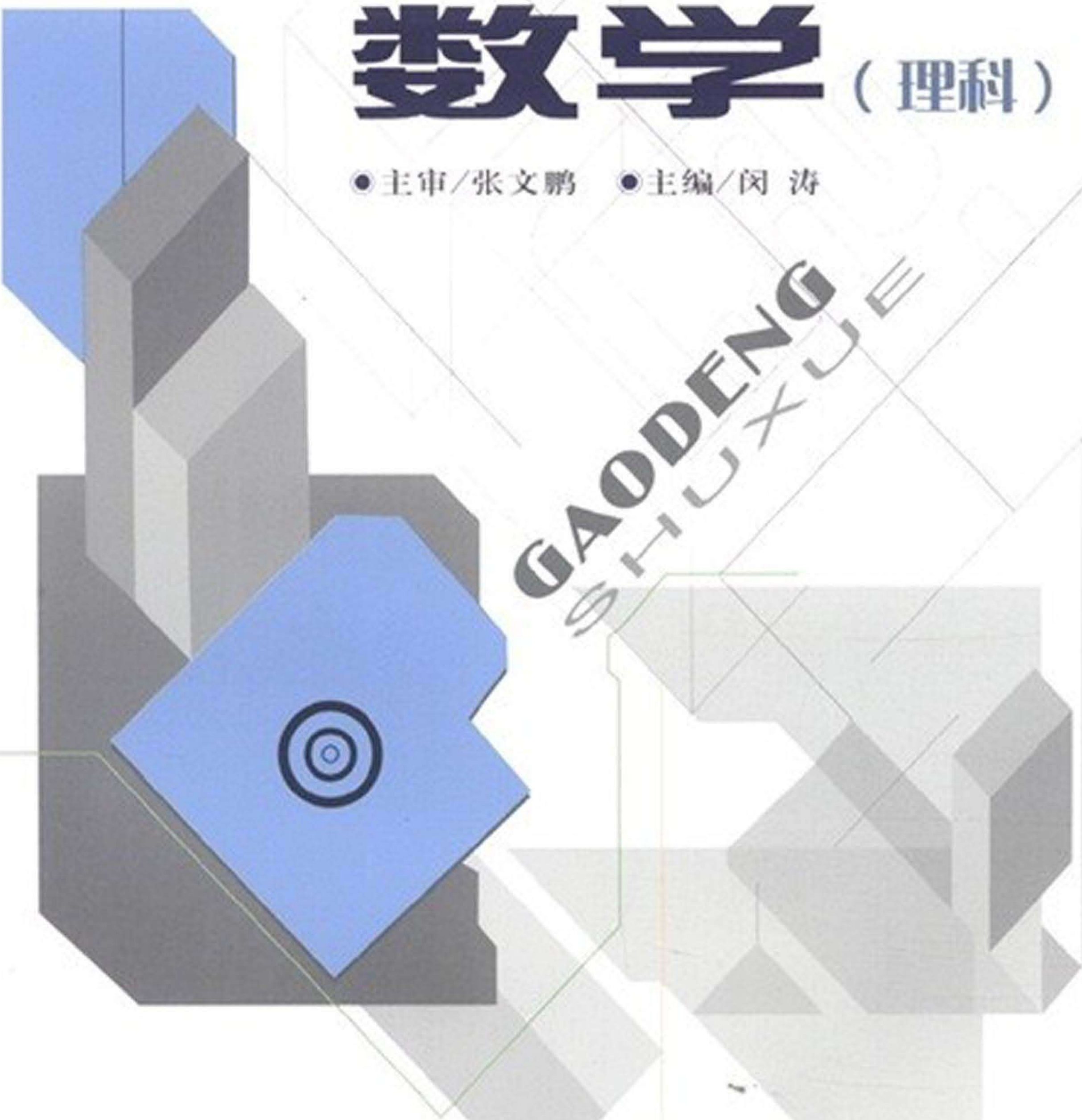
● 21世纪继续教育系列规划教材
● 陕西省成人继续教育教学改革研究项目

高等数学（理科）

●主审/张文鹏　●主编/闵　涛

GAODENG SHUXUE



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

前 言

随着我国高等教育从精英教育进入大众化教育的发展阶段，高等教育在不同层次上的建设已经不可避免。近年来我省成人高等教育迅速发展起来，并已成为时代不可忽视的潮流之一。然而目前还缺乏适用于这类学生的教材，本书就是针对我省成人高等教育的教学需要而编写的，汲取了以往成人教育数学教学改革的经验，整合重点高校的的教学优势，又注意到新的数学思想和现代化的教学手段的应用，因而该教材具有以下几个特点：

1. 贯彻以应用为目的，以必需、够用为原则，加强数学知识的应用。以“少而精”的教学原则，精选和安排教学内容，突出“三基”，即基本概念、基本理论和基本方法，强化对最基本内容要求，特别是常用函数及其图形、导数与积分的概念与计算方法的训练。

2. 强调数学的思想和方法。在阐述一些重要概念与定理时，以具体例子为先导，从具体到抽象，使学生从实例中了解问题的由来，掌握分析和解决问题的思路，减少理解上的障碍。在确保教学内容整体框架的逻辑完整性的前提下，适度地减弱数学理论的严密性，如复杂定理的证明及技巧性较高的证明题等。为了适应不同专业和不同层次的教学需要，对部分内容打“*”号，这些内容可以不讲或者选讲。

3. 为了适应我省成人这一特殊层次人才培养的需要，本书重点加强了应用性的例题和习题及解题的思想方法。在讲解微积分应用时，强调微积分的核心思想——“微元法”，并用它来指导分析和解决实际应用问题。

4. 注重教材具有科学性和逻辑性的前提下，更注意培养学生科学的、良好的思维习惯，提高学生的学习素质。全教材力求做到逻辑严谨，层次分明，清晰易懂，便于自学。

本书分八章：第一章，函数、极限与连续；第二章，导数与微分；第三章，中值定理与导数的应用；第四章，一元函数积分学及应用；第五章，多元函数的微分学；第六章，重积分；第七章，常微分方程；第八章，无穷级数。

本书第一章及附录由闵涛编写；第二、三章由张世梅编写；第四章由王宁编写；第五章由李俊兵编写；第六、七章由任春丽的编写；第八章由张海琴编写。全书由闵涛教授负责组织、统稿、修订和定稿。

本书可作为成人本、专科理工类各专业教学的教材使用，个别打“*”号的内容可供不同专业或不同层次学生选用。本书也可作为高等职业教育和网络教育的教学用书或参考书。

本书在编写过程中，虽然对各章节内容均进行了仔细审核，但错误和不妥之处在所难免，欢迎同行和读者不吝指正。

编　者

2009 年 12 月于西安

目　　录

绪　论

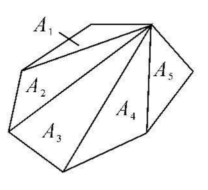
高等数学是高等学校理工科各专业核心课程之一，也是理工科学生应掌握的最重要的基础核心课程之一.同时，它所提供的数学思想、数学方法、理论知识是学生学习后续课程的重要工具和基础.

什么是高等数学?培养学生哪些能力?怎样才能学好高等数学?按教学大纲要求，高等数学的内容包括一元函数的微积分学、多元函数的微积分学、微分方程、无穷级数等.在学习的过程中重点培养学生 ① 抽象概括能力；② 逻辑推理能力；③ 空间想象能力；④ 自学能力；⑤ 比较熟练的计算能力；⑥ 综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.这些对学生来说将受益一生.至于如何学好数学呢?编者给出学习八字方针："听懂、练会、学好、用活."

下面我们以高等数学中最重要的微积分给出具体说明.微积分是现实世界最出色的数学模型之一.微积分与中学学习过的数学内容有较大的区别．微积分研究的是变动的量，而不是静止的量，关注的是变化和运动，处理的是变量与变量之间的关系以及变量的变化趋势的问题．在深入学习微积分的内容之前，为了对这门学科的概貌有一个总体了解．在这里我们将说明人们在解决各种不同问题过程中是怎样形成极限的概念，从而使读者对微积分的主要思想获得一个初步的印象.

1. 面积问题

微积分的起源可追溯到2500年前的古希腊，那时的希腊人在计算一些图形面积时，使用了所谓的"穷竭法". 当时已经知道了怎样计算多边形的面积，他们先把多边形分成若干个三角形(如图0.1)，然后把这些三角形的面积累加起来．然而计算曲边形的面积却要困难得多.古希腊人的"穷竭法" 就是先计算图形的内接多边形和外切多边形的面积，然后让多边形的边数不断增加．图 0.2 表示了他们利用内接正多边形来计算圆的面积的过程.



$A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$

图 0.1

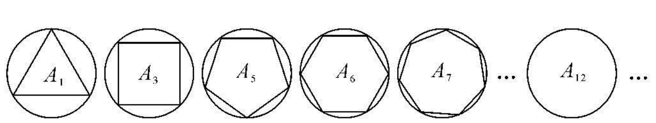


图 0.2

设 A_n 为圆的内接正 n 边形的面积，当 n 不断增加时，显然 A_n 变得越来越接近于圆的面积.我们就说圆的面积是它的内接正多边形面积的极限，并记作

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n. \tag{0-1}$$

古希腊人当然还没有明确的使用极限的概念．然而通过间接推理，欧多克斯（Eudoxus，公元前5世纪）使用“穷竭法”证得了我们熟知的圆面积公式：$A = \pi r^2$.

我国魏晋时数学家刘徽（公元3世纪）也使用了同样的方法（他称此方法为“割圆术”）来推算圆的面积，他曾正确的计算出圆的内接正3072边形的面积，从而得到圆周率精度很高的近似值：$\frac{3927}{1250}$，写到前四位小数，即为3.1416.

面积问题是微积分的一个重要分支——积分学的中心问题，在第四章中我们将推导出计算面积的一般方法．这种方法还可以用于计算立体的体积、曲线弧的长度、水坝所受到的水压力、棒的质量和中心，以及抽出水箱中的水所做的功等等.

2．速度问题

如果我们观察汽车的速度表，发现指针指在80km/h（公里／小时），这个读数表示什么意义呢？我们知道假如在此时刻以后汽车的速度保持不变，那么经过一个小时，汽车将行进80公里．但是，如果汽车的速度是变化的，那么“汽车在某时刻的速度是80km/h”又表示什么意义呢？

为了探讨这个问题，让我们分析一辆在直路上行驶的汽车的运行状况．假定我们可以测出每秒钟汽车行进的距离（以米为单位），其结果如表0.1所示：

表 0.1

t = 时间（秒）	0	1	2	3	4	5
d = 距离（米）	0	0.6	3.0	7.6	12.6	24.0

为了求出2秒钟末这一时刻的速度，作为第一步，我们先求出时间段$2 \leqslant t \leqslant 4$内的平均速度：

$$\text{平均速度} = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} = \frac{12.6 - 3.0}{4 - 2} = 4.8(\text{米} / \text{秒}).$$

类似的可求出时间段$2 \leqslant t \leqslant 3$内的平均速度：

$$\text{平均速度} = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} = \frac{7.6 - 3.0}{3 - 2} = 4.6(\text{米} / \text{秒}).$$

按人们的直觉，在$t = 2$时速度与从$t = 2$起始的一个短时间段内的平均速度应该是很接近的．于是我们测出在0.1秒时间段内汽车所行驶的距离（见表0.2).

表 0.2

t = 时间（秒）	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d = 距离（米）	3.05	3.36	3.71	4.10	4.56	5.12

这样我们就能计算比如在时间段[2,2.5]内的平均速度：

$$平均速度 = \frac{距离}{时间} = \frac{5.12 - 3.05}{2.5 - 2} = 4.14(米/秒).$$

我们把计算结果列于表 0.3.

表 0.3

时间段	[2,3]	[2,2.5]	[2,2.4]	[2,2.3]	[2,2.2]	[2,2.1]
平均速度（米/秒）	4.6	4.14	3.78	3.50	3.30	3.10

在这一系列不断缩短的时间段内的平均速度看来越来越接近于 3 邻近的一个数，因此我们认为恰在 $t=2$ 这一时刻的速度大约为 3 米/秒. 在第二章里我们将把一个运动物体的瞬时速度定义为越来越缩短的时间段上的平均速度的极限.

在图 0.3 中，我们画出了汽车行驶的距离与所花的时间的函数关系的图形，记此函数为 $d=f(t)$，则 $f(t)$ 即表示 t 秒后汽车行驶的距离，在时间段 $[2,t]$ 内的平均速度为

$$平均速度 = \frac{距离}{时间} = \frac{f(t)-f(2)}{t-2}.$$

其数值即为图 0.3 中割线 PQ 的斜率，而 $t=2$ 这一时刻的速度 v 即为上述平均速度当 t 趋于 2 时的极限：

$$v = \lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2} \tag{0-2}$$

(0－2) 式它等于图 0.3 中曲线 $d=f(t)$ 在点 P 处的切线的斜率. 这样便解决了关于速度的问题，用同样的方法，还能解决自然科学和社会科学中出现的各种“变化率”问题.

微积分的两大分支及各自研究的主要问题看起来差异很大，但终于由牛顿、莱布尼茨揭示了两者之间的紧密关系，这标志着微积分学的大体建成，并成为近代数学发展史上的一个高峰.

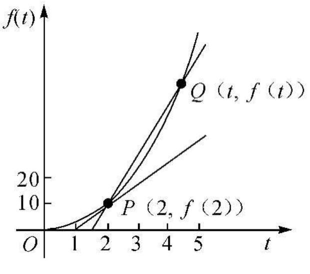


图 0.3

3. 数列极限及级数和的问题

公元前 5 世纪，古希腊哲学家、埃利亚学派代表人物芝诺(Zeno of Elea) 提出了四个问题，对当时流行的有关空间和时间的一些观念进行诘问. 这四个问题非常出名，后来被通称为芝诺四大悖论，其中的第二个悖论“阿基里斯与龟”是这样的：

阿基里斯(传说中的希腊英雄) 与乌龟进行赛跑，假如出发时乌龟领先一段路程的话，那么阿基里斯将永远追不上乌龟. 芝诺是这样论证的：假如阿基里斯和乌龟的出发位置分别为 a_1 和 b_1(见图 0.4) 当阿基里斯到达位置 $a_2=b_1$ 时，乌龟已到达前面的位置 b_2，而当阿基里斯到达 $a_3=b_2$ 时，乌龟又跑到了更前面的位置 b_3. 这个过程将无限地继续进行下去，因此乌龟将永远领先于阿基里斯.

这个结论显然是与常识相背离的.

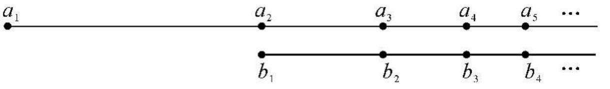


图 0.4

解释这个悖论的一个方法要利用到数列的概念. 阿基里斯的相继位置 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 和乌龟的相继位置 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 各构成一个"数列".

一般的,数列 $\{a_n\}$ 是一列按确定次序排列起来的无限多个数,比如说数列 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\}$ 可用公式表成

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

我们可在数轴上把数列直观地表示出来,如图 0.5(a) 所示,也可在坐标系中把数列的图形画出来,如图 0.5(b) 所示.

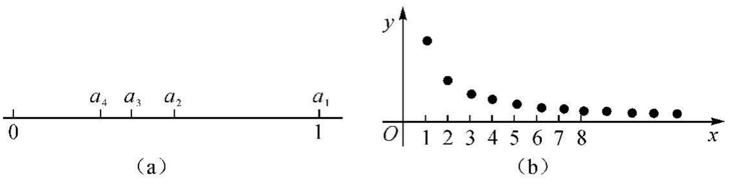


图 0.5

从这两个图中都可看到,当 n 增加的时候,数列的项 $a_n = \frac{1}{n}$ 越来越趋近于 0. 亦即只要让 n 足够大,就能使 a_n 任意地接近于 0,我们把这一事实记作

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

一般地,如果当 n 无限增大时,a_n 无限趋近于常数 L,就是说,只要 n 充分大,那么我们要 a_n 与 L 多么接近,它们就能变得那么接近,我们就说 a_n 的极限是 L,并记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

当我们用十进制小数来表示一个实数的时候,我们就用到数列极限的概念. 举例说:如果 $a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415, a_5 = 3.14159, a_6 = 3.141592, a_7 = 3.1415926, \cdots$,那么就有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pi$.

这个数列中的项均为 π 的有理近似值.

现在再来看芝诺悖论,阿基里斯和乌龟的相继位置分别构成数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$,其中 $a_n < b_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 利用关于数列极限的定义,可以证明两个数列具有相同的极限

$$\lim_{n \to \infty} a_n = P = \lim_{n \to \infty} b_n. \tag{0-3}$$

这就表明恰在这共同的极限 P 表征的位置处,阿基里斯赶上了乌龟.

在古希腊亚里士多德的著作中记述的另一个芝诺悖论是这样的:

站在屋子中间的一个人将永远走不到屋子的墙边.为了走到墙边,他先要走完到墙边的一半距离,为了走完剩下的一半距离,他又要走完这个距离的前一半,如此等等.这个过程将无限制地继续下去,永远不会完结(见图0.6).

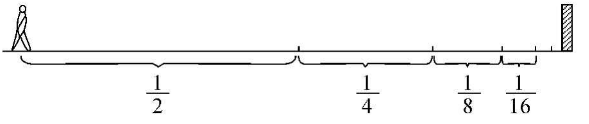


图0.6

我们从常识知道,人终将走到墙壁,这一事实似乎说明,人到墙边的总距离可以表达为无限多个较小距离之和:

$$I=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots. \qquad (0-4)$$

芝诺的论点就是把无穷多项的数加起来时是没有意义的,然而事实上,我们在很多场合早就隐性地使用着这里的"无限多项之和".比如,十进制循环小数$0.\dot{3}=0.333\cdots$就表示$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$,因此在某种意义上,下列"等式"必为真.

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots=\frac{1}{3}.$$

一般地,若d_n表示一个数的十进制小数部分的第n位数字,则

$$0.d_1d_2d_3d_4\cdots=\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\cdots+\frac{d_n}{10^n}+\cdots.$$

因此看来,某些类型的"无穷多项之和"(或称为"无穷级数")应该是有确定意义的.然而我们仍需仔细地规定什么是无穷级数之和.

回过头来再分析(0-4)式中的无穷级数,以S_n表示级数的前n项的和(称为前n项的部分和),于是有

$$S_1=\frac{1}{2}=0.5,$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0.75,$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=0.875,$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0.9375,$$

$$S_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=0.96875,$$

$$S_6=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=0.984375,$$

$$S_7=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=0.9921875,$$

……

$$S_{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1024}\approx 0.99902344,$$

……

$$S_{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{16}}\approx 0.99998474.$$

可以看出，当我们将越来越多的项相加时，部分和就越来越接近 1. 事实上我们可以证明：只要 n 取得足够大(就是说，将级数的足够多的前面的项相加起来)，我们就可使部分和与 1 任意地接近. 就是说，我们要使部分和 S_n 与 1 有多么接近，它就能变得那么接近. 于是我们有理由认为这个无穷级数的和 S_n 是 1，并写作

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

换言之，级数的和等于 1 的理由是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1. \tag{0-5}$$

综上所述，人类在解决以上各种问题的过程中，逐步形成了极限概念. 不管每个问题的具体内容，其共同的主题就是计算某个数量，这个数量是其他的易于算出数量的极限. 就是这个非常基本的极限概念，使得微积分明显地区分于其他的数学分支. 事实上，我们可以把微积分说成是处理极限问题的数学分支.

牛顿当初是在解释行星围绕太阳运动规律的研究中创立微积分的，而今天微积分已变成一种应用广泛的数学工具. 它不仅用于计算人造卫星和宇宙飞船的轨道，用于天文学、核物理、电子学、热力学、声学、机械设计、化学反应、有机物的繁殖、天气预报以及保险费率等的计算领域，还可以用于解决日常生活中的许多问题，诸如如何设置篱笆以使所围得面积达到最大，如何确定最经济的汽车行驶速度等等. 在本书中，我们将详细地讨论微积分的基本理论、方法及其在某些领域的应用.

第一章　函数、极限与连续

初等数学主要以常量为研究对象，而高等数学则是研究变量的数学. 作为变量与变量之间依赖关系的函数是微积分的研究对象，极限的方法是研究变量数学的一种基本方法. 本章主要介绍函数、极限和连续性等基本概念及其性质. 掌握、运用好这些基本理论和方法是学好高等数学的关键，也可为今后的学习打下必要的基础.

1.1　函数的概念

1.1.1　区间与邻域

区间是一类实数的集合，它是某种介于两个实数之间的全体实数的集合. 如数集$\{x \mid a < x < b\}$和$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$都是区间，其中两个实数 a 和 b 称为**区间端点**. 在$\{x \mid a < x < b\}$中不包含区间的端点，称为**开区间**，用(a,b)表示，即$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$. 在$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$中包含区间的端点，称为**闭区间**，用$[a,b]$表示，即$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. 两个端点之间的距离称为**区间长度**.

类似的，还有两种**半开半闭区间**：$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

如果区间的端点为有限值，则称为**有限区间**. 此外，还有**无限区间**，无限区间主要有：$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$，$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$，$(-\infty,a) = \{x \mid x < a\}$，$(-\infty,a] = \{x \mid x \leqslant a\}$，$(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$.

需要说明的是，∞ 只是一个记号，它并不是一个数，因此与之相伴的一定是圆括弧.

在高等数学中，经常会用到一个特殊的开区间$(a-\delta,a+\delta)$，$(\delta > 0)$，它表示的是数集$\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

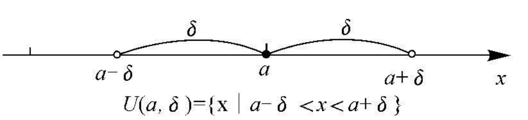


图 1.1

其中 a 为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**（如图 1.1 所示）.

通常邻域半径 δ 都取很小的正数，所以点 a 的 δ 邻域表示 a 的邻近点的集合. 若去掉邻域的中心，所得到的邻域称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

1.1.2 函数概念

圆的面积 A 依赖于圆的半径 r. 把 r 与 A 联系起来的规则是用公式 $A = \pi r^2$ 给出的. 对于每个正数 r 对应地给出 A 的一个值,这时我们就说 A 是 r 的一个函数.

邮件的费用 C 依赖于邮件的重量 w. 在邮局公布的收费表可根据邮件重量 w 确定费用 C.

这些例子来自不同领域,但是他们有一些共同的特征. 首先,每一个例子都描述了联系两个量之间的对应规则,在适当范围内给出一个量 r,w 时,则另一个量 A,C 就根据各自的规则被确定了. 这时,我们把第二个量称为第一个量的函数.

确切地,给出函数定义如下:

定义 1.1 设 A 和 B 是两个非空的实数集合,如果存在一个对应规则 f,使得对集合 A 中的每个元素 x,按此规则 f 能在集合 B 中确定唯一一个元素 y,则称这个对应规则 f 为集合 A 到集合 B 的**函数**,记作

$$f: x \mapsto y$$

或

$$y = f(x)$$

集合 A 称为函数的**定义域**,记作 $D(f)$ 或 D_f.

数值 $f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的值,即**函数值**. 当 x 在定义域中变化时,$f(x)$ 的全体值的集合称为函数 f 的**值域**,记作 $R(f)$ 或 R_f,

$$R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

通常函数值域 $R(f) \subseteq B$.

表示函数 f 的定义域中的任意值的符号称为**函数的自变量**,表示函数 f 的值域中的任意值的符号称为**函数的因变量**.

在函数的定义中,自变量和因变量采用什么符号不是关键的,重要的是表示这两个量间的对应规则和函数的定义域. 例如函数 $y = f(x)$ 和 $s = f(t)$ 虽然他们自变量和因变量采用了不同的符号,只要对应规则 f 是同一个,定义域相同,他们就是相同的函数.

把使对应法则有意义的全体实数组成的集合称为函数的**定义域**,有时称它为函数的**自然定义域**.

例 1 求函数 $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ 的定义域.

解 负数的平方根在实数范围内是没有意义的,因此函数 f 的自然定义域是由不等式

$$2 - x - x^2 \geqslant 0$$

成立的所有 x 的值组成的集合. 利用因式分解,表达式 $2 - x - x^2 = (2 + x)(1 - x)$.

因此,函数 f 的定义域为 $D(f) = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\} = [-2,1]$.

例 2 一个无盖长方体形的容器(如图 1.2),容积为 10 立方米,底面的长度是宽度的两倍. 底面材料的价格为每平方米 800 元,边墙材料每平方米 480 元. 试把容器的材料费表示为