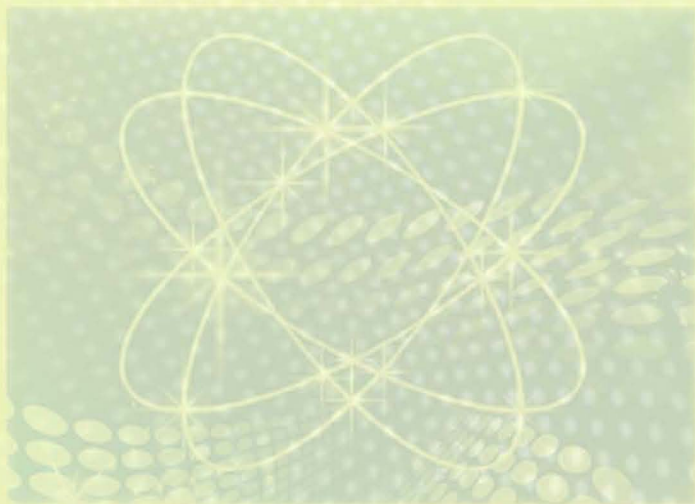


高等数学学习指导

主 编：陈万勇 葛玉凤

副主编：韦 俊 黄素珍

编 委：朱亚萍 王 莉 陆 媛 陆文林
胡 忠 周 琦 刘 勇



东南大学出版社
· 南 京 ·

高等数学学习指导

主 编：陈万勇 葛玉凤

副主编：韦 俊 黄素珍

编 委：朱亚萍 王 莉 陆 媛 陆文林
胡 忠 周 琦 刘 勇

东南大学出版社

• 南 京 •

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/陈万勇,葛玉凤主编. —南京:东南大学出版社,2008.8(2012.8重印)

ISBN 978-7-5641-1170-0

I. 高… II. ①陈…②葛… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. G013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 117597 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:江建中

江苏省新华书店经销 南京雄州印刷有限公司印刷

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:14.25 字数:354 千字

2008 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-5641-1170-0/O·71

印数:18101—22700 册 定价:27 元

(凡因印装质量问题,可直接与读者服务部调换。电话:025-83792328)

第二版修订说明

《高等数学学习指导》这本教材对于学生学习高等数学帮助较大,学生通过对“知识点的回顾”、“疑点解析”巩固了所学习的知识,通过“例题分析与习题详解”的学习有利于作业题的解答与完成,对学生期末复习有较大的作用。但是对于各章节的自测题的解答结果无法知道对错。应广大读者的需要,这次在本书中重点增加了自测题参考答案,并对各章节中的错误进行了修改。

本次修改的主要工作由葛玉凤、朱亚萍、王莉、陆媛老师协助完成,陈万勇负责整理统稿。由于水平有限,不当之处,请指正。

编 者
2012 年 5 月

前 言

高等数学是工科各专业的重要基础课程,也是硕士研究生入学考试数学课程的主要部分。编者从事应用型工程本科高等数学教学二十多年,为帮助学生更好地学习好高等数学基础知识,也便于学生课后自习,同时兼顾学生复习考研的需要,结合自己的教学经验并参考大量的高等数学教材编写这本指导书。本书的章节编排基本符合同济四、五版的教材目录,便于指导学生同步学习,也可以作为考试复习用书。

本书具有如下特点:

- 一、疑点解析,通俗易懂;**
- 二、例题精选、解答详细,便于自学;**
- 三、自测练习,有利于考试;**
- 四、复习考研,提高点拨。**

编 者
2008 年 5 月

目 录

第一章 函数、极限、连续	(1)
第一节 映射与函数	(1)
第二节 极限的概念	(4)
第三节 无穷小(大)与极限运算法则	(6)
第四节 极限存在准则 两个重要极限	(9)
第五节 无穷小的比较	(12)
第六节 函数的连续性	(15)
第一章自测题	(19)
第二章 导数与微分	(21)
第一节 导数概念	(21)
第二节 函数的求导法则	(24)
第三节 高阶导数	(27)
第四节 隐函数、由参数方程所确定的函数的导数及相关变化率	(29)
第五节 函数的微分	(32)
第二章自测题	(34)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(36)
第一节 微分中值定理	(36)
第二节 洛必达法则	(38)
第三节 泰勒公式	(42)
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	(44)
第五节 函数的极值与最大值、最小值	(45)
第六节 函数图形的描绘	(48)
第七节 曲率	(51)
第三章自测题	(52)
第四章 不定积分	(54)
第一节 不定积分的概念与性质	(54)
第二节 换元积分法	(56)
第三节 分部积分法	(60)

第四节 有理函数积分	(63)
第四章自测题	(67)
第五章 定积分	(69)
第一节 定积分的概念与性质	(69)
第二节 微积分基本公式	(71)
第三节 定积分的换元法与分部积分法	(73)
第四节 反常积分	(76)
第五章自测题	(77)
第六章 定积分的应用	(79)
第一节 定积分的元素法	(79)
第二节 定积分在几何学上的应用	(80)
第三节 定积分在物理上的应用	(84)
第六章自测题	(85)
第七章 空间解析几何与向量代数	(87)
第一节 向量及其线性运算	(87)
第二节 数量积、向量积、混合积	(89)
第三节 曲面及其方程	(92)
第四节 空间曲线及其方程	(95)
第五节 平面及其方程	(97)
第六节 空间直线及其方程	(99)
第七章自测题	(104)
第八章 多元函数微分法及其应用	(106)
第一节 多元函数的基本概念	(106)
第二节 偏导数与全微分	(109)
第三节 多元复合函数与隐函数微分法	(114)
第四节 多元函数微分法的应用	(117)
第八章自测题	(120)
第九章 重积分	(122)
第一节 二重积分的概念和性质	(122)
第二节 二重积分的计算法	(124)
第三节 三重积分	(127)
第四节 重积分的应用	(130)
第九章自测题	(133)

第十章 曲线积分与曲面积分	(135)
第一节 对弧长的曲线积分	(135)
第二节 对坐标的曲线积分	(138)
第三节 格林公式	(141)
第四节 对面积的曲面积分	(145)
第五节 对坐标的曲面积分	(148)
第六节 高斯公式	(152)
第十章自测题	(154)
第十一章 无穷级数	(157)
第一节 常数项级数的概念与性质	(157)
第二节 常数项级数的审敛法	(159)
第三节 幂级数	(164)
第四节 傅里叶级数	(172)
第十一章自测题	(175)
第十二章 微分方程	(178)
第一节 微分方程的基本概念	(178)
第二节 一阶微分方程	(180)
第三节 高阶微分方程	(184)
第十二章自测题	(190)
附录一 数学典型题解提示	(193)
第一节 极限	(193)
第二节 导数	(195)
第三节 积分	(195)
第四节 一元函数微积分学的应用	(197)
第五节 无穷级数	(199)
模拟测试	(202)
附录二 各章自测题参考答案	(204)
第一章 函数、极限、连续	(204)
第二章 导数与微分	(205)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(206)
第四章 不定积分	(208)
第五章 定积分	(208)
第六章 定积分的应用	(210)
第七章 空间解析几何与向量代数	(210)

第八章 多元函数微分法及其应用·····	(211)
第九章 重积分·····	(212)
第十章 曲线积分与曲面积分·····	(212)
第十一章 无穷级数·····	(213)
第十二章 微分方程·····	(215)

第一章 函数、极限、连续

第一节 映射与函数

一、知识点复习

1. 集合的概念与运算、区间与邻域.
2. 函数: 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定数集. 若对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的定义域, x 叫作自变量, y 叫作因变量.
3. 函数的几种特性: 有界性、奇偶性、单调性、周期性.
4. 反函数的概念及其性质.
5. 复合函数: 设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D . 若 $u = \varphi(x)$ 的值域 $W \subset D_1$, 则称 $y = f(\varphi(x))$ 是由 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.
6. 初等函数: 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、重点提示

重点: 邻域、复合函数、分段函数、定义域、函数性质.

难点: 复合函数的复合过程.

三、疑点解析

1. 邻域 $U(a, \delta)$ 与去心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$ 有什么区别与联系?

答 邻域 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ 是一个完整的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 而去心邻域 $\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 是上述区间去掉对称中心 $x = a$ 后形成的两个小开区间 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. 可见, 它们仅有包含点 a 与不包含点 a 的不同.

2. 如何确定函数的定义域?

答 常用下列方法列出不等式或不等式组确定函数的定义域:

- (1) 分式函数, 其分母不等于零;
- (2) 偶次根式函数, 其被开方式非负;
- (3) 对数函数, 其真数大于零, 底数大于零且不等于 1;

(4) 反函数的定义域是其直接函数的值域;

(5) 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域是函数 $u=\varphi(x)$ 定义域的子集, 在此子集上 $u=\varphi(x)$ 的值域包含于函数 $y=f(u)$ 的定义域之中;

(6) 具有实际意义的函数, 其定义域是其解析表达式表示函数的(自然)定义域的子集, 该子集由兼顾问题的实际意义(解联立不等式组)来确定.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是否相同?

答 一般不相同. 因为函数 $y=f(\varphi(x))$ 要求 $\varphi(x)$ 的值落在 $y=f(u)$ 的定义域内, 而 $u=\varphi(x)$ 的值域可能超出 $y=f(u)$ 的定义域, 所以复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域通常是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集. 如 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=x^2$ 的定义域分别为 $[-1, 1]$ 与 $(-\infty, +\infty)$, 复合函数 $y=f(\varphi(x))=\arcsin x^2$ 的定义域 $[-1, 1]$ 是 $u=\varphi(x)=x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的子集.

四、典型例题分析与习题详解

例 1 填空.

(1) 设 $f(e^x-1)=x^2+1$, 则 $f(x)=$ _____.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} \varphi(x), & -1\leq x<0, \\ \sqrt{x-x^2}, & 0\leq x\leq 1, \end{cases}$ 则 $\varphi(x)=$ _____ 时 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数.

解 (1) 设 $e^x-1=t$, 则 $x=\ln(1+t)$, $f(t)=1+\ln^2(1+t)$, 即 $f(x)=1+\ln^2(1+x)$.

(2) 由 $f(x)=-f(-x)=\varphi(x)$, 知 $\varphi(x)=-\sqrt{-x-(-x)^2}=-\sqrt{-x-x^2}$.

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义, 必须有 $\begin{cases} 16-x^2\geq 0, \\ \sin x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\leq x\leq 4, \\ 2n\pi<x<2n\pi+\pi, \quad n\in\mathbf{Z}, \end{cases}$ 则所求

定义域为 $(-4, -\pi)\cup(0, \pi)$.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\geq 1, \\ x^2, & |x|<1, \end{cases} g(x)=\lg x$, 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

解 (1) $f(g(x))=\begin{cases} \lg x, & |\lg x|\geq 1, \\ (\lg x)^2, & |\lg x|<1 \end{cases}$

$$=\begin{cases} \lg x, & 0<x\leq \frac{1}{10} \text{ 或 } x\geq 10, \\ (\lg x)^2, & \frac{1}{10}<x<10. \end{cases}$$

(2) $g(f(x))=\lg f(x)$, 故必须 $f(x)>0$.

当 $|x|\geq 1$, 即 $x\leq -1$ 或 $x\geq 1$ 时, $f(x)=x$, 显然 $x\leq -1$ 时 $\lg x$ 无意义, 故

$$g(f(x))=\lg f(x)=\lg x \quad (\text{当 } x\geq 1 \text{ 时});$$

当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时, $f(x)=x^2$, 显然 $f(0)=0$ 不符合 $f(x)>0$ 这一要求, 故 $x=0$ 不在 $g(f(x))$ 定义域内, 故

$$g(f(x))=\lg f(x)=\lg x^2 \quad (\text{当 } -1<x<0 \text{ 或 } 0<x<1 \text{ 时}).$$

综上, 知

$$g(f(x)) = \begin{cases} \lg x, & x \geq 1, \\ \lg x^2, & -1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

例 4 指出复合函数 $y = \tan^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 是如何复合而成的.

解 函数 $y = \tan^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 是由 $y = u^3, u = \tan v, v = w^{-\frac{1}{2}}, w = 1-x^2$ 复合而成.

例 5 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ 的反函数.

分析 求反函数的一般步骤:(1)从直接函数 $y = f(x)$ 解出 x 的表达式;(2)对换变量 x, y , 即得所求反函数;(3)直接函数的值域即为反函数的定义域.

解 (1) $x > 0$ 时, 由 $y = 1+x^2$ 得 $x = \sqrt{y-1}, y > 1$;

(2) $x = 0$ 时, $y = 0$, 由函数 $y = f(x)$ 的表达式知 $y = 0$ 时 $x = 0$;

(3) $x < 0$ 时, 由 $y = -1-x^2$ 得 $x = -\sqrt{-y-1}, y < -1$.

综上, 知 $x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y > 1; \\ 0, & y = 0; \\ -\sqrt{-y-1}, & y < -1, \end{cases}$ 即

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1; \\ 0, & x = 0; \\ -\sqrt{-x-1}, & x < -1. \end{cases}$$

例 6 某商场以每件 a 元的价格出售某商品, 若顾客一次购买 50 件以上, 则超出 50 件的商品以每件 $0.8a$ 元的优惠价出售. (1) 试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数; (2) 若每件商品的进价为 b 元, 试写出一次成交的销售利润 L 与销售量 x 之间的函数关系式.

分析 要建立函数关系式, 理解题意后设出自变量和因变量, 找出变量间的关系, 这种关系用解析式或方程表示出来就是所要建立的函数关系式. 本例中, 销售单价按不同的销售量而定, 故销售收入、销售利润与销售量 x 的关系是分段函数关系. 销售收入 $R = \text{销售单价} \times \text{销售量}$; 销售利润 = 销售收入 - 销售商品成本.

解 (1) 由题意知, 当 $0 \leq x \leq 50$ 时, 销售价为 a 元/件, 故

$$R(x) = ax;$$

$x > 50$ 时, 50 件内售价 a 元/件, 其余 $(x-50)$ 件售价 $0.8a$ 元/件, 故

$$R(x) = 50a + 0.8a(x-50) = 0.8ax + 10a.$$

即

$$R(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 50; \\ 0.8ax + 10a, & x > 50. \end{cases}$$

(2) 易知销售 x 件商品的商品成本为 bx 元, 故

$$L(x) = R(x) - bx = \begin{cases} ax - bx, & 0 \leq x \leq 50; \\ 0.8ax - bx + 10a, & x > 50. \end{cases}$$

第二节 极限的概念

一、知识点复习

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的概念, 几个常见的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0 (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1; \\ \infty, & |q| > 1; \\ 1, & q = 1; \\ \text{不存在}, & q = -1. \end{cases}$$

2. 函数 $y = f(x)$ 在自变量 x 趋向于有限值 x_0 时极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 及左、右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义.

3. 函数 $y = f(x)$ 在自变量 x 趋向于 ∞ 时极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义.

4. 极限的性质(唯一性、有界性等), $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充要条件.

5. 水平渐近线的定义及其求法.

二、重点提示

重点: 理解极限概念, 知道极限的性质(如唯一性、有界性), 掌握左、右极限的关系.

难点: 用定义证明极限.

三、疑点解析

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 定义中的 N 是不是 ϵ 的函数?

答 N 与正数 ϵ 有关, 但却不能说 N 是 ϵ 的函数. 因为对给定的任意小正数 ϵ , 若可以找到满足条件的一个正整数 N_0 , 那么任何一个大于 N_0 的正整数都可作为 N . 这就是说, N 的值依赖于给定的 ϵ 但并不由 ϵ 唯一确定, 因此按函数定义知 N 不是 ϵ 的函数.

2. 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 的敛散性是否相同?

答 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{|x_n|\}$ 也收敛, 且当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. 这是因为 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 从而

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon.$$

若 $\{|x_n|\}$ 收敛, $\{x_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 如: $\{|(-1)^n|\}$ 收敛, 但 $\{(-1)^n\}$ 发散; 而数列 $\left\{\left|\frac{1}{n}\right|\right\}$ 与 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 都收敛于零.

3. 为什么在函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中要规定 $|x - x_0| > 0$?

答 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 就是指自变量 $x \rightarrow x_0$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数

A, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义, 有定义时 $f(x_0)$ 等于什么, 都不影响 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势, 所以规定 $|x - x_0| > 0$ 就拓宽了研究函数极限的范围.

4. 讨论函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 时, 在什么情况下要考虑左、右极限? 求左、右极限时是否都得用定义去求?

答 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 通常要先观察左、右极限的情况. 当左、右两侧变化趋势一致时不必分开讨论; 若两侧变化趋势可能有差别时, 则应分别考虑左、右极限. 例如, 求分段函数在分段点处的极限 (特别是分段点两侧函数的表达式不同时), 必须研究左、右极限; 有些三角函数、反三角函数、指数函数等在特殊点处的左、右极限也不一样, 如 $\arctan \frac{1}{x} (x \rightarrow 0), e^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0)$.

求左、右极限不必都用定义求. 如求 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. 由于左、右极限不相等, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

四、典型例题分析与习题详解

例 1 已知数列 $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

分析 证明数列是发散的, 通常可采用下列两种方法: (1) 找两个极限不相等的子数列; (2) 找一个发散的子数列.

证明 考虑子数列 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$. 由

$$x_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$x_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \frac{2n}{2n-1} = -\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) = -1 - \frac{1}{2n-1} \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

可见数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

例 2 求曲线 $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$ 的水平渐近线.

分析 求水平渐近线, 只要求 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = f(x)$ 的极限.

解 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3-x}}{3-x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3-x}}{3-x} = \infty$ 知, $y = 0$ 即为所求的水平渐近线.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x-2, & |x| > 1, \end{cases}$ 试讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

分析 讨论分段函数在分段点处的极限, 通常从左、右极限入手.

解 由题意知

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < -1; \\ x, & -1 \leq x \leq 1; \\ x-2, & x > 1. \end{cases}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

由 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 不存在.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x > 0, \\ ax+2, & x < 0, \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 求 $f(-1)$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

可得 $a=2$, 从而 $f(-1) = 2 \times (-1) + 2 = 0$.

第三节 无穷小 (大) 与极限运算法则

一、知识点复习

1. 无穷小、无穷大的定义及其相互关系.
2. 无穷小与函数极限的关系.
3. 铅直渐近线.
4. 无穷小的运算法则.
5. 极限运算法则(四则运算法则、复合函数运算法则等).

二、重点提示

重点: 无穷小的运算法则、极限运算法则.

难点: 用定义证明无穷小(大)、化为四则运算形式求极限.

三、疑点解析

1. 能否说无穷小是越来越小的数, 而无穷大就是越来越大的数?

答 都不能. 在自变量的某个变化过程中, 以零为极限的函数叫作无穷小. 除零(零是可以看作无穷小的唯一的常数)以外, 其它无穷小不是任何固定的数, 而是变量, 所以既不能把无穷小看成越来越小的数, 也不能说无穷小是很小的数.

同理, 在自变量的某个变化过程中, 对应函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大时就称 $y=f(x)$ 是该过程中的无穷大. 它是变量而不是数, 也不是很大的数. 如 10^{500} 是很大的常数, 不是无穷大. 注意, 无穷大是极限不存在的变量, 符号 $\lim f(x) = \infty$ 是借用极限的记号, 只表示 $f(x)$ 是无穷大.

2. 在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷小, $\frac{1}{f(x)}$ 是否一定为无穷大?

答 当 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x)$ 不恒为零, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大; 若 $f(x) \equiv 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 无意义, 不是无穷大.

3. 函数极限存在时, “有限个函数的和的极限等于极限的和”这一法则能否说成“函数

的和的极限等于极限的和”?

答 不能,因为这一法则对无限个函数的和求极限不适用. 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \\ = 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 0$$

这一做法是错误的,因为当 $n \rightarrow \infty$ 时,上式是无限项的和求极限,不能用和的极限运算法则. 正确做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

4. 对 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \arctan x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = 0$, 运算正确吗?

答 运用极限运算法则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 的前提是 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 均存在. 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在, 所以该题不能用积的极限运算法则.

正确的做法是: 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 而无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小,

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \arctan x = 0$.

四、典型例题分析与习题详解

例 1 指出下列函数哪些是无穷小, 哪些是无穷大.

$$(1) \frac{x}{x^2-9} \quad (x \rightarrow 3); \quad (2) \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(3) \ln x \quad (x \rightarrow 1); \quad (4) e^{\frac{1}{x}} \quad (x \rightarrow 0).$$

分析 由定义判定无穷小或无穷大需要判断其极限是零或 ∞ .

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2-9} = \infty$, 所以当 $x \rightarrow 3$ 时, $\frac{x}{x^2-9}$ 是无穷大.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 是无穷小.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\ln x$ 是无穷小.

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在, 从而 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$ 既不是无穷小, 也不是无穷大.

例 2 求曲线 $y = \frac{4}{x^2-2x-3}$ 的铅直渐近线.

分析 若 $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $y = f(x)$ 是无穷大, 则 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

解 由 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x^2-2x-3} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2-2x-3} = \infty$ 知, $x = -1, x = 3$ 即为所求的铅直渐近线.

例 3 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}.$$

分析 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 不能直接利用四则运算法则, 故先对分子、分母进行恰当的因式分解, 出现相同的零因子, 约分后再利用四则运算计算.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} (2x-3)^{15}}{(3x-1)^{15} (2x+1)^{10}}.$$

分析 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限, 不能直接利用四则运算法则, 故先将分子、分母同除以分母的最高次幂, 然后再计算.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} (2x-3)^{15}}{(3x-1)^{15} (2x+1)^{10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}}{\left(3 - \frac{1}{x}\right)^{15} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{10}} = \frac{2^{15}}{3^{15} \cdot 2^{10}} = \frac{2^5}{3^{15}}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 1}).$$

分析 这是 $\infty - \infty$ 型极限, 先使其根式有理化, 化为 $\frac{\infty}{\infty}$, 再将分子、分母同除以分母的最高次幂后再计算极限.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2) - (n^2 - 1)}{\sqrt{n(n+2)} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+2)} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = 1. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$$

分析 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限, 将分子、分母同除以 $\sqrt{x^2}$ (注意 $x \rightarrow -\infty$), 再根据复合函数求极限法则计算. 掌握各种恒等变形的技巧 (如有理化、分解因式、通分、分子分母同除以某一因子, 等等) 是计算此类极限的关键.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{2-1}{1} = 1.$$

$$\text{例 4} \quad \text{已知} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b \right) = 3, \text{求常数 } a, b.$$

分析 已知极限值, 求函数式中待定常数的一般方法是: 在极限存在的前提下, 找出参数所满足的方程组, 求出参数的值. 本题所给极限是 $\infty - \infty$ 型, 通分将其转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 再利