离 散 数 学

（第 2 版）

姜泽渠　主编

重庆大学出版社

离散数学

（第2版）

姜泽渠　主编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书分10章介绍离散数学的几大基础内容:数理逻辑、集合论、图论、代数结构及组合论初步。它们分别是:命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系、函数、图论、特殊图、代数系统、格与布尔代数、组合论基础。本书将离散数学中的一些常用算法细化后分别插入到相应的章节中去,为通过编程、上机实践来加深对基础内容的理解作必要的引导。本书理论体系完整,内容较为丰富,文字简明、易懂且附有较多的例题及练习题。

本书可作为计算机、电子技术、信息、管理等学科、专业的本科学生的教材,也可作为大学专科及中等专业学校相应学科、专业的教学参考书,亦可作为广大青年和工程技术人员的阅读、参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/姜泽渠主编. —2版. —重庆:重庆大学出版社,2012.11

计算机科学与技术专业本科系列教材

ISBN 978-7-5624-2336-2

Ⅰ.①离… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第252223号

离散数学

(第2版)

姜泽渠 主编

策划编辑:周 立

责任编辑:谭 敏 版式设计:周 立

责任校对:贾 梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617183 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆科情印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.25 字数:406千

2012年11月第2版 2012年11月第3次印刷

印数:12 001—14 000

ISBN 978-7-5624-2336-2 定价:29.50元

前 言

离散数学研究的主要对象是具有离散结构的数据。在古典数学中,如数学分析与线性代数,对连续型和离散型的数据都进行了研究,但主要是研究连续型数据。古典数学的研究方法许多是以极限过程和连续性的理论为基础。在离散数学中却不采用这样的理论为其基础,而是采用了逻辑学、形式主义和存在、使用于计算机、工程学、经济学、物理、化学、生物等学科中的其他数学方法为其基础。以前在这些学科中经常使用连续模型,其实模型描述的对象绝大多数是离散型的。有了离散数学的研究体系后,人们可以通过直接建立离散模型的方法来研究和解决各个领域中的实际问题,从而获得更切合实际、更准确的解答。这样一来具有历史渊源的离散数学,近二十年来在纵向、横向都有了很大的发展。

由于离散数学课程理论性较强,抽象内容较多,教师难教,学生难学的现象普遍存在,所以编写一本好的教材具有一定的难度。我们以满足计算机及相应学科本科教学的基本要求为目标,结合自身教学的具体实践,在选取内容方面,尽可能做到知识够用、突出重点、开拓眼界、深入有门、删繁就简;在语言叙述方面,力求简洁明了、通俗流畅、深入浅出。另外为了减少由于抽象性带来的学习困难,为了加深对学习内容的理解,同时也为了锻炼学生实际动手的能力,我们特抽出一些离散数学中常用算法,加以细化使之容易实现编程,并将其插入到相应的章节中去(这些内容一般作为选学或阅读内容)。通过我们的实践证明为本课程设置适当的上机学时是有好处的。

本书的主要内容可在 60 ~ 80 学时内授完。第 7 章 7.4 节(连通度和网络流)及第 10 章(组合论基础)可以作为选学内容,其他内容可根据学科、专业的需要取舍。

学习本书可不拘泥于章节的先后次序,如讲授图论和代数结构的内容,孰先孰后可自由选择。讲授本书可在具备线性代数的基础知识和主要的微积分知识之后进行。为了能上

机实践，还要求初步掌握一门计算机算法语言，具有编写简单程序的能力。

本书的框架思路由姜泽渠提出，并编写了第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 10 章及有关章节中的算法部分，完成全书的统稿、定稿及校对工作。孙萍编写了第 8 章和第 9 章，邝锦棠编写了第3 章和第4 章，宋江敏编写了第6 章和第7 章。牟行军完成了全书图稿的绘制工作。

由于编者水平所限，书中错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年7 月

再版前言

本书第 1 版自 2001 年出版以来,经过多年的教学实践,我们了解到它还是基本适合现时教学需要的,但也发现了一些问题和需要改进的地方。近年来计算机本科专业《离散数学》课程的学时许多学校都进行了压缩,且在理论深度方面的要求也降低了不少。我们认为这样做是可以理解的,但作为教材其基本体系的相对完整还是必要的,其内容对学生智力的启迪作用,对读者分析问题、解决问题的能力的提高作用,对后续课程的基础作用是不可忽视的。为此,除修改书中明显的错误以外,我们保留了全书的基本结构和基本内容。在目录和章节前用“ * ”标注了可以不列入教学计划的内容,还删去了个别较复杂的应用内容,教师还可根据实际情况舍去部分理论性较强的内容。本次修改中还增加了一些例题,以帮助对重要概念的理解和应用。

目录

第 1 章 命题逻辑

1.1 命题与合式公式

1.1.1 命题与联结词

数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的数学分支。这里的数学方法,其主要特点是引进了一套符号体系作为重要手段,而形式逻辑中的推理是数理逻辑研究的重要内容。本书介绍的数理逻辑分为命题逻辑和谓词逻辑两部分。

推理离不开判断。判断是对事物有确切的肯定或否定的一种思维形式。自然语言中能描述判断的语句是陈述句。陈述句一般对所描述的事物有肯定和否定之分,它们在命题逻辑中分别用逻辑值"真"和"假"来表达,且统称为真值。

定义 1.1.1 **命题**是具有唯一真值的陈述句。

命题逻辑研究的对象是命题。命题的真值只有两个值:真和假。真值为真的命题称为真命题,真值为假的命题称为假命题。陈述句需要通过符号化才能得到数理逻辑研究的抽象化了的命题,这一工作称为命题符号化。在本书中用小写英文字母 $p, q, r, \cdots; p_i, q_i, r_i \cdots$ 表示命题,用 1 表示真,用 0 表示假(注:有些书用 T 表示真,F 表示假。T 和 F 分别是英文 True 和 False 的缩写)。作为命题的一个陈述句,若不能再分解为多个且意义等同的陈述句,则称它为**简单命题**又称**原子命题**;若一个陈述句又可以分解为由联结词("和""且""或""如果……则"等)联结的多个陈述句,则称它为**复合命题**。

判断自然语言中的语句是否为命题,首先需要判定它是否为陈述句,其次再判定它是否有唯一的真值。

例 1.1.1 判断下面自然语句中哪些是命题。若是请区分出简单命题和复合命题。

(1)中国是世界上人口最多的国家。

(2)2 不是素数。

(3)木星上有水。

(4)李红和王兰都看过这部影片。

(5)这个任务由老王或者老张去完成。

(6)如果我是你,我一定不会答应。

(7)多么壮观的景色啊!

(8)外面在下雨吗?

(9)我正在说谎。

(10)$x \geqslant y-2$。

解 (1)~(6)符合命题的定义,均为命题,其中(1)~(3)为简单命题,(4)~(6)为复合命题。(7)(8)分别是感叹句和疑问句,因此不是命题。(9)为悖论中的断言,它没有确切的真值,因此不是命题。(10)因 x,y 的取值未定,无唯一真值,因此也不是命题。但是如果指定了 x,y 的具体实数值后,该句就成为了命题。

在该例中,根据语句的实际意义,可以知道(1)是真命题。(2)是假命题。(3)的真值现在还无法得知,但无论如何真值是唯一的。(4)~(6)的真值需要根据事实本身并通过逻辑运算才能得到。因为(1)~(3)是简单命题,是命题逻辑中最基本的研究对象,我们不再对它的成分进行细分,可以直接用 p,q,r 来表示它们,即对它们进行命题符号化。为了对(4)~(6)进行命题符号化,需要借助命题联结词。

命题逻辑中经常使用的联结词有 5 种,现定义如下。

定义 1.1.2 设 p,q 是两个命题。

(1)p 的否定为关于 p 的复合命题,记作 $\neg p$,称为 p 的否定式,读作非 p,符号"$\neg$"称为**否定联结词**。并规定 $\neg p$ 为真,当且仅当 p 为假。

(2)复合命题"p 并且(和)q"记作 $p \wedge q$,称为 p 与 q 的合取式,读作 p 合取 q,符号"$\wedge$"称为**合取联结词**。并规定 $p \wedge q$ 为真,当且仅当 p,q 同时为真。

(3)复合命题"p 或 q"记作 $p \vee q$,称为 p 与 q 的析取式,读作 p 析取 q,符号"$\vee$"称为**析取联结词**。并规定 $p \vee q$ 为假,当且仅当 p,q 同时为假。

(4)复合命题"如果 p,则 q"记作 $p \rightarrow q$,称为 p 与 q 的蕴涵式,p 为蕴涵式的前件,q 为蕴涵式的后件,读作 p 蕴涵 q,符号"$\rightarrow$"称为**蕴涵联结词**。并规定 $p \rightarrow q$ 为假,当且仅当 p 为真,q 为假。

(5)复合命题"p 当且仅当 q"记作 $p \leftrightarrow q$,称为 p 与 q 的等价式,读作 p 等价于 q,符号"$\leftrightarrow$"称为**等价联结词**。并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真,当且仅当 p,q 同为真或同为假。

有了这些定义,可对例 1.1.1 的(4)~(6)进行命题符号化:

(4)表示为 $p_1 \wedge q_1$,其中 p_1:李红看过这部影片;q_1:王兰看过这部影片。

(5)表示为 $p_2 \vee q_2$,其中 p_2:这个任务由老王去完成;q_2:这个任务由老张去完成。

(6)表示为 $p_3 \rightarrow q_3$,其中 p_3:我是你;q_3:我一定不会答应。

定义 1.1.2(1)~(5)不但将自然语言中的联结词符号化,而且在本质上也定义了命题真值的逻辑运算。其中 $\neg$ 为一元运算,其余为二元运算。由命题的真值,根据表 1.1.1 很容易查出(1)~(5)中相应复合命题的真值。

表 1.1.1　基本复合命题的真值

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

在命题符号化中,使用联结词须注意以下几点:

(1)自然语言的联结词所联结的语句是有着某种内在联系的,但在数理逻辑中并不要求联结词所联结的命题之间要有什么联系。它的研究重点是放在逻辑的形式结构上的。如语句“如果鸟会飞,则 $3+2=8$”是荒唐的。但将该语句命题符号化后,得到的复合命题则是有意义的。

(2)析取联结词“$\vee$”表达的是“可兼或”的含义,意即它所联结的两件事既可以单独发生也可以同时发生。如果需要联结的两件事不可能同时发生,那么在命题符号化中就不能对此选择“$\vee$”,而应该选择另外一种称为“不可兼或”的联结词“$\overline{\vee}$”。如语句“明日上午 8 时,我在教室或者在图书馆。”中的“或者”就应该用“$\overline{\vee}$”来表示。复合命题 $p \overline{\vee} q$ 的真值与另一多层次的复合命题 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的真值完全相同。

(3)联结词“$\to$”可以对应自然语句中的多种叙述方法。例如“只要 p,就 q”“因为 p,所以 q”“p 仅当 q”“只有 q 才 p”“除非 q 才 p”“除非 q,否则非 p”等,简言之当 q 是 p 的必要条件时,都应符号化为 $p \to q$。作为一种规定,当蕴涵式 $p \to q$ 的前件 p 为假时,无论后件 q 是真是假,该式的真值均为真。例如例 1.1.1 中(6)的前件“我是你”的真值显然应为假,因此不论后件“我一定不会答应”的真值为何,该复合命题的真值均为真。

(4)多层次的复合命题中将会出现圆括号和多个联结词,在求其真值时,为逻辑运算规定以下先后顺序:

$(\ )$,$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$

对于相同联结词,规定先出现者先运算。

例 1.1.2　将下列命题符号化,并给出各命题的真值。

(1)若 $3+2=5$,则太阳从西边升起。

(2)$3+2=6$ 的充分必要条件是有外星人存在。

(3)$(10110)_2+(10011)_2=(101001)_2$ 与在区间 $(0,1)$ 内无最大实数。

(4)如果 7 是 3 的倍数或者 5 是素数,则老虎会飞,同时人可以在月球上居住。

解　(1)令 p:$3+2=5$,真值为 1;q:太阳从西边升起,真值为 0。

该命题符号化为:$p \to q$,真值为 0。

(2)令 s:$3+2=6$,真值为 0;t:外星人存在,目前可以认为真值为 0。

该命题符号化为:$s \leftrightarrow t$,真值为 1。

(3)令 r:$(10110)_2+(10011)_2=(101001)_2$,真值为 1;

　　w:在区间 $(0,1)$ 内无最大实数,真值为 1。

该命题符号化为:$r \wedge w$,真值为1。如令 w_1:在区间(0,1)内有最大实数,

则该命题也可符号化为:$r \wedge \neg w_1$,真值仍为1。

(4)u_1:7 是 3 的倍数,真值为 0;u_2:5 是素数,真值为 1;

v_1:老虎会飞,真值为 0;v_2:人可以在月球上居住,真值为 0。

该命题符号化为:$(u_1 \vee u_2) \to (v_1 \wedge v_2)$,由于 $u_1 \vee u_2$ 的真值为 1,$v_1 \wedge v_2$ 的真值为 0,所以该命题的真值为 0。

1.1.2 合式公式与真值表

用 p,q,r 等,代表未指定真值的任意命题,称其为命题变元,又称命题变项。因为我们不关心这些命题的内涵,只关心它们的真值,所以又可以称它们为抽象命题或命题符号。

定义 1.1.3 以逻辑真值“真”“假”为变域的变元,称为**命题变元**;若以 1,0 分别表示“真”“假”,则称 1 和 0 为**命题常元**。单个命题变元和命题常元可统称为**原子公式**。

命题逻辑中的符号有三类:命题符号、命题联结词和圆括号。由它们按一定的逻辑关系联结起来的符号串,称为命题公式。按下述归纳方式定义的命题公式,称为合式公式,简称公式。

定义 1.1.4 **合式公式**是如下定义的一个符号串:

(1)原子公式是合式公式;

(2)若 A,B 是合式公式,则$(\neg A)$,$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \to B)$,$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式;

(3)只有有限次应用(1)和(2)构成的符号串,才是合式公式。

对合式公式的概念再作如下说明:

(1)大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 常用来表示抽象的合式公式,即在一般情况下它们并不是指定的某个(些)公式。

(2)单个合式公式的最外层括号可以省去,在公式中不影响运算次序的括号可以省去。如$(\neg A)$,$(A \vee B)$,$(p \wedge q) \wedge (\neg r)$可分别写成$\neg A$,$A \vee B$,$p \wedge q \wedge \neg r$。

(3)正确书写合式公式中的各个符号,正确理解公式中各个层次的含义。

作为练习,读者可以阅读 1.5.1 段中关于判定符号串为合式公式的算法。有兴趣的读者还可编制程序去实现该算法。含有命题变元的公式,由于这些变元的真值没有被指定,所以公式的值也不能确定。因此,一般来说命题公式并不是命题,当对出现在公式中的所有变元指定一组真值时,命题公式就成了命题,而且可以按公式中的逻辑运算求出其真值。

定义 1.1.5 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在公式中的全部命题变元。给每个变元各指定一个真值,组成了变元的一组真值,称为该公式的一个**赋值**或**解释**。如果这个赋值使该公式取值为真,则这个赋值称为该公式的一个**成真赋值**;如果这个赋值使该公式取值为假,则这个赋值称为该公式的一个**成假赋值**。

例 1.1.3 试举出公式$(p \vee \neg q) \wedge r$ 的一个成真赋值和一个成假赋值。

解 确定公式中变元的一个次序(一般按字母的自然顺序或按变元足标的顺序),这里的次序是 p,q,r。指定 p 为 1,q 为 0,r 为 1,记作(1 0 1),由逻辑运算知,公式此时取值为 1,所以(1 0 1)为成真赋值。若指定一组真值(1 1 0),则公式取值为 0,所以(1 1 0)为成假赋值。

定义 1.1.6 将命题公式 A 在所有赋值下取值的情况列成表,称为公式 A 的**真值表**。

构造真值表可按如下步骤进行:

(1)将变元按一定顺序排出,再按从内到外的顺序列出公式的各个运算层次,将它们列成一行排在表头上。

(2)如有 n 个变元,则所有可能的赋值有 2^n 个,每个赋值可用 n 位的二进制数表示。按二进制数递增的顺序,依次列出全部赋值,一行写一个,其中每个真值排在相应变元所在列下面。

(3)从第一行到第 2^n 行,按变元的赋值,在每一层次列的下面写出这一层次运算所得结果。最后一列填上的应是该公式对应这个赋值所得的真值。

例 1.1.4　给出例 1.1.3 中的公式:$(p \vee \neg q) \wedge r$ 对应的真值表。

解　按上面步骤得出该公式的真值表如表 1.1.2。

表 1.1.2

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

利用公式的真值表,可以清楚地知道公式的哪些赋值是成真赋值,哪些赋值是成假赋值。注意具有相同变元的两个公式,它们的构造可以不一样,却可能具有相同的真值表。判断真值表是否相同,应看最后一列的值是否完全相同,而不去理会各层次列的值是否相同。当变元数目很大时,构造真值表将会十分麻烦。有兴趣的读者可阅读 1.5.2 中列出的构造真值表的算法。

1.1.3　合式公式的类型与真值函数

根据公式在各种赋值下的取值情况,可按下述定义将命题公式进行分类。

定义 1.1.7　设 A 为任一命题公式。

(1)若对应每组赋值 A 的取值均为真,则称 A 为**永真式**或称**重言式**。

(2)若对应每组赋值 A 的取值均为假,则称 A 为**永假式**或称**矛盾式**。

(3)若至少有一组赋值使 A 的取值为真,则称 A 为**可满足式**。

从定义不难看出,所有合式公式可分为两大类:可满足式和永假式。永假式也可称为不可满足式。永真式是可满足式,反之不成立。A 是永真式,当且仅当$\neg A$ 是永假式。利用真值表可以很容易地判定公式的类型。

例 1.1.5　判定公式 $A=(\neg p \to q) \wedge (\neg q \wedge \neg p)$,公式 $B=(q \vee p) \vee (\neg q \wedge \neg p)$,$C=(p \leftrightarrow \neg q) \vee q$,$D=q \vee p$ 的类型。

解　为节约篇幅,将 4 个公式的真值表合成一个真值表,如表 1.1.3 所示。还可以看到

公式 B 可写成 $B=D\vee(\neg q\wedge\neg p)$。称公式 D 为公式 B 的子公式。

表 1.1.3

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to q$	$\neg q\wedge\neg p$	$p\leftrightarrow\neg q$	D	A	B	C
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1

从表 1.1.3 可知:A 为永假式,B 为永真式,C 和 D 均为可满足式,且 C 和 D 具有相同的真值表。

将具有 n 个命题变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的公式 A,写成 n 元函数 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的形式,由于变域的特殊性,可得到了一类特殊的函数。

定义 1.1.8 称 $F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 为 n 元**真值函数**。

例 1.1.5 中的公式 A,可写成 2 元真值函数。$A:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$ 的形式,即

$$A(p,q)=(\neg p\to q)\wedge(\neg q\wedge\neg p)。$$

例 1.1.3 中的公式$(p\vee\neg q)\wedge r$ 可写成 3 元真值函数 $F:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ 的形式,即

$$F(p,q,r)=(p\vee\neg q)\wedge r。$$

n 元真值函数,即 n 元命题公式的结构形式可以千差万别,但从真值表是否相同的角度看,n 元真值函数的个数是有限的。设 $t_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\in\{0,1\}^n$ 是 n 元真值函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 个赋值,显然有 $i=0,1,2,\cdots,2^n-1$。此时函数 $F(t_i)\in\{0,1\}$,它可能的取值有 2 种,因此不同的真值函数的数目有 2^{2^n} 个。

令 $n=2$,易知取值不同的 2 元真值函数的数目应是 $2^{2^2}=16$ 个。下面列出了这 16 个真值函数的真值表,如表 1.1.4 所示。任意一个 2 元真值函数与 $F_0\sim F_{15}$ 中的一个且仅一个具有相同的真值表。

表 1.1.4

p	q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1.2　逻辑等值式

1.2.1　等值式和基本等值式

对于确定的 n 个变元,真值表相同的命题公式属于同一类真值函数,称这些命题公式是相互等值的。在逻辑演算中,这种等值的概念是十分重要的,其主要作用在于,可用已知的形式简单的公式去替代与之等值的复杂的公式。

定义 1.2.1　设 A 和 B 是两个命题公式,如果等价式 $A \leftrightarrow B$ 是永真式,则称公式 A 与公式 B 是**等值**的,记作 $A \Leftrightarrow B$。

例 1.2.1　列出公式 $A = \neg p \vee q$ 和公式 $B = p \to q$ 的真值表,并判断它们是否是等值的。

解　列表如下:

表 1.2.1

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

由表 1.2.1 可知等价式 $A \leftrightarrow B$ 为永真式,所以 A 与 B 是等值的,即 $A \Leftrightarrow B$。

该例说明列出真值表,判断真值表是否相同,是判断两个公式是否等值的一种最直接且十分重要的方法。

构造真值表来判断两个公式是否等值的方法,有时由于公式的构造复杂导致工作量很大。借助一组基本而又很重要的等值式来判断较为复杂的公式间的等值,也是一种十分重要的方法。我们称这些基本的而又很重要的等值式为基本等值式(或称基本逻辑恒等式)。这些等值式的正确性均可用构造真值表的方法加以证明。将它们列表如表 1.2.2 所示,希望读者牢记这些“等值式模式”,并运用自如。

表 1.2.2　基本等值式

类别	名　称	代号	等值式
(1)	双重否定律	E_1	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
(2)	等幂律	E_2	$A \vee A \Leftrightarrow A$
		E_3	$A \wedge A \Leftrightarrow A$
(3)	交换律	E_4	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
		E_5	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

续表

类别	名　称	代号	等值式
(4)	结合律	E_6	$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$
		E_7	$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$
(5)	分配律	E_8	$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
		E_9	$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
(6)	德· 摩根律	E_{10}	$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$
		E_{11}	$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$
(7)	吸收律	E_{12}	$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$
		E_{13}	$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$
(8)	零律	E_{14}	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$
		E_{15}	$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
(9)	同一律	E_{16}	$A\vee 0\Leftrightarrow A$
		E_{17}	$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
(10)	否定律	E_{18}	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
		E_{19}	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
(11)	蕴涵等值式	E_{20}	$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
(12)	等价等值式	E_{21}	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$
(13)	逆否律	E_{22}	$A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$
(14)	输出律	E_{23}	$(A\wedge B)\to C\Leftrightarrow A\to(B\to C)$
(15)	归谬律	E_{24}	$(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

注:(1)表中的 A,B,C 代表抽象的命题公式,于是基本等值式代表无穷多具体的等值式。

(2)用 0,1 分别代表永假式和永真式。

为了应用这些基本等值式,先对公式的代入实例作如下定义。

定义 1.2.2　在命题公式 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 中,在某个 $p_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 出现的每一处,都用公式 A 代入之,由此得到的公式 B 称为公式 A 的**代入实例**。

例如公式 $A=(p\to q)\wedge(\neg q\wedge p)$,$A_1=q\vee r$,在 p 出现的每一处用 A_1 去代入,得到的公式 $B=((q\vee r)\to q)\wedge(\neg q\wedge(q\vee r))$ 为公式 A 的代入实例。

如果对基本等值式中符号“$\Leftrightarrow$”(注意它与符号“$\leftrightarrow$”的含义是不相同的)两边公式应用代入实例,就将得到一系列具体的等值式。这些具体的等值式,被称为原来等值式模式的代入实例。

例如在等值式 E_{20}:$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$ 中,取 $A=p$,$B=q$(p,q 为命题变元),得等值式:$p\to q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$。

在实际应用中，可以不加证明而直接应用由基本等值式直接得到的代入实例。如对 E_{10} 可直接应用其代入实例，等值式：$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$。

1.2.2　等值演算及其应用

有了基本等值式及其代入实例，可以由已知的等值式推演出更多的等值式，这一过程称为等值演算。等值演算是数理逻辑和布尔代数的重要组成部分。

一个复杂的合式公式，往往包括多个较为简单的合式公式，在进行逻辑演算时往往用已知的与之等值的公式去置换它们。为此引入子公式和置换的概念。

定义 1.2.3　如果 X 是一个合式公式，同时它又是公式 A 中的组成部分，则称 X 是 A 的**子公式**。

例如例 1.1.5 中，公式 D 就是公式 B 的子公式。

有时用函数的形式来表达合式公式与它的子公式之间的关系。如在定义 1.2.3 中，使用 $A=\varphi(X)$。

定义 1.2.4　设公式 A_1 是公式 A 的子公式。B_1 是公式，在 A_1 出现的一处或多处，用 B_1 来代替，得到新的公式 B。称由公式 A 得到公式 B 的过程为公式的**置换**。

特别地，在这个定义中如果 A_1 与 B_1 是等值的，那么称这种置换为等值置换。

定理 1.2.1　如果 B 是合式公式 A 经过等值置换得到的公式，则 A 和 B 是等值的。

有一种重要的置换规则，表述如下：设公式 $A=\varphi(A_1)$，B_1 是公式且 $B_1 \Leftrightarrow A_1$，则用 B_1 置换了 A 中所有 A_1 后，得到公式 $B=\varphi(B_1)$，有 $B \Leftrightarrow A$。

等值置换是等值演算中最基本最重要的方法之一。在等值演算的过程中，每使用一次符号“$\Leftrightarrow$”就表示使用了一次或多次这样的置换。

等值演算的主要作用是证明两个或多个公式间是否等值。另外，还可运用它来判定公式的类型。

例 1.2.2　证明 $\neg((p \to q) \vee \neg r) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$。

证　在等值式 E_{10} 中，把公式 $(p \to q)$ 和 $\neg r$ 分别看成是 A 和 B 的代入实例。接着利用基本等值式进行一系列等值演算，步骤如下：

$$
\begin{aligned}
\neg((p \to q) \vee \neg r) &\Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge \neg\neg r && (E_{10}\text{：德・摩根律}) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg\neg r && (E_{20}\text{：蕴涵等值式}) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge r && (E_{1}\text{：双重否定律}) \\
&\Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \wedge r && (E_{10}\text{：德・摩根律}) \\
&\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r && (E_{1}\text{：双重否定律})
\end{aligned}
$$

在此例的证明步骤中，一步仅用一个等值置换。在熟练后，可一步使用多个置换。

例 1.2.3　利用前面的基本等值式，证明 E_{23}：$(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$。

证

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \to C &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C && (E_{20}\text{：蕴涵等值式}) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C && (E_{11}\text{：德・摩根律}) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) && (E_{6}\text{：结合律}) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee (B \to C) && (E_{20}\text{：蕴涵等值式}) \\
&\Leftrightarrow A \to (B \to C) && (E_{20}\text{：蕴涵等值式})
\end{aligned}
$$