

概率论与数理统计

(第二版)

车荣强 主编 · 何其祥 主审

21 世纪高等学校经济数学教材

概率论与数理统计 (第二版)

主编 车荣强
主审 何其祥

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/车荣强主编. —2 版. —上海:复旦大学出版社, 2012. 5
21 世纪高等学校经济数学教材
ISBN 978-7-309-08816-8

I. 概… II. 车… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 066704 号

概率论与数理统计(第二版)

车荣强 主编
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址: fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
扬中市印刷有限公司

开本 787×960 1/16 印张 16.75 字数 286 千
2012 年 5 月第 2 版第 1 次印刷
印数 1—5 100

ISBN 978-7-309-08816-8/O · 490
定价: 30.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司发行部调换。
版权所有 侵权必究

21 世纪高等学校经济数学教材

编 委 会

主 编 车荣强 杨爱珍 费伟劲
张晓梅 张振宇 迟东璇

编 委
上海财经大学 杨爱珍 叶玉全 何 萍 张远征
张晓梅 张振宇 顾桂定
上海金融学院 车荣强 迟东璇 洪永成
上 海 商 学 院 费伟劲 苏海容 邹 赢
本书编写人员 车荣强 何 萍 张晓梅 邹 赢
丛书主审人员 何其祥 陈启宏 梁治安
丛 书 策 划 范仁梅

内 容 提 要

本书由上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写,系“21 世纪高等学校经济数学教材”系列之一.

全书共分 9 章:随机事件与概率,一维随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,极限定理,统计量及抽样分布,参数估计,假设检验,方差分析与回归分析.本书科学、系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容,重点介绍了概率论与数理统计的方法及其在经济管理中的应用,每章均配有习题,书末附有习题的参考答案.

本书可作为高等经济管理类院校的数学基础课程教材,同时也适合财经类高等教育自学考试、各类函授大学、夜大学使用,也可作为财经管理人员的学习参考书.

第二版前言

“21 世纪高等学校经济数学教材”是上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写的高等经济管理类院校经济数学系列教材,共分 3 册:第一册《微积分》,第二册《线性代数》,第三册《概率论与数理统计》。

本套教材自 2007 年 1 月出版发行至今,已被多所高等院校选为经济管理类专业的数学基础课程的教材,得到同仁和读者的认可,同时也提出了不少宝贵意见和建议。在此,我们对关心和支持这套教材的广大同仁表示衷心的感谢。

通过近 5 年的教学实践,针对使用对象的特点,我们对第一版《概率论与数理统计》进行了修订,做了以下几个方面的改进:

1. 对第一版中的疏漏进行了补充和完善。
2. 对排版印刷方面的错误进行了更正。
3. 对部分例题和习题进行了适当调整,以利于读者学习和掌握,也更适合教学对象。

由于编者水平所限,书中仍可能会有错误与不妥之处,恳请广大同仁继续给予关心和支持,且不吝赐教,欢迎广大读者继续批评指正。

编者

2012 年 4 月

第一版前言

为适应我国高等教育的飞速发展和数学在各学科中更广泛的应用,根据高等教育面向 21 世纪发展的要求,上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写了“21 世纪高等学校经济数学教材”——《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》。

针对使用对象的特点,结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验,在这套系列教材的编写过程中,我们注重了以下几方面的问题:

1. 适应我国在 21 世纪经济建设和发展的需要,着眼于培养“厚基础,宽口径,高素质”的财经人才,注重加强基础课程,特别是数学基础课程。

2. 作为高等经济管理类院校数学基础课程的教材,在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时,力求深入浅出,通俗易懂,突出有关理论、方法的应用和简单经济数学模型的介绍。

3. 注意培养学生的学习兴趣,扩大学生的视野,使学生了解概率论与数理统计创立发展的背景,提高学生对数学源流的认识,在每章后附有数学家简介,介绍在概率论与数理统计创立发展过程中作出过伟大贡献的著名数学家。

4. 注意兼顾经济管理学科各专业学生,既能较好地掌握所学知识,又能满足后继课程及学生继续深造的需要。为此,将概率论习题分为两部分,习题(A)为基础题,习题(B)为提高题。

参加《概率论与数理统计》一书编写的有上海财经大学应用数学系何萍副教授(第一、第三章)及张晓梅副教授(第二、第四章),上海金融学院应用数学系车荣强副教授(第五、第六、第七章),上海商学院基础教学部姚力民老师(第八、第九章),最后由车荣强副教授对全书进行了统稿。

在本教材编写过程中,我们得到了上海财经大学、上海金融学院、上海商学院的重视和支持,并得到了复旦大学出版社的鼎力相助,特别是范仁梅老师的认真负责,在此一并致谢。

限于学识与水平,本书的缺点与错误在所难免,恳请专家和读者批评指正。

编者

2007 年 1 月

目 录

第一章 随机事件与概率	1
§ 1.1 随机试验与样本空间	1
§ 1.2 随机事件及其概率	3
一、随机事件	3
二、事件间的关系与运算	4
三、频率与概率	6
§ 1.3 古典概型	8
§ 1.4 概率的基本性质	10
§ 1.5 条件概率与事件的独立性	14
一、条件概率	15
二、乘法定理	16
三、全概率公式	17
四、贝叶斯公式	19
五、事件的独立性	20
§ 1.6 贝努里概型	24
数学家简介——费马	27
习题一	28
第二章 一维随机变量及其分布	33
§ 2.1 一维随机变量	33
§ 2.2 离散型随机变量	34
一、离散型随机变量及其分布律	34
二、常用的离散型随机变量的分布	36
§ 2.3 随机变量的分布函数	40
§ 2.4 连续型随机变量	43

一、连续型随机变量及其密度函数	43
二、常用的连续型随机变量的分布	48
§ 2.5 随机变量函数的分布	56
一、离散型随机变量函数的分布	56
二、连续型随机变量函数的分布	58
数学家简介——帕斯卡	61
贝叶斯	63
习题二	63
 第三章 多维随机变量及其分布	69
§ 3.1 二维随机变量	69
一、二维随机变量及其联合分布函数	69
二、二维离散型随机变量及其分布	71
三、二维连续型随机变量及其分布	74
§ 3.2 条件分布	79
§ 3.3 随机变量的独立性	82
数学家简介——雅各布·贝努里	84
习题三	85
 第四章 随机变量的数字特征	90
§ 4.1 数学期望	90
一、离散型随机变量的数学期望	90
二、连续型随机变量的数学期望	92
三、随机变量函数的数学期望	93
四、数学期望的性质	97
§ 4.2 方差	100
一、方差的定义	100
二、方差的性质	102
§ 4.3 协方差与相关系数	106
一、协方差	106
二、相关系数	107

数学家简介——棣莫弗·····	111
习题四·····	112
第五章 极限定理 ·····	118
§ 5.1 切比雪夫不等式 ·····	118
§ 5.2 大数定律 ·····	119
§ 5.3 中心极限定理 ·····	121
数学家简介——拉普拉斯·····	125
习题五·····	126
第六章 统计量及抽样分布 ·····	129
§ 6.1 总体与样本 ·····	129
一、总体与样本 ·····	129
二、统计量 ·····	131
§ 6.2 样本分布函数 ·····	134
一、频率分布表 ·····	134
二、直方图 ·····	135
三、样本分布函数 ·····	139
§ 6.3 常用统计量的分布 ·····	140
一、正态总体样本的线性函数的分布 ·····	140
二、 χ^2 分布 ·····	141
三、 t 分布 ·····	143
四、 F 分布 ·····	145
数学家简介——切比雪夫·····	146
习题六·····	148
第七章 参数估计 ·····	150
§ 7.1 点估计 ·····	150
一、矩估计法 ·····	150
二、极大似然估计法 ·····	152
§ 7.2 估计量的评价标准 ·····	156

一、无偏性	156
二、有效性	157
三、一致性	158
§ 7.3 区间估计	159
一、正态总体均值的区间估计	160
二、正态总体方差的区间估计	162
三、非正态总体均值的区间估计	163
四、单边置信区间	165
数学家简介——马尔柯夫	165
习题七	167
 第八章 假设检验	170
§ 8.1 假设检验的基本概念	170
§ 8.2 单个正态总体的假设检验	172
一、方差 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知, 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$	172
二、方差 σ^2 未知, 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$	174
三、检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	175
§ 8.3 两个正态总体的假设检验	178
一、方差 σ_1^2, σ_2^2 已知时, 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$	178
二、方差 σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$	180
三、检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	181
数学家简介——辛钦	184
习题八	184
 第九章 方差分析与回归分析	187
§ 9.1 单因素方差分析	187
一、方差分析的基本思想	187
二、数学模型	190
§ 9.2 双因素方差分析	194
§ 9.3 一元线性回归分析	198
一、回归分析的基本概念	198

二、线性回归方程	200
三、线性相关性的检验	202
§ 9.4 可线性化的回归方程	206
数学家简介——柯尔莫戈洛夫	209
习题九	210
 附录 1 习题参考答案	 214
 附录 2 集合论基础知识	 229
 附录 3 排列与组合基础知识	 233
 附录 4 附表	 235
附表 4-1 普阿松分布表	235
附表 4-2 标准正态分布表	238
附表 4-3 χ^2 分布表	239
附表 4-4 t 分布表	240
附表 4-5 F 分布表	241
附表 4-6 相关系数检验表	249
 参考书目	 250

在现实世界中,现象可大体分为确定现象和随机现象两大类. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科.

随机事件与概率是概率论与数理统计中最基本的概念,本章将介绍随机事件、概率的概念和性质,给出在不同条件下随机事件的概率计算公式,并对相互独立的随机事件进行专门讨论.

§ 1.1 随机试验与样本空间

先来看看概率的直观背景,体会应该怎样来建立概率论的理论体系.

概率是在随机试验的基础上讨论的,我们把对某个感兴趣对象的试验或观察过程称为试验,若事先无法预知将要出现的结果,称这样的试验为**随机试验**,通常用 E 表示. 通常要求随机试验在相同的条件下可以重复进行.

虽然我们不能预知什么结果会出现,但随机试验的所有可能出现的结果应该是已知的. 研究任何一个随机试验,首要任务就是要弄清楚该试验的所有可能发生的结果,而这每一个可能的结果被称为随机试验 E 的**样本点**或**基本事件**,记为 ω . 样本点全体所构成的集合称为**样本空间**,通常用 Ω 表示. Ω 可以是有限集,也可以是无限集.

应该指出,这里所说的可能出现的结果将依赖于人们所关心的问题与所使用的解决问题的方法. 因此样本空间的选择不是唯一的.

例 1 (1) 掷一枚硬币有两个可能结果: 正面朝上或反面朝上. 我们不妨分别用 T 表示正面朝上、 H 表示反面朝上,那么样本空间是

$$\Omega = \{T, H\}.$$

(2) 掷两枚硬币的样本空间又是什么呢?

第一种情形: 如果使用的是有区别的两枚硬币,那么样本空间是

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\},$$

其中第一个字母表示一枚硬币的结果,第二个字母表示另一枚硬币的结果.

第二种情形:如果不能或者不区别它们,那么样本空间是

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, H)\},$$

以上两个样本空间都正确.问题不在于硬币在物理上是否可区分,而在于是否要区分它们.

(3) 掷两颗骰子,若它们是可以区别的,应该有 36 种结果(见表 1.1),样本空间为

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, 6\}.$$

表 1.1

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

若无法区别它们或者不区别它们,则仅有 21 种结果,此时的样本空间为

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, 6; i \leq j\}.$$

如果只关心点数之和,那么只有 11 种可能的结果,此时的样本空间为

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}.$$

例 2 掷一枚硬币直到正面出现时停止,观察已经出现的反面数.这样的随机试验的样本空间是

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots, +\infty\},$$

其中 n 表示前 n 次出现反面,第 $n+1$ 次出现正面, $+\infty$ 表示永远都是反面,不能停止.这是一个具有无限多个样本点的样本空间.

同一个样本空间可以描述不同的随机试验.比如,上例中的样本空间也适用于记录某电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数,还可以用于描述一段时间内经过一个路口的车辆数目等.

例 3 (1) 从一批灯泡中抽取一只,测试它的使用寿命.此试验的样本空间为

$$\Omega = [0, M],$$

其中 Ω 表示使用寿命, M 为一个确定的上限. 若不能确定上限, 则样本空间为

$$\Omega = [0, +\infty).$$

(2) 观察某地区一昼夜最低气温 x 和最高气温 y (单位: $^{\circ}\text{C}$). 设这个地区的温度不会低于 T_0 也不会高于 T_1 , 则此随机试验的样本空间是

$$\Omega = \{(x, y) \mid T_0 \leq x < y \leq T_1\}.$$

§ 1.2 随机事件及其概率

一、随机事件

在研究随机试验时, 人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现, 而且关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现. 满足这个条件的样本点组成了样本空间的子集, 称为**随机事件**, 简称**事件**, 通常用大写拉丁字母 A, B, C 等表示.

如果选取了合适的样本空间, 可以将事件理解为样本空间中某些样本点的集合. 于是, 一个事件被看作样本空间 Ω 的一个子集. 一个事件发生(或出现)是指该子集中的样本点之一发生.

所谓一个合适的样本空间, 意味着如果选择其他的样本空间, 也许事件就不能表示为其子集, 所以, 事件必须对应样本空间. 不同的事件对应不同的子集; 反之, 不同的子集对应不同的事件.

在随机试验中, 必定发生的事件称为**必然事件**, 记为 Ω ; 一定不发生的事件称为**不可能事件**, 记为 $\emptyset$. 样本空间 Ω 与空集 $\emptyset$ 作为样本空间的子集, 也视为事件. 必然事件与不可能事件可以说不是随机的, 但为了讨论问题的方便, 今后我们将它们作为随机事件的两个极端情形处理.

例 1 在 § 1.1 的例 1(2) 中, 若设 A 表示至少出现一次正面, B 表示至少出现一次反面. 当适合于该事件的样本空间为第一种情形时, 有

$$A = \{(T, T), (T, H), (H, T)\}, B = \{(T, H), (H, T), (H, H)\}.$$

当适合于该事件的样本空间为第二种情形时, 有

$$A = \{(T, T), (T, H)\}, B = \{(T, H), (H, H)\}.$$

在 § 1.1 的例 1(3) 中, 若两颗骰子是可以区别的, 设 C 表示点数和为 7, 则

$$C = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}.$$

例 2 在 § 1.1 的例 3 (2) 中, 设 A 表示最大温差超过 10°C , 则

$$A = \{(x, y) \mid y - x > 10, T_0 \leq x < y \leq T_1\}.$$

二、事件间的关系与运算

概率论中的事件是赋予了具体含义的集合, 因此事件间的关系与运算可以按照集合论中集合间的关系与运算来处理.

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B **包含** 事件 A , 或称事件 A **包含于** 事件 B , 记为

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B.$$

显然, 对于任何事件 A , 有

$$\emptyset \subset A \subset \Omega.$$

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记为

$$A = B.$$

2. 事件的并(和)

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生所构成的事件, 称为事件 A 与事件 B 的**并(和)**, 记为

$$A \cup B \quad \text{或} \quad A + B.$$

n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件, 称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**并(和)**, 记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{或} \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

也记为

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^n A_i.$$

可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生所构成的事件, 称为可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的**并(和)**, 记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. 事件的交(积)

事件 A 与事件 B 同时发生所构成的事件, 称为事件 A 与事件 B 的**交(积)**,

记为

$$A \cap B \quad \text{或} \quad AB.$$

类似地, n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生所构成的事件, 称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交(积), 记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad \text{或} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

也记为

$$A_1 A_2 \dots A_n \quad \text{或} \quad \prod_{i=1}^n A_i.$$

4. 事件的差

事件 A 发生而 B 不发生所构成的事件, 称为事件 A 与事件 B 的差, 记为

$$A - B,$$

它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合.

5. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B **互不相容**, 或称事件 A 与事件 B **互斥**. 互不相容事件 A 和 B 没有公共的样本点.

类似地, n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生, 即

$$A_i A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **两两互不相容**(或**两两互斥**).

显然, 在随机试验中, 各个样本点构成的事件是两两互不相容的.

6. 对立事件

事件 A 不发生称为 A 的**对立事件**, 或称为事件 A 的**逆事件**, 记为 $\bar{A}$. 它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点构成的集合.

显然, 互为对立的事件一定互斥, 互斥事件不一定对立.

事件的运算与集合的运算一样, 满足下列运算律.

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$;

$$AB = BA.$$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC$;

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$