = \mathbb{C}^n$, 所选择的基正好是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基, 且 $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker 符号), 那么我们又重新得到上面的例 1.1.3.

1.1.5 例 1.1.4 的意义在于, 它给出了有限维空间上半双线性型的最一般形式. 具体地说, 设 E, F, (a_i), (b_j) 如 1.1.4 中所述. 设 $\mathcal{S}$ 是 $E \times F$ 上全体半双线性型构成的集合, 而 $\mathcal{M}$ 是所有 $n \times p$ 复矩阵构成的集合. 对于任意 $M \in \mathcal{M}$, 我们根据 1.1.4 定义一个 $E \times F$ 上的半双线性型. 对于任意的 $f \in \mathcal{S}$, 我们可以定义f **对于基** (a_i), (b_j) **的矩阵**, 即由 $\alpha_{ij} = f(a_i, b_j)$ 定义的 $n \times p$ 复矩阵 (α_{ij}). 这样我们就得到了一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{S}$ 的映射和一个从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射. **它们是互逆双射**. 事实上:

1. 设 $f \in \mathcal{S}$. 若 f 的矩阵是 (α_{ij}), 而 (α_{ij}) 对应的半双线性型是 g, 则我们有

$$g(a_i, b_j) = \alpha_{ij} = f(a_i, b_j),$$

这样根据 (5) 就得到 $f = g$.

2. 设 $(\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}$. 设 f 是 (α_{ij}) 对应的半双线性型, 而 (β_{ij}) 是 f 的矩阵. 我们有

$$\beta_{ij} = f(a_i, b_j) = \alpha_{ij},$$

所以 $(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})$.

这样我们就能够构造出所有有限维的半双线性型.

1.1.6 设 E 是一个复线性空间, f 是 $E \times E$ 上的一个半双线性型. 那么只要对于所有的 $x \in E$ 知道 $f(x, x)$, 我们就可以确定所有 f 的值了. 事实上, 我们有下述恒等式 (称为极化恒等式):

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + \mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y). \quad (6)$$

这是因为

$$\begin{aligned}
f(x+y, x+y) &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y), \\
-f(x-y, x-y) &= -f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) - f(y,y), \\
\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) &= \mathrm{i}f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) + \mathrm{i}f(y,y), \\
-\mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y) &= -\mathrm{i}f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) - \mathrm{i}f(y,y),
\end{aligned}$$

逐项相加即得 (6) 式.

1.1.7 在和 1.1.6 同样的假设下, 我们用完全类似的方式可以得到下述恒等式 (称为对角线恒等式):

$$f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)=2f(x,x)+2f(y,y). \tag{7}$$

1.2 Hermite 型

1.2.1 设 E 是一个复线性空间. 我们称 $E \times E$ 上的一个半双线性型是一个 Hermite 型, 若它还满足下述条件: 对于 x, $y \in E$,

$$f(y,x)=\overline{f(x,y)}. \tag{8}$$

1.2.2 如果一个 $E \times E$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 f 满足 (1), (2) 和 (8), f 显然是一个 Hermite 型.

1.2.3 例 1.1.3 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 Hermite 型的一个例子.

1.2.4 设 E 是一个有限维复线性空间, $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的一组基, f 是 $E \times E$ 上的一个半双线性型, (α_{ij}) 是它的关于基 (e_i), (e_i) 的矩阵 (或者更为简明地称之为 f 关于基 (e_i) 的矩阵). f 是 Hermite 型当且仅当 (α_{ij}) 是 Hermite 矩阵, 即对于任意的 i 和 j 有 $\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$. 必要性是显然的, 充分性部分可以用 (5) 证明.

1.2.5 定理. 设 E 是一个复向量空间, f 是 $E \times E$ 上的一个半双线性型. 下述条件是等价的:

(i) f 是 Hermite 型;

(ii) 对于任意的 $x \in E$, $f(x,x) \in \mathbb{R}$.

若 f 是 Hermite 型, 则对于任意的 $x \in E$, $f(x,x)=\overline{f(x,x)}$, 即 $f(x,x) \in \mathbb{R}$.

假设我们已有条件 (ii). 对于 $x,y \in E$, 定义 $g(x,y)=\overline{f(y,x)}$. 那么显然 g 是 $E \times E$ 上的一个半双线性型. 由假设, 我们知道对于任意的 $x \in E$, $g(x,x)=f(x,x)$, 所以由 (6), $f=g$, 所以 f 是 Hermite 型.

1.2.6 设 f 是 E 上 Hermite 型. 我们称 E 中元素 x, y (关于 f) 是**正交的**, 若 $f(x,y)=0$. 这个关系对于 x 和 y 是对称的. E 中子集 M, N 称为**正交的**, 若 M 中任意元素和 N 中任意元素都是正交的. 若 M 和 N 正交, 则 M 中元素的任意线性组合和 N 中元素的任意线性组合都是正交的.

1.2.7 设 $M \subset E$. E 中和 M 正交的全体元素构成的集合是 E 的一个线性子空间, 记作 $M^{\perp}$, (不太精确地) 称作**E 中和 M 正交的子空间**.