数学分析习题集

题解

曹敏谦

4

上海交通大学应用数学系

数学分析习题集

题　解

曹敏谦

目　　录

§9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则$\left(\text{未定形}\frac{0}{0}\text{的求值法}\right)$ 若(1)函数$f(x)$与$g(x)$在 a 点的某邻域U_ε① 内有定义并且是连续的（此处 a 为数字或符号∞），并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋近于零：

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0;$$

(2) 在 a 点的邻域U_ε内，除 a 点而外，在其余各点导函数 $f'(x)$与 $g'(x)$都存在，并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3) 有限或无穷的极限值

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

洛比塔第二法则$\left(\text{未定形}\frac{\infty}{\infty}\text{的求值法}\right)$ 若(1) 当 $x\to a$时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大：

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

其中 a 为有限数或符号∞；

(2) 对于属于 a 点的邻域U_ε而异于 a 的一切 x 值，导函数 $f'(x)$与 $g'(x)$都存在，并且当 $x\in U_\varepsilon$及 $x\neq a$ 时，

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0;$$

(3) 有穷或无穷的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

---

① 所谓 a 点的邻域 U_ε 系指适合于不等式

$|x-a|<\varepsilon$，若 a 为一个数，及(2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，若 a 为符号∞，

x 的集合。

存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

利用代数变形与取对数的方法，可使未定形 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^0，∞^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形：

$$\frac{0}{0}与\frac{\infty}{\infty}$$

的求值法。

求下列各式的值(1318—1370 题)：

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$。

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$。

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x+\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x+\cos x}{2}=1$。

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$。

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x-4x+4(x-\operatorname{tg} x)}{\sin 4x-4x+4(x-\sin x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{64\dfrac{\operatorname{tg} 4x-4x}{(4x)^3}+4\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}}{64\dfrac{\sin 4x-4x}{(4x)^3}+4\dfrac{x-\sin x}{x^3}}。\quad (1)$$

由于 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$,

及

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2=\frac{1}{3},$$

代入(1)式得

$$原式=\frac{64\cdot\frac{1}{3}+4\left(-\frac{1}{3}\right)}{64\left(-\frac{1}{6}\right)+4\cdot\frac{1}{6}}=-2。$$

1322. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$。

解: 原式$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin 3x}=\frac{1}{3}。$$

1323. $\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$。

解: 原式$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}。$$

1324. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin^2x-\cos^2x}\cdot\right.$

$$\left.\frac{1}{(\operatorname{tg}x)^{\frac{2}{3}}+(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{3}}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{1}{3}。$$

1325. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(x+1)+1-2e^x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{6x}=\frac{1}{6}。$$

1326. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$。

解：原式$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{u\sin u}$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{u^2}\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}=\frac{1}{2}。$$

1327. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\arcsin x}{x^3}$

$$=8\lim_{y\to0}\frac{y-\sin y}{\sin^3y}+2\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z}{\sin^3z}$$

$$=6\lim_{y\to0}\left[\frac{y-\sin y}{y^3}\left(\frac{y}{\sin y}\right)^3\right]$$

$$=6\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}=1。$$

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$。

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3\sqrt{x}}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{a}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{b}}\right)$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a}{a+x}-\frac{b}{b+x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a-b}{(a+x)(b+x)}=\frac{a-b}{3ab}。$$

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}(a>0)$。

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-\cos x\cdot a^{\sin x}}{3x^2}\ln a$

$$=\ln a\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+\sin x\cdot a^{\sin x}-\cos^2 x\cdot a^{\sin x}\ln a}{6x}$$

$$=\ln^2 a\lim_{x\to 0}\frac{a^x-\cos^2 x\cdot a^{\sin x}}{6x}$$

$$+\ln a\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot a^x}{6x}$$

$$=\ln^2 a\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{6x}+\ln^2 a\lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}\sin^2 x}{6x}$$

$$+\frac{1}{6}\ln a$$

$$=\ln^2 a\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-\cos x\cdot a^{\sin x}\ln a}{6}+\frac{1}{6}\ln a$$

$$=\frac{1}{6}\ln a。$$

1330. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(1+\ln x)-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x+1}(1+\ln x)-x}{1-x}$

$$=\lim_{x\to1}x\cdot\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x\left[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}\right]}{-1}=-2。$$

1331. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin bx}{\sin ax}\cdot\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}\right)=1$。

1332. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\dfrac{-a\sin ax}{-b\sin bx}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$。

1333. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\cos(\sin x)-1+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^4x}+\right.$

$$+\frac{1-\frac{\sin^2 x}{2}-\cos x}{\sin^4 x}\Bigg]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^4}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1+\frac{y^2}{2}}{y^4}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin^4 x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1+\frac{y^2}{2}}{y^4}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^4 x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{4y^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^4\frac{x}{2}}{\sin^4 x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}。$$

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$。

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{th} x}{x\operatorname{th} x\operatorname{tg} x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{th} x}\,\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\frac{\sin x\operatorname{ch} x-\cos x\operatorname{sh} x}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\operatorname{ch} x-\cos x\operatorname{sh} x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ch} x\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{x(\operatorname{ch} x-1)}{x^3}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\operatorname{sh} x)}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}。$$

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ar\,sh}(\operatorname{sh} x)-\operatorname{ar\,sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x-\sin x}$,

其中 $\operatorname{ar\,sh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解： 令 $\operatorname{ar\,sh}(\sin x)=y$，则 $\sin x=\operatorname{sh} y$，且当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{\frac{x-y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sh} u}=1。$$

1336． $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}(\varepsilon>0)$。

解： $\text{原式}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}=0$。

1337． $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}(a>0,\ n>0)$。

解： 先设 n 为正整数，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^n e^{ax}}=0。$$

当 n 为正实数时，$[n]\leqslant n<[n]+1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}},$$

故得
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}=0。$$

1338． $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$。

解：令$\frac{1}{x^2}=u$，则

$$原式=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}=0 \text{（用上题）。}$$

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$。

解：$原式=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}=0$（由1337题）。

1340. $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$。

解：令$\ln x=y$，则$x=e^y$，故

$$原式=\lim_{y\to-0}y\ln(1-e^y)=\lim_{y\to-0}\frac{\ln(1-e^y)}{\frac{1}{y}}$$

$$=\lim_{y\to-0}\frac{-\frac{e^y}{1-e^y}}{-\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to-0}\frac{y^2}{1-e^y}$$

$$=\lim_{y\to-0}\frac{2y}{-e^y}=0。$$

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x$ $(\varepsilon>0)$。

解：$原式=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+0}-\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}=0$。

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$。

解：令$u=x^x$，则$\ln u=x\ln x$，于是

$$\ln\lim_{x\to+0} u=\lim_{x\to+0}\ln u=\lim_{x\to+0} x\ln x=0$$（由 1341 题），

故 $$\lim_{x\to+0} x^x=\lim_{x\to+0} u=e^0=1。$$

1343. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$。

解： 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x$

$=\exp\lim\limits_{x\to+0}(e^{x\ln x}-1)\ln x$。

由于 $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=0$，

故 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x\right)$

$=\exp\lim\limits_{x\to+0} x\ln^2 x=\exp\lim\limits_{x\to+0}(\sqrt{x}\ln x)^2=e^0=1$。

1344. $\lim\limits_{x\to+0}(x^{x^x}-1)$。

解： 由 1342 题，$\lim\limits_{x\to+0} x^x=1$，故

$\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x}=\exp\lim\limits_{x\to+0} x^x\ln x=0$，

由此得 原式 $=\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x}-\lim\limits_{x\to+0} 1=-1$。

1345. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}$。

解： 设 $u=x^{\frac{k}{1+\ln x}}$，则 $\ln u=\dfrac{k\ln x}{1+\ln x}$。

$$\ln\lim_{x\to+0} u=\lim_{x\to+0}\ln u=\lim_{x\to+0}\frac{k\ln x}{1+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=k,$$

故 $\lim\limits_{x\to+0} u=e^k$。

1346. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$。

解：令 $u=x^{\frac{1}{1-x}}$，则 $\ln u=\dfrac{\ln x}{1-x}$。

$$\ln\lim_{x\to1} u=\lim_{x\to1}\ln u=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{-y}=-1。$$

故 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$。

1347. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)\operatorname{tg}^{\frac{\pi x}{2}}$。

解：原式$=\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)}=\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}}$

$$=\exp\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}y}$$

$$=\exp\lim_{y\to0}\left[\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}y}\right]$$

$$=\exp\left(1\cdot\frac{2}{\pi}\right)=e^{\frac{2}{\pi}}。$$

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$。

解：本题与 522 题同，答案为 e^{-1}。

1349. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$。

解：令 $u=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$，则 $\ln u=\sin x\ln\operatorname{ctg}x$。

$$\ln\lim_{x\to+0}u=\lim_{x\to+0}\ln u=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}x}\lim_{x\to+0}\cos x$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \text{（由 1336 题），}$$

故 $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=1$。

1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$。

解：原式 $=\exp\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln\ln y}{y}=e^{0}=1$。

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$。

解：原式 $=\exp\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}$

$$=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{(2x+1)^{2}}}{2\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cos\frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$=\exp\left\{\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2(2x+1)}}\cdot\frac{1}{2x+1}\right\}$$

$$=e^0=1。$$

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$。

解： 原式$=\exp\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x-\ln\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}(x-a)}$

$$=\exp\lim_{x\to a}\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x\sec^2(x-a)}$$

$$=\exp\frac{1}{\sin a\cos a}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}。$$

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

解： 原式$=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\dfrac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln a}{2(a^x-x\ln a)}\cdot\frac{a^x-1}{x}-\frac{\ln b}{2(b^x-x\ln b)}\cdot\frac{b^x-1}{x}\right\}$$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}。$$

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$。

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}。$$

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}。$$

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x}=0。$$

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$

$$\cdot\frac{1}{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}。$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1$，故