反霍尔德类势的

薛定谔算子

高文华 著

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 \Psi + V\Psi$$

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社

反霍尔德类势的薛定谔算子

高文华　著

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

反霍尔德类势的薛定谔算子/高文华著.—天津:天津科学技术出版社,2013.7

ISBN 978－7－5308－8117－0

Ⅰ.①反… Ⅱ.①高… Ⅲ.①薛定谔方程—算子方程 Ⅳ.①O175.24 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 168148 号

责任编辑:王　祯　冀云燕
责任印制:张军利

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社 出版
出版人:蔡　颢
天津市西康路 35 号　邮编 300051
电话(022)23332400
网址:www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
天津市蓟县宏图印务有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 3.5　字数 130 000
2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定价:15.00 元

前　　言

经典调和分析中的很多函数空间以及算子都是相应于拉普拉斯算子$-\Delta$所产生的. 例如 BMO 函数空间和 Hardy 函数空间 $H^p(0<p\leqslant 1)$，其中经典 Hardy 空间 H^p 正是由拉普拉斯算子$-\Delta$所决定的算子半群的极大算子在 L^p 空间中的刻画，而 BMO 函数空间是 H^1 的对偶空间. 近年，很多学者都在关注具有势函数的薛定谔算子$-\Delta+V$决定的函数空间理论和其算子的理论. 这些理论为某些偏微分方程解的适定性研究提供一定的理论基础. 作者在前人研究的基础上，主要研究了与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的几个问题. 本书研究了四个问题：①具有反霍尔德类势的薛定谔算子的 Riesz 变换分别与加权 Lipschitz 函数和加权 BMO 函数构成的交换子的加权 $L^p(1<p)$ 的有界性；②与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的 BLO 型函数空间 BLO_L；③具有反霍尔德类势的抛物型薛定谔算子的某些 Riesz 变换的 L^p 有界性；④具有反霍尔德类势的一致抛物型算子解的梯度估计和其决定的几个 Riesz 变换在加权 L^p 和 Morrey 空间上的有界性.

全书共分六章. 第一章介绍本书研究的背景，提出研究的问题和意义. 第二章介绍反霍尔德类和辅助函数及其性质. 第三章运用 Störmberg 的证明思想，证明了在权函数满足一定条件下，具有反霍尔德类势的薛定谔算子的 Riesz 变换（$T_1=(-\Delta+V)^{-1}V$，$T_2=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$，$T_3=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $T_4=(-\Delta+V)^{-1}\nabla^2$）分别与加权 Lipschitz 函数和加权 BMO 函数构成的交换子的加权 L^p 有界性. 这些结果蕴含了非加权的情况. 第四章给出了与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的 BLO_L 空间的定义，得到了 BLO_L 函数一个等价刻画，其与经典情况是平行的. 并研究了具有反霍尔德类势的薛定谔算子的极大 Riesz 变换从 BMO_L 到 BLO_L 的有界性. 第五章研究了当 $V\in B_q$（q

$\geqslant\frac{n}{2}$)时，具有反霍尔德类势的两个抛物型薛定谔算子的 $L^p(\mathbb{R}^n\times[0,T])$和具有反霍尔德类势的一个抛物型薛定谔算子的 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$有界性. 第六章研究了当 $a_{i,j}$满足一定条件，$V\in B_q$(对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$)，一致抛物型算子 $L=\partial_t-\sum_{i,j=1}^n\partial_i(a_{i,j}\partial_j)+V$ 的基本解的梯度估计，算子 VL^{-1}，$V^{\frac{1}{2}}\nabla L^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$的点态估计及其在加权 L^p空间和 Morrey 空间上的有界性.

由于作者学识水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，请读者提出宝贵意见. 这里我要感谢新疆大学江寅生教授，作为他的学生，作者曾得到他很多指导；我还要感谢北京大学唐林副教授，作为他的师弟，作者曾就本书有关问题得到他的指导和帮助；最后，我还要感谢北京师范大学珠海分校，因为本书的出版获得北京师范大学珠海分校 2013 年科研成果出版支持计划的经费资助.

目　　录

第一章　序言

偏微分方程解的适定性的研究是当代数学中心问题之一. 调和分析理论的发展为偏微分方程解的适定性的研究提供了重要理论基础，尤其用调和分析方法研究偏微分方程解的正则性以及先验估计成为现代数学重要方法之一. 自 20 世纪 50 年代 Calderón-Zygmund 提出和发展奇异积分理论以来，关于奇异积分及其在偏微分方程中应用的研究，成为调和分析中最辉煌的成就之一. Calderón-Zygmund 算子[1]的定义如下：

一个从 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$到 $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$的算子称为 Calderón-Zygmund 算子，如果

(a) T 是可延拓成为 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界线性算子；

(b)存在一个核 $K(x,y)$使得对任意 $f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \qquad a.e.\{\text{ supp f}\}^c;$$

(c) 该核满足 Calderón-Zygmund 估计式：

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}, \tag{1.1.1}$$

$$|K(x+h,y)-K(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{1.1.2}$$

$$|K(x,y+h)-K(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{1.1.3}$$

对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$|h|<\frac{|x-y|}{2}$，以及某个 $\delta>0$ 成立.

奇异积分交换子更是继奇异积分之后研究偏微分方程解的适定性的另一个重要算子. 由算子 T 和函数 b 组成的交换子定义如下：

$$[b,T]f(x)=b(x)T(f)(x)-T(bf)(x).$$

众所周知，由拉普拉斯算子$-\Delta$ 决定的 Riesz 变换 $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$，$(-$

$\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $\nabla(-\Delta)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子. 根据经典 Calderón-Zygmund 算子理论,这些算子以及它们和 Lipschitz 函数或 BMO 函数生成的交换子都具有 L^p 有界性.

本书主要考虑的具有反霍尔德类势函数 V 的薛定谔算子为

$$\mathrm{L}=-\Delta+V.$$

对于它所决定的 Riesz 变换,B. Helffer 和 J. Nourrigat[2],H. F. Smith[3] 和 S. Thangavelu[4] 等研究了 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$,$(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$,$\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$,$V^{\frac{1}{2}}\nabla(-\Delta+V)^{-1}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 等算子的 L^p 有界性. 特别地,J. Zhong[5] 在他的博士论文中专门研究了具有多项式势的薛定谔算子. 他证明了,当 V 是非负多项式时,$\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$,$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子,从而它们在 L^p 上是有界的,以及它们分别与 BMO 函数和 Lipschitz 函数的交换子也是在 L^p 上有界的. 后来,Z. Shen[7] 推广了上述结果,他研究了当 V 属于某种反霍尔德类时,包括上述算子的几个由薛定谔算子决定的算子的 L^p 有界性. 这里我们特别指出,反霍尔德类是一类比非负多项式更为广泛的函数类,它包括所有非负多项式以及一些非光滑函数.

众所周知,经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 是 L^p 空间在 $0<p\leqslant 1$ 范围内适合的替代函数空间. 另一方面,经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 也是拉普拉斯算子 $-\Delta$ 所产生的算子半群的极大算子在 $L^p(0<p\leqslant 1)$ 空间中的刻画. 自然地,具有势函数的薛定谔算子 $-\Delta+\mathrm{V}$ 是否也有其所产生的算子半群的极大算子在 $L^p(0<p\leqslant 1)$ 空间中刻画的函数空间呢? 已经有很多数学家在这方面进行了探索. 其中具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的 Hardy 型空间和其对偶空间有界平均震荡函数空间(BMO 空间)以及一些具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的一些主要算子在这些空间中的性质具有极其重要的价值.

当 $V\in B_{n/2}$,其中 $n\geqslant 3$,Fefferman[48],Shen[7] 和 Zhong[5] 得到了关于 L 的一些基本结果,并得到 Riesz 变换 $\nabla L^{-1/2}$ 在勒贝格空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性,这里 $p\in(1,+\infty)$. Dziubański J. 和 Zienkiewicz

J.[9]原创性地分别以原子形式和由算子半群$\{e^{-tL}\}_{t>0}$或 Riesz 变换$\nabla L^{-1/2}$定义的极大函数刻画了与薛定谔算子 L 相关的 Hardy 空间$H_{L}^{1}(\mathbb{R}^{n})$. 这个结果被林秦成、刘和平等[20]推广到海森堡群上. Dziubański J. 和 Zienkiewicz J.[9]还通过某种与由势V决定的辅助函数相关的某局部极大函数刻画了上述 Hardy 空间$H_{L}^{1}(\mathbb{R}^{n})$. 当$V\in B_{n/2}(\mathbb{R}^{n})$,其中$n\geqslant 3$,Dziubański J. 等[12]引入了与 L 相关的BMO型空间$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$,并且证明了$H_{L}^{1}(\mathbb{R}^{n})$和$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$的对偶性,还得到了$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$关于 Carleson 测度和一些经典算子关于 L 的算子在$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$上的有界性的刻画. 这些算子包括半群极大算子和分数次积分算子I_{α},其中$\alpha\in(0,n)$. 这些结果也被林秦城和刘和平[20]推广到海森堡群上. 而且,当$V\in B_{n}(n\geqslant 3)$,董建锋和刘和平[21]进一步建立了算子$\nabla L^{-1/2}$的$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$估计,通过算子$\nabla L^{-1/2}$建立了$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$的 Fefferman-Stein 分解,并且给出$H_{L}^{1}(\mathbb{R}^{n})$由$\nabla L^{-1/2}$的共轭算子的一个刻画.

国内数学家颜立新和杨大春等在这方面也取得了出色的成果. 邓东皋,X. T. DUONG,A. SIKORA 和颜立新[19]对更为一般的热核算子所决定的有界平均震荡函数空间(BMO型空间)与经典的BMO空间进行了比较,还进一步给出了应用. 最近,杨大春、杨东勇和周媛[22]引入了由一个允许函数ρ所决定的BMO型空间$BMO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$和 BLO 型空间$BLO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$,并建立了局部 Riesz 变换在$BMO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$上的有界型以及相应的极大算子从$BMO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$到$BLO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$的有界性. 后来,杨大春、杨东勇和周媛[22]又引入了在齐型空间上的BMO型空间$BMO_{\rho}(X)$和BLO型空间$BLO_{\rho}(X)$,并建立了它们的一些基本性质. 这些性质包括$BMO_{\rho}(X)$上的 John-Nirenberg 不等式和$BLO_{\rho}(X)$的几个等价刻画. 他们还得到了自然极大算子,Hardy-Littlewood 极大算子和与ρ相关的相应局部算子以及与ρ相关的 Littlewood-Paley-g 函数在这些局部空间上的有界性. 当ρ取成由反霍尔德类势函数决定的一类辅助函数时,$BMO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$就是文[12]引入的$BMO_{L}(\mathbb{R}^{n})$,而$BLO_{\rho}(\mathbb{R}^{n})$就是文[12]引入的$BLO_{L}(\mathbb{R}^{n})$.

下面,我们把与本书内容密切相关的一些他人的研究结果罗列出

来,并根据具体内容提出本书要解决的一些问题. 首先,Z. Shen 在其文[7]中得到的结果具体如下.

定理 A[7] 设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q$,有

$$\|\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

这里,C_p 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 B[7] 设 $V\in B_{\frac{n}{2}}$,那么对于 $\gamma\in\mathbb{R}$,$(-\Delta+V)^{i\gamma}$ 是一个 Calderón-Zygmund 算子.

定理 C[7] 设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q_0$,成立

$$\|\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

其中,$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$,$C_p$ 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 D[7] 设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么成立

$$\|(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad p_0{}'\leqslant p<\infty$$

和

$$\|\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad p_0{}'\leqslant p\leqslant p_0,$$

其中,$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 E[7] 如果 $V\in B_n$,那么 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$,$(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子.

定理 F[7] 设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q$,有

$$\|V(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

这里,C_p 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 G[7] 设对某个 $q_0\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_{q_0}$,那么对于 $1<p\leqslant p_0$,有

$$\|V^{\frac{1}{2}}\nabla(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中,当 $\frac{n}{2}\leqslant q_0<n$ 时,$\frac{1}{p_0}=\frac{3}{2q_0}-\frac{1}{n}$;当 $q_0\geqslant n$ 时,$p_0=2q_0$.

定理 H[7]　设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $1<p\leqslant 2q$，有

$$\|V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 I[7]　设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $p_0{}'<p\leqslant 2q$，有

$$\|(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\qquad p_0{}'\leqslant p<\infty,$$

其中，$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$. 如果某个 $n\leqslant q$，$V\in B_q$，那么上式对 $1\leqslant p\leqslant 2q$ 成立.

尽管得到如上结果，但是 Shen[7] 并没有回答当 $\frac{n}{2}\leqslant q<n$ 时，L 的 Riesz 变换 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 是否是 Calderón-Zygmund 算子. 在 2007 年，郭紫华、李澎涛和彭立中在文[28]中回答了这个问题. 他们研究了 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$V(-\Delta+V)^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 与 BMO 函数的交换子的 L^p 有界性. 他们指出这几个算子的核并没有 Calderón-Zygmund 核所具有的光滑性，而是具有所谓的 $H(m)$ 条件（见文[28]. 在这种光滑核的条件下，他们证明了如下结果.

定理 J[28]　设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $b\in BMO$，则有

(i) $\|[b,(-\Delta+V)^{-1}V]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$q'\leqslant p<\infty$；

(ii) $\|[b,(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$(2q)'\leqslant p<\infty$；

(iii) $\|[b,(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$p'_0\leqslant p<\infty$，

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$；

(iv) $\|[b,(-\Delta+V)^{-1}\nabla^2]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$q'\leqslant p<\infty$.

根据对偶理论，还有如下结论

(v) $\|[b,V(-\Delta+V)^{-1}]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$1<p\leqslant q$；

(vi) $\|[b,V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p$，$1<p\leqslant 2q$；

(vii) $\|[b,\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p, 1<p\leqslant p_0$,

其中$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$;

(viii) $\|[b,\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}]f\|_p\leqslant C\|b\|_{BMO}\|f\|_p, 1<p\leqslant q$.

我们这里指出,当 $V\equiv 0$ 时,$\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ 就是经典的 Calderón-Zygmund 算子. 关于 Calderón-Zygmund 算子交换子,有一个等价刻画是:

设 T 是 Calderón-Zygmund 算子,

$b\in BMO$ 的充分必要条件是交换子$[b,T]$对任意 $p\in(1,+\infty)$在 L^p 上有界(见[30]).

遗憾的是,当 $V\neq 0$ 时,$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 并不是经典的 Calderón-Zygmund 算子. 郭紫华、李澎涛和彭立中在文[28]中指出,因为 $V\in B_q$,$\frac{n}{2}\leqslant q<n$,薛定谔算子$-\Delta+V$ 决定的 Riesz 变换$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$并非 Calderón-Zygmund 算子. 他们在下面的定理中回答了这个问题.

定理 K[28] 对于 $V\equiv 1$, 存在 $b\notin BMO$,使得$[b,\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}]$在 L^2 上有界.

设 T 是 Calderón-Zygmund 算子,关于 T 的另一个经典结果是[31]:

$b\in Lip_\beta(0<\beta<1)$的充分必要条件是交换子$[b,T]$从 L^p 到 L^q 上是有界的,其中$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$.

另外,李澎涛和彭立中[29]还研究了这些与薛定谔算子相关的 Reisz 变换的交换子的端点估计.

问题 1: 设 V 属于反霍尔德类,那么由薛定谔算子$-\Delta+V$ 决定的 Reisz 变换$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$,$V(-\Delta+V)^{-1}$,$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$和$\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$与 Lipschitz 函数 b 的交换子$[b,T]$是否从 L^p 到 L^q 上是有界的

$\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}\right)$?

最近胡蓓和古家军在文[32]中证明了 Calderón-Zygmund 算子相应的加权结果：

如果 T 是一个 Calderón-Zygmund 算子，对于 $\mu\in A_1$，$b\in Lip_{\beta,\mu}$ 当且仅当交换子$[b,T]$是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu^{1-q})$ 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$0<\beta<1$ 和 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$. 后来，刘宇[69]研究了薛定谔算子 $(-\Delta+V)^{-\beta}V^{\alpha}$ 和 $(-\Delta+V)^{-\beta}\nabla V^{\alpha}$ 与经典 BMO 的交换子在加权 L^p 空间上的有界性.

问题 2：设 V 属于反霍尔德类，那么由薛定谔算子 $-\Delta+V$ 决定的 Reisz 变换 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$V(-\Delta+V)^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 分别与加权 Lipschitz 函数和加权 BMO 函数 b 的交换子$[b,T]$是否有加权 L^p 的估计.

问题 1 和问题 2 的解决将使得具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的一些算子和更加一般的权函数的交换子在更加广泛的空间的先验估计得到理论证明.

对于经典的 BMO 函数空间，已经有很多优异的结果. 其中，C. Bennett，R. A. DeVore 和 R. Sharpley 在文[33]中指出它的 Hardy-Littlewood 极大函数要么是一致为无穷，要么是从 BMO 到 BMO 的. 对于与薛定谔算子相关的 BMO 型函数空间 BMO_L，也有了一些可喜的结果，比如 J. Dziubaóski，G. Garrigós，T. Martínez 等在文[12][13]中指出薛定谔算子的半群极大算子、Hardy-Littlewood 极大算子和 Poisson 半群极大函数在 BMO_L 空间上都不会为一致无穷，而且是从 BMO_L 到 BMO_L 有界的. 我们这里指出，当 $V\equiv 0$ 时，BMO_L 就是经典的 BMO 空间，那么能够把经典的 BMO 空间的一些结果做到 BMO_L 空间上也是非常有意义的事情.

R. R. Coifman 和 R. Rochberg 在文[34]中研究 BMO 空间的等价刻画时引进了 BMO 空间的一个子空间 BLO，定义如下：

$$BLO=\{f\in L_{loc}(\mathbb{R}^n):\frac{1}{|B|}\int_B f(x)-\operatorname*{essinf}_B f(x)\,dx\leqslant C\}.$$

并且还给出了 BLO 的一个等价刻画：

一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当 $f=\alpha\log M^{\#}F+h$，其中 $\alpha>0$，F 是一个局部可积函数且其极大函数 $M^{\#}F$ 是几乎处处有限的，h 是 L^{∞} 函数.

这里，$M^{\#}$ 为自然极大函数，即 $M^{\#}f(x)=\sup\limits_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_{B}f(x)\mathrm{d}x$.

Colin Bennett 还给出了 BLO 的另一个等价刻画：

定理 L[35]　一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当存在 $F\in BMO$ 和 $h\in L^{\infty}$，其中 $M^{\#}F(x)$ 是几乎处处有限的，使得

$$f=M^{\#}F+h,$$

而且

$$\|f\|_{BLO}\sim\inf(\|F\|_{BMO}+\|h\|_{L^{\infty}}),$$

其中下确界是对所有上述表达式的 F 和 h 所取的.

问题 3：是否能够定义一个合适的与薛定谔算子相关的 BLO 型空间 BLO_{L} 空间，并且有平行于定理 L 的等价刻画.

如果问题 3 得到肯定回答，那么就说明这种与薛定谔算子相关的 BLO 型空间 BLO_{L} 空间定义相应于经典情况是合理的.

关于经典的 BLO 的估计有如下几个.

Winston Ou 在文[36]中证明了

定理 M[36]　如果存在某一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $Mf(x_0)<\infty$，那么 $M^{\#}$ 和 M 都是从 BMO 到 BLO 有界的.

设 Ω 是零阶齐次，在单位球 S^{n-1} 上可积，并且具有零平均的函数. 定义奇异积分算子

$$T_1f(x)=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y.$$

相应上述算子的极大算子为

$$T_1^{*}f(x)=\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\left|\int_{\varepsilon<|x-y|<N}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y\right|.$$

胡国恩和张启慧在文[37]中得到以上极大算子从 BMO 到 BLO 的估计.

定理 N[37]　当对某个 $q>2$，$\Omega\in L(\log L)^{q}(S^{n-1})$，即，

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x)| \log^q(2+|\Omega(x)|)\mathrm{d}x<\infty,$$

并且 Ω 的 L^1 连续模满足：

$$\int_0^1 \omega(\delta)\log\left(2+\frac{1}{\delta}\right)\frac{d\delta}{\delta}<\infty,$$

这里 $\omega(\delta)=\sup\limits_{|\rho|<\delta}\int_{S^{n-1}} |\Omega(\rho x)-\Omega(x)|\mathrm{d}x$. 那么，如果 $f\in BMO$ 使得对于某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$T_1^* f(x_0)<\infty$，就成立

$$\| T_1^* f\|_{BLO}\leqslant C\| f\|_{BMO}.$$

设 T^* 为如下定义的 Calderón-Zygmund 极大奇异积分算子：

$$T^* f(x)=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right|$$

其中核 $k(x)$ 满足下列标准条件：

(1) $|k(x)|\leqslant C|x|^{-n}$，$x\neq 0$；

(2) $\int_{R_1<|x|<R_2} k(x)\mathrm{d}x=0$，$0<R_1<R_2<\infty$；

(3) $|k(x-y)-k(x)|\leqslant\dfrac{|y|}{|x|^{n-1}}$，$2|y|\leqslant|x|$.

唐林在文[41]中证明了 Calderón-Zygmund 极大奇异积分算子从 BMO 到 BLO 的估计.

定理 O[41]　如果存在某一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $T^* f(x_0)<\infty$，那么

$$\| T^* f\|_{BLO(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\| f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

董建锋和刘和平在文[21]中研究了薛定谔算子决定的 Riesz 变换和 BMO_L. 得到如下结果.

定理 P[21]　当 $V\in B_n$，薛定谔算子决定的 Riesz 变换 $R_j^L=\dfrac{\partial}{\partial x_j}L^{-\frac{1}{2}}$ 是从 BMO_L 到 BMO_L 有界的，而且成立

$$\| R_j^L f\|_{BMO_L}\leqslant C\| f\|_{BMO_L}.$$

问题 4： 当 $V\in B_n$，薛定谔算子决定的极大 Riesz 变换是否从 BMO_L 到 BLO_L 有界.

由于 $BLO_L\subsetneqq BLO$，问题 4 的解决表明薛定谔算子决定的极大 Riesz 变换有更好的性质，使得它有更加广泛的应用范围.

对于椭圆型的薛定谔算子$-\Delta+V$,相应有抛物型薛定谔算子$\partial_t-\Delta+V$. $\partial_t-\Delta+V$ 所在的底空间是具有抛物度量的空间$\mathbb{R}^{n+1}$或者$\mathbb{R}^n\times[0,T]$. 其中的度量为:

$$\rho((x,t),(y,s))=\max\{|x-y|,|t-s|^{\frac{1}{2}}\},$$
$$(x,t),(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1}(\mathbb{R}^n\times[0,T]).$$

把椭圆型的薛定谔算子的相关问题做到相应的抛物型薛定谔算子上是有意义的事情. 最近,韩金晟和唐林在文[39]中考虑了一些抛物型薛定谔算子在底空间$(\mathbb{R}^{n+1},\rho)$上的$L^p(\mathbb{R}^{n+1})$估计.

定理 Q[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于$1<p\leqslant q$,成立

$$\|\nabla^2(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 R[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于$1<p\leqslant\infty$,$\gamma\in\mathbb{R}$,成立

$$\|(\partial_t-\Delta+V)^{i\gamma}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 S[39] 设对某个$n>q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于$1<p\leqslant p_0$,成立

$$\|\nabla(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中,$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 T[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于$1<p\leqslant q$,成立

$$\|V(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 U[39] 设对某个$q_0\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_{q_0}$,那么对于$1<p\leqslant p_0$,成立

$$\|V^{\frac{1}{2}}\nabla(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中,当$\frac{n}{2}\leqslant q_0<n$时,$\frac{1}{p_0}=\frac{3}{q_0}-\frac{1}{n}$;当$q_0\geqslant n$时,$p_0=2q_0$.

问题 5:是否有相应于定理 H 的抛物型的结果呢? 即$V^{\frac{1}{2}}(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$是否在$L^p(\mathbb{R}^{n+1})$上有界呢?

问题 6:对于另一类抛物型空间$(\mathbb{R}^n\times[0,T],\rho)$,抛物型 Reizs 变