

李秋明 张雄 顾问

Mathematics
考试指南

尝试被数学打动

——文化观下高中数学课堂教学设计

徐波 著



上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

尝试被数学打动:文化观下高中数学课堂教学设计/
徐泼著. —上海:上海人民出版社, 2016
ISBN 978-7-208-13783-7

I. ①尝… II. ①徐… III. ①中学数学课-课堂教学-
教学设计-高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 094728 号

责任编辑 刘 硕

封面设计 汪 昊

尝试被数学打动

——文化观下高中数学课堂教学设计

徐 泼 著

世 纪 出 版 集 团

上海人民出版社出版

(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co)

世纪出版集团发行中心发行 上海商务联西印刷有限公司印刷

开本 720×1000 1/16 印张 18.75 插页 2 字数 238,000

2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-208-13783-7/G · 1798

定价 48.00 元

序

有一段时间,基础数学教育难得地成为一个热门话题,一则是我们的学生在 PISA 考试中遥遥领先,取得全世界第一,教育界内外一片欢腾;一则是正值高考改革之际,网友一片呼声,要求降低中学数学难度,甚至提出要将数学赶出高考。数学教育的“喜”与“悲”戏剧性地交织在一起,使教育界内外的人都莫名其妙,基础数学教育到底怎么了?

其实问题并不复杂,一切皆可在基础数学教育的现状中找到原委。柯朗先生在他的名著《什么是数学——对思想和方法的基本研究》的序言中这样写道:“今天,数学教育的传统地位陷入了严重的危机之中。而且遗憾的是,数学工作者对此负一定的责任。数学教学有时竟变成一种空洞的解题训练。这种训练虽然可以提高形式推导的能力,但却不能导致真正的理解与深入的独立思考。……教师、学生和一般受过教育的人都要求有一个建设性的改造,其目的是要真正理解数学是一个有机整体,是科学思考与行动的基础。”这篇序言虽写于 1941 年,但却精准地刻画了 70 多年后的今天,我们的基础数学教育中存在的一个最严重的问题。

目前我们的数学教育中的一个主要问题是割裂了数学知识与其背后的思想、文化之间的有机联系,只有一个个孤立的知识点与题目,却没有鲜活的过程和体验。任何一个数学概念的产生都不是天上掉下来的,数学的发展既有内部需要,也有外部力量推动等因素,这都是非常宝贵的数学文化资源。越来越多的教师认识到,我们应该从文化的角度和人的成长角度思考数学教育。数学是自然科学的基础是公认的事实,数学教育工作者的眼光不应该局限于数学知识的简单直接运用,而应该关注数学教育的育人价值和文化遗产。正如读唐诗并没有多少简单直接的运用,但是几乎没有人会质疑读唐诗有什么用。这是因为人们都认同

唐诗是中国传统文化,其中蕴含着重要的育人价值和文化遗产。即所谓的“不用之用”。

虽说数学教育的现状不令人满意,但许多有责任心的教师在追求改变,他们思考、探索如何在数学教学中渗透数学文化,体现数学的育人价值与文化遗产。来自教学一线的嘉定一中的徐泼老师就是其中的一位。徐老师的探索不只停留在数学史、数学家、数学与社会等广义层面上的数学文化,她将数学文化的落实与高中生的数学学习内容紧密地结合在一起,在引领学生经历数学概念、方法的形成和发展的过程中,揭示数学的内涵,体验用数学的观点观察现实,构造数学模型,学习数学的语言、图表、符号表示,进行数学交流。通过理性思维,培养严谨素质,追求创新精神,欣赏数学之美。

在这本书中徐老师不仅与大家共享她的思考与观点,还提供了大量有价值的教学案例以及教学实践中的具体做法。书中案例的选择、教学重点的确立与难点的突破等各方面都体现了徐老师的匠心,做到了数学文化与教学内容有机融合,有较高的参考价值。书中所有的内容都源自于徐老师的基础课与拓展课的教学实践,并在实践的基础上反思、提炼,形成了徐老师特有的干练、深邃的风格。因此该书对于如何在一线教学中传播数学文化,提升数学教育的育人价值,有着重要的示范、推广与借鉴的作用。

复旦大学附属中学 李秋明

2016 年春

前 言

十多年前,我曾鬼使神差地对“思维障碍”很有兴趣,哪怕申请不到课题,也打算一辈子做下去。跌跌撞撞地连着做了好几年和它相关的几个课题。很幸运,这些课题都被贴上了标签,如市级规划课题“思维障碍的分析、诊断与克服”、区级规划课题“良性干扰策略研究”等。因为基本上都是自己在摸索,所以有时发表了相关一两篇文章,或者是获了个奖,就觉得好像对自己研究的课题已经有个交代了。不知不觉这么多年过去了,曾经的“思维障碍”没有发展壮大,反而似乎在渐行渐远,这或许也证明了我的无能为力。

2009年10月,黄华老师来我校调研,听了我的《算法的概念》一课。因为这节课,我萌生了做“数学文化”课题的想法。再一次铁定了心,哪怕申请不到课题,也打算一辈子做下去。虽然未必有什么伟大的结果,但是人有点专业上的兴趣总还是一件好事。

中学数学老师的工作不是简单机械地解题、讲题,而是应同时包含对数学文化理解的传递。数学本身并不仅仅限于严谨的形式演绎,它的确有着这精致的一面,但同时也包含了联想、直觉等奔放的另一面。所以,在中学数学课堂教学中的教学内容应该更为丰富。我想在数学文化教育这一方向做一些努力。

我很庆幸自己断断续续的坚持和参加培训班所积累的点点滴滴,使今天的我在一股力量的牵引和推动下,因有着明确的方向而感到充实和满足。当然,时有心力、精力、能力无法平衡的无奈,也时有亢奋后带来的疲惫。

但不管怎样,“关键是做!”——李秋明老师的忠告。

“既然有想法,为什么不去开你的社团选修课呢?”——来自女儿的

鼓动。

于是,行动! 伴随而来的是,时而的疯狂、匆忙、紧张、马不停蹄,时而的懈怠、困惑、停顿、无所适从。耳边也不时回想起杨思源老师的话——有挫折才能成长! 在遭遇挫败、空白、停滞的同时,我更多的是尝到了沉浸其中的幸福,即便我所做的一切是那么微乎其微,即便在数学女王面前我渺小到近乎一粒尘埃。

好在这几年来有了一些积累,最终《数学文化观下高中数学课堂教学的探索与实践》在2014年10月顺利地贴上了区级重点课题的标签。

这本册子可以看成是关于课题所做的零零落落的杂烩,有相关理论的学习、有课堂教学的实践案例、有零星想法的提炼、有读书体会、有讲座文稿、有学生留言……现在能把它们汇总到这本册子里,即便知道一定有狭隘、片面、浅薄的地方,但我还是心满意足的,毕竟这是我“怀孕”数载的成果。

我似乎是在自己缔造的“数学文化”小王国里自娱自乐了几年。女王是我,臣民唯有一个,也是我。但我并不孤独。女儿时而为我的公开课设计出谋划策;课堂里不时会有我和我的学生欢喜雀跃的场面;身边的同事和培训班的同学愿意和我分享对数学的思考;导师则一直在我身旁,随时答疑解惑……

我经历过顾泠沅老师提纲挈领的开导;顾鸿达老师掷地有声的鞭策;李秋明和张雄老师字斟句酌的点拨;汤成超老师引领的团队氛围;杨思源老师和我茶余饭后的闲聊……

我幸运地走上了这平等、自由、开放的专业成长的平台。我可以思考自己感兴趣的方向,选择属于自己的成长道路,只为寻找幸福。

BBC 纪录片《艺术的力量》第八集,美国当代抽象派画家罗斯科说:“人们观看作品后的反应,才是唯一能使艺术家满足的东西。那些看了我的作品会哭泣的人们,体验到了当我创作这些作品时自身的体验。”

屏幕上出现了这样一幅画——暗红色的底，一个大大的白色正方形框架在正中间，白色线条粗放，边缘模糊。我不懂画，也没有高超鉴赏力。所以，我想我是无论如何也不会被这样一幅画打动的。

我一边凝视着屏幕上的这幅画，一边听着主持人西蒙的讲述：

“再看看这个，你看到了什么？

在两根柱子之间悬挂的一片幕帐？

抑或一个召唤或拒绝进入的入口？

再或一个封闭的窗户？

对于我来说，这是一条通道。”

“它们不是在拒绝，而是在召唤我们……”

我曾不抱任何幻想去被一幅画打动，然而泪水竟然不由自主夺眶而出。

西蒙是介质，画与看画者（我）之间的介质，一位成功的介质。

那么回到我们的中学数学。很多学生抱怨数学枯燥、深奥、晦涩难懂。我想，我们是否能够尝试着采取一些行动让学生被数学打动呢？

教师是介质，我们要做好这个介质。

前言 / i

第一章 意义与价值 / 1

第一节 数学是一种文化 / 3

第二节 数学的文化价值 / 9

第三节 做一名数学文化的传播者 / 13

第二章 概念界定与文化特质 / 17

第一节 研究内容与核心概念界定 / 19

第二节 中学数学中的文化特质 / 20

第三章 课堂教学设计策略与具体关注点 / 27

第一节 课堂教学设计总体考量方向 / 29

第二节 课堂教学设计策略 / 33

第三节 课堂教学设计具体关注点 / 49

第四章 实践课例 / 75

第一节 数学概念课 / 77

一、算法的概念 / 77

二、棱柱的体积 / 85

第二节 数学探究课 / 94

一、对一道数列题的研究性学习 / 94

二、四面体体积的求法探索 / 103

第三节 章节起止课 / 112

一、解析几何序言 / 112

二、多视角下的正方体 / 121

第四节 思想方法课 / 128

一、从逆向问题到逆向思维 / 128

二、例谈数学中的对应思想 / 139

三、一个不等式的解集 / 148

第五章 概念教学难点突破与文化赏析 / 167

第一节 反函数概念 / 169

第二节 数学归纳法 / 175

第三节 复数的概念 / 183

第六章 建议与感想 / 195

附录1 访谈录 / 203

附录2 随笔 / 209

附录3 讲座稿 / 245

附录4 学生留言 / 283

参考文献 / 287

后记 / 290

第一章

意义与价值

我们会情不自禁地称数学为一种通向物质、思维和情感世界的方法。从人类理解大自然的努力中，从人类为物质世界出现的混乱事件注入秩序的努力中，从人类创造美的努力中，从人类为满足健全的大脑锻炼自身的灵性的努力中，从人类所有这些努力中积淀的精密的思想，正是人类智慧最纯净的升华。我们，生活在一个主要应归功于数学天才成就斐然的欣欣向荣的文明之中的人，能够为人类所做的这些努力作证。

——M·克莱因

第一节 数学是一种文化

关于文化,现代汉语词典上提供了以下三种解释:

1. 考古学上指同一历史时期的遗迹、遗物的综合体。同样的工具、用具、制造技术等是同一种文化的特征;
2. 人类所创造的财富的总和,特指精神财富,如文学、艺术、教育、科学;
3. 运用文字的能力及一般知识。

数学是一种文化,应该属于上述第2种解释的范畴。

为什么说数学是一种文化?《数学教育中的数学文化》将国内众多学者的回答总结为以下这样六条。

第一,数学对象的人为性。

该书中介绍:“从数学的研究对象来看,数学并非是对客观事物或现象量性特性的直接研究,而是通过建构相对独立的‘模式’,并以此为直接对象来进行研究,它是人类抽象思维的产物。”故在此意义上,数学是一种文化。“更重要的是,数学中还有一些概念与真实世界的距离是如此遥远,以至常常被说成是‘思维的自由创造’,如几何中的‘直线’这一概念,它并不是指拉直的绳子也不是用直尺画出来的一条直线,在现实生活中我们找不到它的原型,它是一条经过两点、在空间中无限延伸的线,只能存在于我们的观念中、想象中。这也更为清楚地表明了数学的文化特质。”

数学对象的人为性,在数学的各个角落都可以寻得到踪迹。大到数学的体系,小到数学的符号,一个专有名词等等。

数学的发展是在前人建造的堡垒上不断地添砖加瓦,其本身是一种创造的过程。既然是创造,这便具有人为性。让我们具体来看看欧氏几何的公理体系。欧几里得给出了23个定义、5个公设、5个公理。正因为

人为规定了为数不多的几个公理与公设,以这些为起点,于是体系便可以开始演绎,并且可以演绎得如此庞大。

再来看看数学中那么多的符号也是我们人为规定的。规定了 $i^2 = -1$, 并把 i 称作虚数单位;莱布尼兹规定了 $\int$ 为积分符号,并一直沿用至今,它是将符号 $\sum$ 展开拉直的结果……甚至于“代数”这一词也是为纪念花拉子米而创造的。

第二,数学活动的整体性。

关于数学活动的整体性,书中指出主要体现在两方面:“一是数学家构成的数学共同体。不可否认,数学家的研究活动有个体性成分,但它必须符合数学研究的共同规范和准则,只有这样,个体的工作才有可能得到数学共同体的承认,在共同体内才能广泛地交流和互相促进。二是数学内容的系统性。数学好似一棵枝繁叶茂的大树,分支众多,但又是一个和谐的整体。”

这里就数学内容的系统性,举两个例子。

例如,我们分三章学习复数、向量与几何,而它们三者又是一个有机的整体,彼此和谐统一。有一本小册子,是上海教育出版社出版的《复数、向量与几何》,就将这三者统一了起来。

又如,逻辑运算(逻辑思想)的统一。集合中的“交”与“并”的运算,概率中的“事件积”与“事件和”的运算。集合中的运算“补”和概率中的“对立事件”,在逻辑上就有着矛盾律、排中律的统一。

第三,数学发展的历史性。

该书指出:“在数学活动中的整体性意义上可构成数学传统,数学传统反映着数学的历史性,而历史性则是文化的一个重要特征。数学活动只能是在数学传统的继承与变革中求得发展。先人创造的数学知识对于后人来说却是一种文化。因为文化的实质是人的非遗传信息,特别是体

外信息。人类的数学知识是非遗传性的体外信息,只有通过学习才能获得。”

我们来看数系的扩充,从自然数到有理数,再到实数,再到复数……每一次数系的扩充都是在继承中发展。再如,函数的概念,在历史上先后进行了多次扩张,也是在继承中不断完善,不断发展。

第四,数学是一种特殊的语言。

1. 数学具有自己独一无二的语言系统即数学语言,它是大容量具有发达符号系统的语言体系。

皮亚诺说,在数学中一切进步都是引入符号(表意符号)后的反响。

英国著名数学家罗素说,什么是数学? 数学就是符号加逻辑。

数学发展到今天,已然变成了一个符号的世界。数学没有了符号还怎能成为数学?

就拿我们“集合”一章为例。集合的交、并、补、子集、真子集等定义都是通过纯粹的符号来表述的。回顾一下,在这些定义中有几个文字? 还有“函数”一章。函数的概念、函数的奇偶性、函数的单调性、函数的周期性、函数的最值等定义,都充分借助了符号,充分体现了数学从符号化逐步走向形式化。

2. 数学语言具有准确、精炼的特点,这正是数学科学解释描述方法定量化和思维方法逻辑化的直接反映。

在《费马大定理,一个困惑了世间智者 358 年的谜》一书中有这样一段话:“需要经过确实无疑的真情才能承认某个结论,对这一点数学家是因其一丝不苟而著称的。伊恩·斯图尔特在《现代数学的观念》一书中讲的一个故事清楚地反映了他们的这种声誉:一个天文学家、一个物理学家和一个数学家(据说)正在苏格兰度假。当他们从火车车厢的窗口向外瞭望时,观察到田地中央有一只黑色的羊。‘多么有趣,’天文学家评论道,‘所有的苏格兰羊都是黑色的!’物理学家对此反驳说:‘不,不! 某些苏格

兰羊是黑色的!’数学家祈求地凝视着天空,然后吟诵起来:‘在苏格兰至少存在着一块田地,至少有一只羊,这只羊至少有一侧是黑色的。’”

上述这段文字,以幽默的方式,淋漓尽致地为我们展现了数学语言精准、严密的特点。

再举一个例子。我们教学中经常遇到的“任意性问题”和“存在问题”。这两类问题一直以来都是学生学习的难点。思维障碍的产生是因为思维失去了连贯性、逻辑性和目的性。“任意性”和“存在性”就涉及了思维的逻辑性。只寥寥三个字,有的学生却晕头转向了。所以,每每教师在讲解相关习题的时候,总会把这两个问题同时放在某一个具体问题中,借助于直观图像来解释,以便让学生通过具体的、直观的比较把握这两个非常具有思辨性的问题。

第五,数学的精神品位。

有人认为“数学是理性的艺术”。

罗素曾说,数学具有至高无上的美,正像雕刻的美,是一种冷而严肃的美,这种美不是投合我们天性微弱的方面,这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰,它可以纯净到崇高的地步,能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。

数学因严谨、抽象确立了其“高傲”的地位。如何让更多的学生也能欣赏品味这阳春白雪着实需要智慧。

第六,文化建构中的数学成分。

《数学教育中的数学文化》中提到:“在诸类文化构建过程中,都不同程度地交融了数学成分,如数学理性对古希腊文化的重大影响,就西方文化传统而论,这种痕迹尤为明显。”如数学中的透视原理在西方文艺复兴时期绘画作品中的运用。

关于数学文化观的萌芽,是始于 20 世纪 60 年代,代表人物有美国数学家怀尔德和 M·克莱因等。

《数学文化与人类文明》文中提到,19 世纪末到 20 世纪初是数学哲学研究领域的黄金时代,形成了逻辑主义学派、直觉主义学派、集合论公理化学派、形式主义学派等。各学派各有优缺点,但都为数学基础的严密性作出了贡献。然而美国近代著名的数学家、逻辑学家、哲学家哥德尔的研究击破了他们的幻想,曾使数学哲学研究陷入谷底。20 世纪 60 年代,西方提出了数学文化观,从新的立场为数学哲学提出新的观点、新的方法。文中介绍,最早系统地完成这一开创性工作的是怀尔德。他提出了数学作为文化体系的数学哲学观。他从文化生成和发展的理论等角度考察数学,率先提出了数学文化的概念并构建了数学文化的理论体系,形成了很长时期以来出现的第一个成熟的数学哲学观,强调了数学的发展动力、发展规律、思维方式等文化内涵,强调了遗传、环境、人类以及人类文化等对数学的作用影响。

《数学文化赏析》中提到,数学文化作为一种特殊的文化形态,直到 20 世纪下半叶,才由美国著名的数学史学家 M·克莱因在其三本著作《西方文化中的数学》、《古今数学思想》和《数学——确定性的丧失》中进行了比较系统而深刻的阐述,力图营造数学文化的人文色彩。

《数学文化概论》中介绍,数学文化的教学与研究在中国近二三十年的发展,使中国的学者们对数学文化作为一门学科的建设,对数学文化研究的方法及研究的重点领域进行了一些新的探索。数学文化是数学史、数学教育、数学哲学与文化学的交叉领域。它把数学史、数学教育、数学哲学作为一种文化现象进行分析研究。

对于什么是数学文化?学者看法各异。《数学教育中的数学文化》为我们搜罗了以下一些观点。

李铁安认为,从文化的本质和数学的本质来看,数学就是一种文化。数学文化是人类在数学活动中所积累的精神创造的静态结果和所表现的动态过程。其中静态结果包括数学概念、知识、思想、方法等自身存在形

式中真、善、美的客观因素；动态过程包括数学家的信念品质、价值判断、审美追求、思维过程等深沉的思想创造因素。而静态过程和动态过程以及它们所包含的各个因素之间的交互作用，构成了庞大的数学文化系统。

顾沛认为，数学文化是指数学的思想、精神、方法、观点以及它们的形成和发展。广泛些说，除上述内涵以外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的关系、数学与各种文化的关系，等等。

黄秦安认为，在现代意义下，数学文化作为一种基本的文化形态，是属于科学文化范畴的。从系统的观点看，数学文化可以表述为以数学科学体系为核心，以数学的思想、精神、知识、方法、技术、理论等所辐射的相关文化领域为有机组成部分的一个具有强大精神与物质功能的动态系统。其基本要素是数学各个分支领域及与之相关的各种文化对象、各门自然科学、几乎所有的人文社会科学和广泛的社会生活。

刘朝晖认为，数学文化的基本内涵主要包含以下几方面：(1)物质形态。人类在探索数学世界的过程中必须借助一定的工具和设备。(2)精神形态。数学中也蕴含着数学家的道德观念、情感态度、内心信念和价值体系，而且数学本身也蕴含着理性精神。(3)知识形态。人类在探索数学世界的过程中，建立了数学概念，发现了数学规律，构建了数学理论，并用专门的语言和符号表达出来。这就构成了一个综合的数学知识系统。这是人类认识世界的数学劳动与智慧的结晶，是数学文化的知识形态。(4)组织形态。人们在从事数学活动的过程中构成了一个特殊的群体——数学共同体，这个共同体包括一切从事与数学相关的活动的社会群体及其活动和活动方式。