中数教材教法讲义

（代数部分）

雷州师专数学科中数教研组编

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　数的发展及其教学

自然数的理论、整数的整除性理论，实数理论是初等数学中研究数的重要理论基础，在中小学课程，由于学生水平所限而不能作系统严格的介绍，对于中小学教师的掌握教材的深浅程度和教学中适当而灵活地运用这些理论去开发学生的智力，必须掌握这些理论。一般来说这些理论在高等数学中作为已知的并广泛应用，不复述其本身内容。对于复数的学习也应在中学教材的基础上加深认识，即看到复数集与复平面上的坐标原点为始点的矢量可以建立同构对应的关系，但复数有自己的乘法和除法使它区别于矢量而存在着自己的一整套理论。

§1　自然数的基数理论

建立一种数的理论，主要要解决三个问题，即给出这种数的定义，确定数与数之间的比较和运算，对于自然数也要解决这三个问题。

1.1　自然数的定义

自然数的概念和等价集合有密切联系，由集合论知道两个等价的集合之间的元素可以建立"一一对应"的关系，人们利用这个基本性质把所考察的一切集合划分成类，把彼此等价的集合归成一类。例如人体上眼睛的集合，耳朵的集合，手的集合和足的集合等，这一些同一类的集合里，有一

种共同的特征，用通俗的话来说就是这些集合中物体的个数是相同的，我们把标记同类集合（等价集合）的这种共同特征叫做集合的基数。

上面所举例子中，人体眼睛的集合的基数是2，人体上手的手指的集合的基数是5。

定义：有限集合的基数称为自然数。由定义可知，每一个自然数实际上是一类有限等价集合的标记，它表示了这一类等价集合中元素的个数。

下面都是每类等价集合中任选一个集合作为这一类等价集合的标记来反映有限集的基数。例如：

集合$A=\{a\}$中有一个元素，它的基数的数字符号是"1"；

集合$B=\{a, b\}$中有二个元素，它的基数的数字符号是"2"；

集合$C=\{a, b, c\}$中三个元素，它的基数的数字符号是"3"；

集合$D=\{a, b, c, d\}$中有四个元素，它的基数的数字符号是"4"；

根据自然数定义，这些1，2，3，4……n……都是自然数。

1.2 自然数的大小比较

我们知道，在自然数集合1，2，3，4，5……中每一个自然数都表示某一类等价集合的基数。

设两个自然数a和b分别是两个有限集合，A和B的基数。

1、如果两个有限集合A和B是等价的，根据等价集合的定义，我们知道，两个集合A和B所含的元素是一一对应

的，那末它们的基数相等，就是说两个自然数a和b相等，我们把它记作$a=b$，这里符号“=”读作“等于”。

2、如果两个有限集合A和B是不等价的，根据等价集合的定义，我们知道，两个集合A和B所含的元素是不一一对应的，那末它们的基数不相等，就是说两个自然数a和b不相等，由此产生两种情况：

（1）集合A所含的元素的个数a比集合B所含的元素个数b多，我们就说a大于b，记作$a>b$，这里符号“$>$”读作“大于”。

（2）集合A所含的元素的个数a比集合B所含的元素个数比b少，我们就说a小于b，记作$a<b$，这里符号“$<$”读作“小于”。

由此可知：

两个自然数a和b之间，必定存在一种而且仅存在于下列三种关系之一，即$a>b$，$a=b$或$a<b$。

这样，我们就根据自然数的大小用“$<$”或“$>$”的符号把它们排列起来以示大小：

$1<2<3<4<\cdots\cdots<n<\cdots\cdots$；或$\cdots\cdots n>\cdots>4>3>2>1$把自然数排成一列数，它的顺序是1，2，3，4，5，$\cdots\cdots n\cdots\cdots$，

这种依次排列着的全体自然数组成的集合，称为自然数列，从中可以知道，在自然数列里有最小的一个数1，但没有最大的数。

用集合的基本概念，不难证明自然数的相等和不等的一些重要性质：

（1）反射性：一切自然数和它自身相等，即$a=a$；

（2）对称性：若自然数a等于自然数b，则b等于a，即如果$a=b$，那末$b=a$；

（3）传递性：

①若自然数a等于自然数b，而自然数b等于自然数c，则a等于c，即

如果$a=b$，$b=c$，那末$a=c$

②若自然数a大于自然数b，而自然数b又大于（或等于）自然数c，则a大于c，即如果$a>b$，$b\geqslant c$，那末$a>c$

③若自然数a小于自然数b，而自然数b又小于（或等于）自然数c，则a小于c，即如果$a<b$，$b\leqslant c$，那末$a<c$。

1.3 自然数的运算

1、加法

自然数的加法，实际上是由集合运算中产生的。我们知道，自然数列的集合M

$M=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots n, \cdots\cdots x\cdots\cdots\}$

中每个自然数都表示一类等价集合的基数，即

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\cdots n, & \cdots\cdots x, & \cdots\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_n \cdots\cdots & M_x \cdots\cdots & \end{array}$$

求两个自然数的加法，就是求两个（没有公共元素的）集合M_a和M_b的并集M_x的基数运算。即

$M_a \cup M_b = M_x$

如果集合M_a、集合M_b和集合M_x的基数分别是a、b和x，则上式就可写成$a+b=x$

a，b和x都是自然数，这里的加号“+”就代替了并号

"∪"。

很明显，两个自然数的加法的结果是唯一的，它仍是自然数列集合中的一个元素，即某一自然数。

因此，我们引进自然数的加法定义：

定义：设有两个不含公共元素的有限集合，M_a和M_b以及它们的并集M_x，而它们的基数分别为a和b及x，则x称为a和b的和。这种运算叫做加法，a和b称为加数。

由加法定义可知，求三个数的和（$a+b+c$）可先求最初两数的和（$a+b$），再求它与第三数c的和，即（$a+b$）$+c$；求四个数的和（$a+b+c+d$），可以先求最初三个数的和（$a+b+c$），再求它与第四数d的和，即（$a+b+c$）$+d$等等。

例1：$8+6+3=(8+6)+3=14+3=17$

例2：$8+6+3+9=(8+6+3)+9=17+9$
$=26$

我们从集合的基本概念中知道，

$A\cup B=B\cup A$（并的交换律）；

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$（并的结合律）

由此可以推出自然数加法应具有以下基本性质：

（1）加法的交换律

$$a+b=b+a$$

（2）加法的结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

由此可知，对于任何有限个自然数的加法，不论它的排列顺序如何，其和相等。例如，

$$a+b+c+d=b+c+a+d$$

（3）加法单调律

$$\text{如果}a\begin{cases}=b\\<b\\>b\end{cases}\qquad\text{那末}a+c\begin{cases}=b+c\\<b+c\\>b+c,\end{cases}$$

反之，上面三个命题的逆命题也成立，即

$$\text{如果}a+c\begin{cases}=b+c\\<b+c\\>b+c\end{cases}\qquad\text{那末}a\begin{cases}=b\\<b\\>b\end{cases}$$

2、乘法

定义：设有m个没有共同元素的等价集合M_1，M_2……M_m及它们的并集M_x，这些等价集合的基数都是n，并集的基数是x，则基数x是m个相同基数n的和：

$$x=\underbrace{n+n+\cdots\cdots+n}_{m\text{个}}$$

记作：$x=n\times m$

这种求相同加数的加法叫做乘法，n叫做被乘数，m叫做乘数，x叫做n乘以m的积。被乘数及乘数都叫做积的因数。

由乘法定义容易导出几个因数的积。就是几个因数的积是等于第一因数乘以第二因数，将所得的积再乘以第三个因数等等，直至最后一个因数，例如：

$$2\times3\times4\times5\times6=[(2\times3)\times4\times5]\times6$$
$$=[(6\times4)\times5]\times6=(24\times5)\times6=120\times6=720$$

自然数的乘法具有以下基本性质：

（1）乘法的分配律

$(a+b)\times c=ac+bc$

证明：$(a+b)\times c$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$=\underbrace{(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots+(a+b)}_{c\text{个}}\text{(乘法定义)}$$

$$=\underbrace{(a+a+a+\cdots+a)}_{c\text{个}}+\underbrace{(b+b+b+\cdots+b)}_{c\text{个}}\text{(加法结合律)}$$

$$=ac+bc \qquad \text{(乘法定义)}$$

（2）乘法的交换律

$a\times b=b\times a$

证明： $a\times b=\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{a\text{个}}\times b$（乘法定义）

$$=\underbrace{(b+b+\cdots+b)}_{a\text{个}} \qquad \text{（乘法分配律）}$$

$$=b\times a$$

（3）乘法的结合律

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

证明：

$$(a\times b)\times c=\underbrace{(a\times b)+(a\times b)+\cdots\cdots+(a\times b)}_{c\text{个}}$$

（乘法定义）

$$=a\times\underbrace{(b+b+\cdots\cdots+b)}_{c\text{个}} \qquad \text{（乘法分配律）}$$

$$=a\times(b\times c)$$

（4）乘法的单调律

如果 $a\begin{cases}=b\\<b\\>b\end{cases}$ 那末 $ac\begin{cases}=bc\\<bc\\>bc\end{cases}$

反之，上面三个命题的逆命题成立，即，

$$\text{如果}\quad ac\begin{cases}=bc\\<bc\\>bc\end{cases}\quad\text{那末}\quad a\begin{cases}=b\\<b\\>b\end{cases}$$

3、减法和除法

建立了自然数的加法与乘法定义后，就可以应用它们的逆运算关系来定义减法和除法。

（1）减法

定义：设两个自然数a与b，如果存在一个自然数c，使得$b+c=a$，那末c叫做a与b的差，记作

$$c=a-b$$

a叫做被减数，b叫做减数，求两个自然数的差的运算，叫做减法。

在自然数的集合里，当且仅当$a>b$时，差$a-b$是存在的，也是唯一的，如果$a<b$时，差$a-b$是不存在的。也就是说在自然数集合里，减法运算不是永远可以实施的。

（2）除法

定义：设两个自然数a和b，如果存在一个自然数c，使得$b\times c=a$，那末c叫做a除以b所得的商。记作

$$c=a\div b$$

a叫做被除数，b叫做除数，求两个自然数的商的运算，叫做除法。

在自然数的集合里当且仅当$a=b\times c$时，商$a\div b$是存在的，也是唯一的，如果$a\neq bc$时商$a\div b$是不存在的，也就是说在自然数里，除法运算也不是永远可以实施的。

1.4　零

现在，我们来看，如果两个自然数 a 与 b 相等，则它们的差 $a-b$ 是什么意义？

我们知道，根据集合运算，设集合 M_a 和空集ϕ求它们的并集，则这个并集就是集合 M，即

$$M_a \cup \phi = M_a$$

设集合M_a与ϕ的基数分别是 a 与 0，则它们的基数关系式是

$$a+0=a$$

当$a=b$时，则

$$b+0=a$$

根据减法定义可知

$$0=a-b \quad 即$$

$$a-b=0$$

这就是说，$a-b$ 就表示空集所含元素的个数。我们知道空集中不含有任何元素，所以这里“0”表示一个元素也没有的意思，把0放在自然数列1的前面，即

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots, n\cdots\cdots$$

通常把它称为扩大自然数列。

零与任何自然数之间的关系：

（1）任何自然数都大于零。

（2）零的加法与乘法：

$$0+a=a, \qquad a+0=a$$

$$0\times a=0, \qquad a\times 0=0。$$

§2　自然数的序数理论

上面自然数理论的形成是基数的观念，意大利数学家皮

亚诺（Peano）舍此观念而另用一种公理系统来建立自然数理论，人们把它称为序数理论。

在自然数的集合

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots n, \cdots\cdots$$

中，采用适当的定义，运用形式逻辑的方法来建立自然数集合内的加法和乘法运算。

2.1 自然数的定义

定义：一个非空集合N的元素叫做自然数，集合里的元素满足下列公理：

1．1是一个自然数，它不后继于任何自然数。

2．对于每个自然数a有且仅有一个后继的数a'，即由$a=b$得$a'=b'$。

3．除"1"外，任何一个数只能是一个数的后继数，即由$a'=b'$得$a=b$。

4．（归纳公理）设M是自然数的一个集合，它具有下列性质：

（1）自然数1属于M；

（2）如果自然数a属于M，它的后继数a'也属于M，则集合M包含一切自然数。这就是说，如果自然数的一个集合M包含自然数1，并且对于每个属于它的自然数a都有a的后继数a'，它就包含全体自然数，即

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots n, \cdots\cdots。$$

注意到定义中"4"是作为公理的形式出现的。关于这究竟是否作为公理，还没有一致的意见。我们需要指出的是，如果把它作为公理，则数学归纳法就成为明显的事实了，现说明如下：

定理：（数学归纳法）如果涉及自然数的某个命题，对于自然数1命题被证明了，而且假定对于自然数 n 正确的前提下，对于自然数 n' 命题也被证明了，那末命题对于任何自然数都正确。

证明：（1）设自然数1含于集合 M 内，已知对于自然数 n，假定自然数 n 命题是正确的，在这个基础上，对于 n 的后继数 n' 命题也被证明了，这就是说，n' 也属于集合 M，因此，集合 M 具有公理4的性质（1），（2）由于公理4，集合 M 应该含有一切自然数。这就是说，命题对于自然数 n 都是正确的。

2.2 *加法*

定义：对于每一对自然数 a 与 b，只有一个且仅有一个自然数 $a+b$ 与它对应，而且具有下面性质：

（1）对于任意自然数 a，有 $a+1=a'$

（2）对于任意两个自然数 a 与 b，有 $a+b'=(a+b)'$

我们把自然数 a 与 b 叫做加数，而 $a+b$ 叫做它们的和。

例：根据加法的定义，求2和3的和。

解：先求 $2+1$ 的和，由定义里的性质（1）得 $2+1=2'=3$，

其次求 $2+2$ 的和，也就是求 $2+1$ 的和，由定义里的性质（2）得，

$$2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4$$

再求 $2+3$ 的和，也就是求 $2+2$ 的和，同理可得

$$2+3=2+2'=(2+2)'=4'=5$$

$\therefore 2+3=5$

通过上例的运算，可以看出加法定义的合理性，说明了自然数的加法是存在的，而且仅有一种，即存在一种且仅有一种对应，按照它，对于任意两个自然数 a、b，自然数 $a+b$ 与它们对应，使得

（1）对于任意自然数 a，有 $a+1=a'$

（2）对于任意自然数 a 与 b，有 $a+b'=(a+b)'$，这就是是说，加法是可以实施的，而且是唯一确定的。

根据定义，我们把 a' 写成 $a+1$，即

$$a'=a+1$$

而且，我们知道，定义又适用加法基本性质：

1．加法结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

证明：我们应用数学归纳法

设 a 与 b 是确定的两个自然数，M 是自然数 c 的一个集合，对于集合 M 里所有自然数 c，使等式 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 都成立。

（1）先证明等式对于 $c=1$ 的时候成立，即

$$(a+b)+1=(a+b)' \quad \text{（定义里性质(1)）}$$
$$=a+b' \quad \text{（定义里性质(2)）}$$
$$=a+(b+1) \quad \text{（定义里性质(1)）}$$

$$\therefore (a+b)+1=a+(b+1)$$

故自然数 1 属于集合 M。

（2）再证明在假设等式对于某一自然数 k（即 $c=k$）时成立的前提下，则等式对于 k'（即 $c=k+1$）时也必然成立，即

如果 k 属于集合 M，当 $c=k$ 时，假设等式成立，就是

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com